Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

27.6.2007

11. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Wintersemester 2007

Abgabe: 4.7.2007

Aufgabe 29 (5 Punkte): *Zeitdilatation in der Schwarzschildmetrik*
Zeigen Sie, daß für die Eigenzeit ds auf einer kreisförmigen Geodätischen im Schwarzschild-Feld der Masse M

$$ds = \sqrt{1 - \frac{3M}{r}}\, dt$$

gilt. Schätzen Sie den Effekt für einen die Erde in engem Orbit umkreisenden Satelliten ab.

Aufgabe 30 (15 Punkte): *Gravitoelektromagnetismus*
In der Vorlesung wurde die „Maxwellsche“ Struktur der linearen Einstein-Gleichungen vorgestellt:

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E}_\mathrm{g} = -4\pi G\rho & \nabla \times (\frac{1}{2}\mathbf{B}_\mathrm{g}) = \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E}_\mathrm{g} - \frac{4\pi G}{c}\mathbf{j} \\ \nabla \times \mathbf{E}_\mathrm{g} = -\frac{1}{c}\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{B}_\mathrm{g}) & \nabla \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{B}_\mathrm{g}) = 0\ , \end{array}$$

wobei $\mathbf{E}_\mathrm{g} := -\nabla\Phi_\mathrm{g} - \frac{1}{c}\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{A}_\mathrm{g})$ das gravitoelektrische und $\mathbf{B}_\mathrm{g} := \nabla \times \mathbf{A}_\mathrm{g}$ das gravitomagnetische Feld bezeichnen.

1. Leiten Sie diese Gleichungen aus der linearen Näherung der Einstein-Gleichungen her. Betrachten Sie als Quelle den Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit, mit Geschwindigkeiten klein im Vergleich zu c: $T^{00} = \rho$, $T^{0\alpha} = c^{-1}j^\alpha$, and $T^{\alpha\beta} = \mathcal{O}(c^{-2})$, wobei ρ die Massendichte und $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ die Massenstromdichte bezeichnen. Berücksichtigen Sie Terme bis zur Ordnung $\mathcal{O}(c^{-4})$. Führen Sie außerdem das gravitoelektrische Potential $\Phi_\mathrm{g} := \frac{c^2}{2}\overline{\Psi}_{00}$ und das gravitomagnetische Potential $(A_\mathrm{g})_\alpha := -c^2\overline{\Psi}_{0\alpha}$ ein. Sie benötigen u.a. die Lorenz-Eichung $\frac{1}{c}\partial_t\Phi_\mathrm{g} + \nabla \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{A}_\mathrm{g}) = 0$ (Herleitung!). Vergleichen Sie mit der Elektrodynamik.[1]

2. Betrachten Sie nun eine Massenverteilung, welche um den räumlichen Ursprung beschränkt ist. Berechnen Sie die Potentiale Φ_g und $\mathbf{A}_\mathrm{g}$ und erläutern Sie deren Bedeutung.

3. Leiten Sie mit obigen Definitionen die „Lorentzkraft“ auf ein Teilchen der Masse m her. Stellen Sie dazu erst die Metrik auf. Betrachten Sie dann die Lagrangefunktion eines Teilchens der Masse m, $L = -mc\frac{ds}{dt}$, in linearer Ordnung in Φ_g und $\mathbf{A}_\mathrm{g}$. (Lösung: $L = -\frac{mc^2}{\gamma} - m\gamma(1 + v^2/c^2)\Psi_\mathrm{g} + \frac{2m\gamma}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$). Berücksichtigen Sie bei der Ableitung der Kraft nur Terme bis inklusive der Ordnung $\mathcal{O}(c^{-1})$ und nehmen Sie an, daß $\mathbf{A}_\mathrm{g}$ zeitunabhängig ist. Führen Sie die gravitoelektromagnetischen „Ladungen“ $q_\mathrm{E} = m$ und $q_\mathrm{B} = 2m$ ein, und vergleichen Sie mit der Elektrodynamik.

[1] Für einen aktuellen Übersichtsartikel siehe: B. Mashhoon, Gravitoelectromagnetism: A brief review. `gr-qc/0311030`.