Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser 8.5.2007

5. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Sommersemester 2007

Abgabe: 16.5.2007

Aufgabe 14 (10 Punkte): *Konforme Transformationen*

Zwei Metriken g und $\bar{g}$ heißen *konform* zueinander, falls es eine nirgends verschwindende, differenzierbare Funktion $\Omega(x)$ gibt, so daß

$$\bar{g}_{ab}(x) = \Omega^2(x)\, g_{ab}\,.$$

a) Beweisen Sie, daß Winkel zwischen zwei Vektoren unter einer konformen Transformation erhalten bleiben.

b) Rechnen Sie nach, daß sich das Christoffel-Symbol unter einer konformen Transformation wie

$$\bar{\Gamma}^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} + S^i{}_{jk}\,, \quad S^i{}_{jk} = 2\,\delta^i_{(j}\sigma_{k)} - g_{jk}\,\sigma^i\,, \quad \sigma_i = \partial_i \log\Omega$$

verhält. Ist $S^i{}_{jk}$ ein Tensor?

c) Zeigen Sie, daß lichtartige Geodätische bezüglich einer Metrik g_{ij} ebensolche für eine konform transformierte Metrik sind.

Eine einfache doch längliche Rechnung zeigt (hier nicht durchzuführen), daß

$$\bar{R}^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} - 4g^{im}\, g_{[m|[k}S_{l]|j]}\,, \qquad S_{ij} = \sigma_{i;j} - \sigma_i\sigma_j + \frac{1}{2}\, g_{ij}\,\sigma_k\sigma^k$$

gilt. Ein Raum heißt dann konform flach, wenn sich durch eine konforme Transformation $\bar{R}^i{}_{jkl} = 0$ erreichen lässt, d. h. falls

$$g_{ij}(x) = \Omega^2(x)\,\eta_{ij}\,.$$

d) Zeigen Sie, daß der Weyl-Tensor konform invariant ist.

e) Es sei eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Metrik g_{ab} sowie einer dazugehörigen kovarianten Ableitung ∇_a gegeben. Weiterhin sei α eine Funktion, welche die Laplace-Gleichung $\nabla_a\nabla^a\alpha = 0$ erfüllt. ϵ_{ab} sei ein antisymmetrischer Tensor (siehe Aufgabe 10), welcher der Bedingung $\epsilon_{ab}\epsilon^{ab} = 2(-1)^s$ genügt, wobei s die Anzahl der Minuszeichen in der Metrik ist. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$\nabla_a\beta = \epsilon_{ab}\nabla^b\alpha$$

die Integrabilitätsbedingungen $\partial_a\partial_b\beta = \partial_b\partial_a\beta$ erfüllt (d. h. lokal existiert eine derartige Funktion β). Zeigen Sie weiterhin, daß die Metrik die Form

$$ds^2 = \Omega(\alpha,\beta)\{d\alpha^2 + (-1)^s d\beta^2\}$$

annimmt, wenn α und β als Koordinaten gewählt werden.

Aufgabe 15 (10 Punkte): *Gleichung der geodätischen Abweichung*
Betrachten Sie zwei benachbarte Geodätische ("frei fallende Teilchen") mit Bahnen $x^a(s)$ und $x^a(s) + \xi^a(s)$; dabei soll $\xi^a(s)$ in dem Sinne "klein" sein, daß alle Terme von quadratischer und höherer Ordnung in ξ^a vernachlässigbar seien.
Zeigen Sie, daß

$$\frac{D^2\xi^a}{Ds^2} = R^a{}_{bcd}u^b u^c \xi^d$$

wobei $u^a = dx^a/ds$.

Anleitung: Formulieren Sie zunächst die Geodätengleichungen für $x^a(s)$ und $x^a(s) + \xi^a(s)$, bilden die Differenz und entwickeln bis zur ersten Ordnung in $\xi^a(s)$; das ergibt eine Gleichung, die $d^2\xi^a/ds^2$ enthält. Berechnen Sie dann den allgemeinen Ausdruck für $D^2\xi^a/Ds^2$ und ersetzen den darin vorkommenden Term $d^2\xi^a/ds^2$ mittels der zuerst gefundenen Gleichung.