Universität zu Köln 28.04.2009
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser, Christian Steinwachs

2. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Sommersemester 2009

Abgabe: 6.05.2009

Aufgabe 4 (6 Punkte): *Bewegung im Gravitationsfeld*

Die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Gravitationsfeld ist durch

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{kl}\,\dot{x}^k\dot{x}^l = 0 \tag{1}$$

gegeben, wobei $\dot{x}^i = dx^i/ds$ und $\Gamma^i{}_{kl} = \frac{1}{2}g^{ij}(\partial_l g_{jk} + \partial_k g_{jl} - \partial_j g_{kl})$ gilt.
1. Wiederholen Sie kurz die in der Vorlesung gegebene Ableitung von (1) aus dem Variationsprinzip $\delta\int ds = 0$. Wieso kann diese Herleitung nicht für Photonen verwendet werden?
2. Leiten Sie (1) nun aus dem Variationsprinzip

$$\delta\int g_{ik}\,\dot{x}^i\dot{x}^k\,d\lambda \equiv \delta\int \mathcal{L}\,d\lambda = 0$$

ab, wobei λ ein affiner Parameter ist und $\dot{x}^i = dx^i/d\lambda$ gilt. Zeigen Sie, daß diese Herleitung auch für Photonen gilt, und bestimmen Sie $\mathcal{L}$ für die Lösung von (1).

Aufgabe 5 (6 Punkte): *Christoffel-Symbole*

Berechnen Sie das Transformationsverhalten der Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}(g_{ik,l} + g_{li,k} - g_{kl,i})$$

bei einer Koordinatentransformation $x^{i'}(x^a)$. Das Resultat zeigt, daß sie keinen Tensor bilden.

Aufgabe 6 (4 Punkte): *Rotierendes Bezugssystem*

Berechnen Sie die Christoffelsymbole für ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotierendes System im Newtonschen Grenzfall und werten Sie die Geodätengleichung (1) aus. Identifizieren Sie die Zentrifugal- und die Corioliskraft in der resultierenden Bewegungsgleichung.

Aufgabe 7 (4 Punkte): *Frei fallender Beobachter*

In einem (flachen) $1+1$-dimensionalen Minkowskiraum sei die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes durch $m\ddot{x} - m\,g = 0$ gegeben. In Analogie zur verallgemeinerten Bewegungsgleichung (1) setzen wir nun $\Gamma^1{}_{00} = -g$ und $\Gamma^i{}_{kl} = 0$ sonst. Physikalisch ist klar, dass es ein Bezugssystem geben sollte, in dem das Christoffel-Symbol verschwindet, die Bewegungsgleichung eines freien Massenpunktes also $m\,\ddot{x} = 0$ lautet. Finden Sie ein solches Koordinatensystem, indem Sie das Christoffel-Symbol „integrieren“.