

9. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I Sommersemester 2007

Abgabe: 20.6.2007

Aufgabe 23 (5 Punkte): *Schwarzschild-Geometrie*

Berechnen Sie in isotropen Schwarzschild-Koordinaten die Fläche eines äquatorialen Kreises, der sich vom Schwarzschild-Radius bis zu einem festen Radius R erstreckt, sowie das Volumen einer Kugelschale zwischen diesen Radien, und vergleichen Sie die Resultate mit denen im Euklidischen Raum.

Aufgabe 24 (10 Punkte): *Reissner-Nordström-Lösung*

In dieser Aufgabe soll das Gravitationsfeld außerhalb einer statischen, sphärisch-symmetrischen Ladungsverteilung mit Masse M und Ladung Q berechnet werden. Machen Sie dazu für die Metrik wie in der Vorlesung den Ansatz

$$ds^2 = e^{\nu(t,r)} dt^2 - e^{\lambda(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

und bestimmen Sie, z.B. mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen $F^{ij}{}_{;j} = 4\pi j^i$, den Feldstärketensor F^{ij} (Lösung: $F^{0r} = e^{-(\lambda+\nu)/2} Q/r^2$) und aus diesem den zugehörigen Energie-Impulstensor T^{ij} . Berechnen Sie nun mit den Einsteinschen Gleichungen die Metrikfunktionen ν und λ . Wählen Sie hierbei die Integrationskonstante so, daß der Newtonsche Grenzfall richtig herauskommt. Berechnen Sie für diese Metrik die Gesamtenergie aus Aufgabe 21.

Aufgabe 25 (5 Punkte): *Lemaître-Koordinaten*

Zeigen Sie, daß die dynamisch aussehende Metrik

$$ds^2 = dt^2 - \frac{4}{9} \left[\frac{9M}{2(r-t)} \right]^{2/3} dr^2 - \left[\frac{9M}{2} (r-t)^2 \right]^{2/3} d\Omega^2$$

gerade die statische Schwarzschild-Metrik ist.