Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber, Christian Heinicke

11.01.2005

11. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Wintersemester 2004/2005

Abgabe: 18.01.2005

Aufgabe 29 (3 Punkte): *Zeitdilatation in der Schwarzschildmetrik*

Zeigen Sie, dass für die Eigenzeit ds auf einer kreisförmigen Geodätischen im Schwarzschild-Feld der Masse M

$$ds = \sqrt{1 - \frac{3M}{r}}\, dt$$

gilt. Schätzen Sie den Effekt für einen die Erde in engem Orbit umkreisenden Satelliten ab.

Aufgabe 30 (7 Punkte): *Fermi-Walker-Verschiebung*

Zeigen Sie, daß die durch

$$\frac{Dv^i}{Ds} = v_k \left(u^k \frac{Du^i}{Ds} - \frac{Du^k}{Ds} u^i \right)$$

definierte *Fermi-Walker-Verschiebung* eines Vektors v^i längs einer Kurve $x^i = x^i(s)$ (s=Bogenlänge, $u^i = dx^i/ds$) die folgenden Eigenschaften hat:

(i) Das Skalarprodukt zweier FW-transportierter Vektoren ist entlang der Kurve konstant.

(ii) Ist die Kurve $x^i(s)$ eine Geodätische, so ist der FW-Transport mit dem gewöhnlichen Paralleltransport identisch.

(iii) FW-Transport überführt Tangentialvektoren in Tangentialvektoren.

Aufgabe 31 (10 Punkte): *Präzession*

Ein beschleunigtes Probeteilchen habe in seinem momentanen Ruhesystem einen Eigendrehimpuls $\mathbf{S}$, an den kein äußeres Drehmoment angreife. In diesem Bezugssystem wird nun das vierkomponentige Objekt $S^i := (0, \mathbf{S})$ gebildet. Durch die zusätzliche Forderung $u_i S^i = 0$ (u^i ist die Vierergeschwindigkeit des Probeteilchens entlang seiner Bahn) wird S^i zu einem in jedem Bezugssystem definierten Vierervektor.

(i) Zeigen Sie, daß die Änderung von S^i entlang der Bahn des Probeteilchens durch die Fermi-Walker-Transportgleichung aus Aufgabe 30 gegeben ist.

(ii) Das Probeteilchen bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius r und konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\varphi/dt$ in der xy-Ebene einer flachen Raumzeit und habe zur Zeit $t = 0$ aus der Sicht eines inertialen Beobachters die Koordinaten $x = r = const.$, $y = 0$, $z = 0$ sowie die Drehimpulskomponenten $S^t(0) = S^y(0) = 0$, $S^x(0) = S^z(0) = 1$. Berechnen Sie das Verhalten von S^i als Funktion von t. Berechnen Sie dann die komplexe Größe $S^x(t) + iS^y(t)$ und interpretieren Sie hiermit das Verhalten des Eigendrehimpulses des Probeteilchens.