Institut für
Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. C. Kiefer

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Sommersemester 2005

Aufgabe 13: **Friedmann I** (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Friedmann-Modell mit $k \neq 0$ und (heutigen) Dichteparametern $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$ und $\Omega_{v,0}$ sowie $\Omega := \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{v,0}$. Ferner seien $\rho_c(a) = 3\dot{a}^2/(8\pi G a^2)$ die kritische Dichte zu einem Zeitpunkt, an dem der Skalenparameter den Wert a hatte, und $\Omega_m(a) = \rho_m(a)/\rho_c(a)$ usw. die zugehörigen relativen Dichten. Bestimmen Sie die Größe $\Omega(a) - 1$, die angibt, wie weit das betrachtete Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt von einem flachen Modell ,,entfernt“ war, als Funktion von $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$, $\Omega_{v,0}$ und der Rotverschiebung z. Welches ,,ästhetische“ Problem ergibt sich hieraus für ein Friedmann-Modell, dessen Ω heute nur wenig vom Wert Eins abweicht?

Aufgabe 14: **Friedmann II** (8 Punkte)

Lösen Sie die Friedmann-Gleichung

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - k \tag{1}$$

für ein Universum, in dem sowohl Strahlung als auch nichtrelativistische Materie (Staub) vorhanden sind. Anleitung: Schreiben Sie die Friedmann-Gleichung zunächst um in

$$\dot{a}^2 = a^2 H_0^2 \left(\Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \right) - k \; . \tag{2}$$

Gehen Sie dann zu der konformen Zeit η über. Mit geeigneten Konstanten α und β erhält man

$$a'(\eta)^2 = \alpha + \beta a - k a^2 \; . \tag{3}$$

Lösen Sie diese Gleichung für die drei möglichen Werte von k und geben Sie das Ergebnis in der Form $(a(\eta), t(\eta))$ an. Man erhält

$$k = 0 : \qquad a(\eta) = \frac{\beta}{4}\,\eta^2 + \sqrt{\alpha}\,\eta \tag{4}$$

$$k \neq 0 : \qquad a = \sqrt{\alpha}\,S_k(\eta) - \frac{\beta}{2}\,k\,(C_k(\eta) - 1) \tag{5}$$

$$\text{mit} \quad S_1(\eta) = \sin(\eta)\,, \quad S_{-1} = \sinh(\eta)\,, \tag{6}$$

$$C_1(\eta) = \cos(\eta) \quad \text{und} \quad C_{-1} = \cosh(\eta) \tag{7}$$

und einen analogen Ausdruck für $t(\eta)$. Zeigen Sie weiter, wie man das Resultat für $k = 0$ aus den Ergebnissen für $k \neq 0$ erhalten kann, und untersuchen Sie schließlich die (implizit definierten) Funktionen $a(t)$ für große und kleine Werte von t.

Aufgabe 15: **Friedmann III** (6 Punkte)

Aktuelle Beobachtungen legen nahe, dass wir in einem flachen ($k = 0$) Universum mit positiver kosmologischer Konstante leben, in dem der Beitrag der Strahlung zur Gesamtenergiedichte vernachlässigt werden kann. Lösen Sie für dieses Modell die Friedmann-Gleichung

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\,a^2\left(\rho_m + \frac{\Lambda}{8\pi G}\right) - k\,. \tag{8}$$

Tip: Formen Sie die Friedmann-Gleichung erst zu

$$\dot{a}^2 = H_0^2\left(\Omega_{m,0}\,a^{-1} + a^2(1 - \Omega_{m,0})\right) \tag{9}$$

um, wobei man $a_0 = 1$ setzt. Bei der Lösung erweist sich die Substitution $x^2 = (1/\Omega_{m,0} - 1)a^3$ als nützlich. Bestimmen Sie das Weltalter als Funktion von H_0 und $\Omega_{m,0}$. Wie verhält sich $a(t)$ für große und kleine Werte von t? Gut etablierten Sternentwicklungsmodellen zufolge sind einige Kugelsternhaufen unserer Galaxis mindestens 12 Milliarden Jahre alt. Plotten Sie in der $h{-}\Omega_m$-Ebene ($H_0 = 100\,h\,\mathrm{km/(sMpc)}$) die Konturlinien für ein konstantes Weltalter und bestimmen Sie, welcher Bereich mit der obigen Beobachtung verträglich ist. Beschränken Sie sich dabei auf Werte $0,4 < h < 1$.

Abgabe: Di, 31.5.2005