Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber

13.07.2004

12. Übungsblatt zur Theoretischen Physik II: Elektrodynamik
Geschwindigkeitsaddition, Beschleunigung

Abgabe: 21.07.2004

Aufgabe 1 (6 Punkte): *Allgemeines Geschwindigkeitsadditionstheorem*

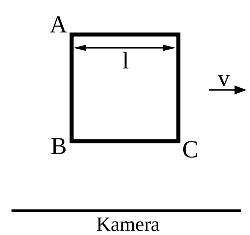
Betrachten Sie einen Massenpunkt, welcher sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}'$ im System I' bewegt. Welche Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ weist dieser Massenpunkt vom System I aus gesehen auf, wenn sich I' gegen I mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt? Diskutieren Sie die Spezialfälle $\mathbf{v} \parallel \mathbf{v}'$ und $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}'$. Zeigen Sie, daß

$$\mathbf{u}^2 = 1 - \frac{(1-\mathbf{v}^2)(1-\mathbf{v}'^2)}{(1+\mathbf{v}\mathbf{v}')^2}$$

gilt, und erläutern Sie den Grenzfall $|\mathbf{v}'| \to 1$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Unsichtbarkeit der Lorentz-Kontraktion*

1. Betrachten Sie einen Würfel der Seitenlänge l, der in großer Entfernung mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ an einer Kamera vorbeifliegt, wobei eine Momentaufnahme gemacht werden soll. Zeigen Sie, daß der Würfel auf der Photoplatte nicht kontrahiert, sondern um einen Winkel $\varphi = \arcsin(v)$ verdreht abgebildet wird. (2 Punkte)



2. Geben Sie einen allgemeinen Beweis für die Unsichtbarkeit der Lorentz-Kontraktion. Betrachten Sie dazu die Weltlinien

$$x_A = k\lambda_A + d_A$$
$$x_B = k\lambda_B + d_B$$

zweier Photonen A und B, wobei k der Wellenzahlvektor der Photonen ist und $\lambda_{A/B}$ die Weltlinien parametrisieren. Verlangen Sie, daß beide Photonen zur gleichen Zeit senkrecht auf der Photoplatte auftreffen. Leiten Sie daraus die Lorentz-invariante Beziehung $(x_A - x_B)^2 = (d_A - d_B)^2$ ab, welche für zwei beliebige Punkte auf den jeweiligen Weltlinien gilt, und interpretieren Sie das Ergebnis. (3 Punkte)

Aufgabe 3 (9 Punkte): *Beschleunigung*

1. Beweisen Sie, daß sich für die 4er-Beschleunigung a^i das Betragsquadrat wie folgt ergibt:

$$a^i a_i = \gamma^6 \left[(\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 - \mathbf{a}^2 \right] .$$

Dabei sind $\mathbf{v}$ die 3er-Geschwindigkeit und $\mathbf{a}$ die 3-dimensionale Beschleunigung. Ist a^i raum- oder zeitartig oder ein Nullvektor? (3 Punkte)

2. Ein Teilchen bewege sich mit der 4er-Geschwindigkeit u^i und der 4er-Beschleunigung a^i entsprechend der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}\tau} = \alpha^2 u^i,$$

wobei α^2 einen Skalar darstellt. Beweisen Sie, daß sich daraus

$$a^i a_i = -\alpha^2, \alpha^2 = const.$$

ergibt, d.h. daß die Eigenbeschleunigung α eine Konstante darstellt (hyperbolische Bewegung). (3 Punkte)

3. Bestimmen Sie für den Spezialfall einer ebenen Bewegung, also $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$, explizit die Bahngleichung eines Teilchens mit konstanter Eigenbeschleunigung und zeichnen Sie ein entsprechendes Raumzeit-Diagramm. (3 Punkte)