Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber, Christian Heinicke

25.1.2004

13. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Wintersemester 2004/2005

Abgabe: 1.2.2005

Aufgabe 34 (10 Punkte): *Zum Laue-Theorem: Masse und Strahlung im Fernfeld*

a) Beweisen Sie, dass für eine isolierte Massenverteilung, die durch einen symmetrischen divergenzfreien Energie-Impuls-Tensor T^{ik} beschrieben wird, in linearer Näherung

$$\int T_{\alpha\beta}\, d^3x = \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dt^2} \int T_{00}\, x^\alpha\, x^\beta\, d^3x\,, \qquad \alpha,\, \beta = 1, 2, 3,$$

gilt (Theorem von Laue).

b) In der Vorlesung hatten Sie die allgemeine Lösung der Wellengleichung für ψ_{ij} (wobei $g_{ij} = \eta_{ij} + 2\,\psi_{ij}$) kennengelernt. Für sehr große Entfernungen von der Quelle folgt daraus (warum?)

$$\psi_{00} = -\frac{2G}{r} \int d^3x \left(T_{00} - \frac{1}{2}\, T_i{}^i \right) .$$

Da für das elektromagnetische Feld $T_i{}^i = 0$ gilt, entsteht leicht der Eindruck, dass elektromagnetische Selbstenergien, die in einer Masse enthalten sind, zu einer doppelt so starken Anziehung führen wie „Normale“ Materie, für die $T_i{}^i \approx T_{00}$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe des Laue-Theorems, dass für *jede* statische Energieverteilung

$$\psi_{00} = -\frac{G\,\mathcal{M}}{r}\,, \qquad \mathcal{M} := \int T_{00}\, d^3x$$

gilt. Ist $\mathcal{M}$ die *träge* oder *schwere* Masse? Was lässt sich daher in diesem Zusammenhang zum Äquivalenzprinzip sagen?

c) Im Folgenden sollen Sie nur heuristisch argumentieren — Sie dürfen aber natürlich auch gerne bis zu einem Ihnen angemessen erscheinenden Maß sorgfältig vorgehen! Vollziehen Sie die Herleitung der “Quadrupolformel” aus der Vorlesung nach.

In welcher Art und Weise hängt die pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie für den Fall ebener Gravitationswellen in linearer Näherung vom Massenquadrupolmoment ab? (Verwenden Sie das Laue-Theorem und den kanonischen Energie-Impuls $t_i{}^j$ des Gravitationsfeldes aus der Vorlesung.)

Aufgabe 35 (10 Punkte): *Gravitationslinsen*

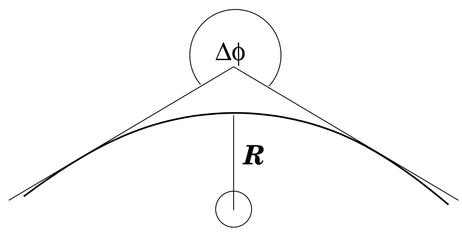
a) Berechnen Sie die Lichtablenkung im kugelsymmetrischen Gravitationspotential

$$U(r) = -G\,\frac{M}{r}$$

nach der Newtonschen Theorie. Nehmen Sie dabei an, dass "Lichtteilchen" dieselbe Beschleunigung erfahren wie massive Teilchen. Geben Sie zunächst eine exakte Formel für den totalen Ablenkungswinkel $\Delta\phi - \pi$ an unter der Voraussetzung

1. dass die Geschwindigkeit des Teilchens asymptotisch für $t \to -\infty$ den Wert c hat (Cavendish 1784),
2. dass das Teilchen im Moment der größten Annäherung an das Zentrum die Geschwindigkeit c hat (Soldner 1801).

Linearisieren Sie diese Formel dann bezüglich der dimensionslosen Größe $GM/(Rc^2)$ (R ist der minimale Abstand des Lichtteilchens vom Zentrum).



b) Wie muss man die Profilkurve $y = f(x)$ einer Plastiklinse mit vorgegebenen Brechungsindex $n > 1$ wählen, damit für achsenparallel einfallende Strahlen der Ablenkungswinkel $\delta = \Delta\phi - \pi$ durch die Formel

$$\delta = \frac{2R_S}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{R_S^2}{R^2}\right)$$

gegeben ist, d. h. damit bei Vernachlässigung quadratischer und höherer Glieder dieselbe Ablenkungsformel wie bei der Schwarzschildraumzeit gilt?