Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber

04.05.2004

3. Übungsblatt zur Theoretischen Physik II: Elektrodynamik

Vektoralgebra, spezielle Funktionen

Abgabe: 12.05.2004

Aufgabe 1 (8 Punkte): *Krummlinige Koordinaten*

Betrachten Sie Kugelkoordinaten, welche durch folgende Gleichungen definiert sind (x^1, x^2, x^3 sind kartesische Koordinaten):

$$\begin{aligned} x^1 &= r\, cos\, \varphi\, sin\, \theta \\ x^2 &= r\, sin\, \varphi\, sin\, \theta \\ x^3 &= r\, cos\, \theta \end{aligned}$$

1. Beschreiben Sie die durch Konstantsetzen jeweils einer der neuen Koordinaten r, φ, θ erhaltenen Hyperflächen. Bestimmen Sie die neuen Koordinatenlinien und die dazu tangential verlaufenden Einheitsvektoren $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta$. Zeigen Sie deren Orthonormalität. (4 Punkte)

2. Stellen Sie ∇ in den neuen Koordinaten auf, d.h. bestimmen Sie die Differentialoperatoren D in $\nabla = \mathbf{e}_r D_r + \mathbf{e}_\varphi D_\varphi + \mathbf{e}_\theta D_\theta$. Wie sieht der Laplace-Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ in den neuen Koordinaten aus? (4 Punkte)

Aufgabe 2 (8 Punkte): *Vektoralgebra*

1. Zeigen Sie, daß $\Delta \frac{1}{r}$ proportional zu $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ ist, wobei $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ die dreidimensionale δ-Distribution ist, und berechnen Sie den Wert des Ausdrucks. (Vgl. Übungsblatt 1, Aufgabe 1.3.) (2 Punkte)

2. Seien ϕ, ψ zweifach stetig differenzierbare Funktionen. Leiten Sie folgende Identitäten her:

$$(i) \int_V d^3x\, (\nabla\Psi \cdot \nabla\phi + \Psi\Delta\phi) = \int_{\partial V} dF\, \Psi\, (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\phi \qquad \text{(1. Greensche Identität)}$$

$$(ii) \int_V d^3x\, (\phi\Delta\Psi - \Psi\Delta\phi) = \int_{\partial V} dF\, \hat{\mathbf{n}} \cdot (\phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\phi) \qquad \text{(2. Greensche Identität)},$$

wobei $\hat{\mathbf{n}}$ der Einheitsnormalenvektor zum Flächendifferential $d\mathbf{F}$ ist. (2 Punkte)
(Diese Identitäten sind wichtig für die Behandlung von Randbedingungen in der Elektro- und Magnetostatik.)

3. Zeigen Sie, daß sich jedes Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathscr{S}$ in einen rotationsfreien und einen divergenzfreien Term zerlegen läßt (Zerlegungssatz):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_l(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_t(\mathbf{x}),$$

wobei rot $\mathbf{A}_l = 0$ und div $\mathbf{A}_t = 0$. Schreiben Sie dazu $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int d^3x' \mathbf{A}(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ und nutzen Sie Aufgabe 2.1 sowie den Ausdruck für $\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (Übungsblatt 1, Aufgabe 1.1). (4 Punkte)

Aufgabe 3 (4 Punkte): *Spezielle Funktionen*

1. Betrachten Sie die Legendre-Polynome 1. Art

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

welche Lösungen zur Legendre-Gleichung

$$(1 - x^2)P_l'' - 2xP_l' + l(l+1)P_l = 0$$

sind. Berechnen Sie die ersten fünf Legendre-Polynome und skizzieren Sie diese. (2 Punkte)

2. Die Kugelflächenfunktionen sind durch

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(cos\theta) e^{im\varphi}$$

definiert. Zeigen Sie deren Orthonormalität, d.h. zeigen Sie, daß

$$\int_0^\pi d\theta sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

gilt. Setzen Sie dabei die Orthogonalität der assoziierten Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^1 dx\, P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \delta_{ll'}$$

voraus. (1 Punkt)

3. Skizzieren Sie die ersten fünf Bessel-Funktionen. (1 Punkt)