Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber, Christian Heinicke

02.11.2004

3. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Wintersemester 2004/2005

Abgabe: 09.11.2004

Aufgabe 7 (4 Punkte): *Krümmung I*

Das Verhältnis des Schwarzschildradius eines Körpers zu seinem Radius ist ein heuristisches Maß für die Abweichung der Geometrie in der Umgebung des betrachteten Körpers von der flachen Minkowski-Raumzeit. Vergleichen Sie dieses Verhältnis für einen Kugelsternhaufen ($M \approx 10^6 M_\odot, R \approx 20$ pc), die Sonne, die Erde, einen Neutronenstern ($M \approx M_\odot$, $R \approx$10 km), einen weißen Zwerg ($M \approx M_\odot$, $R \approx 10^4$ km) sowie ein Proton und ein Elektron. Benutzen Sie für letztere deren Compton-Wellenlängen $\hbar/mc$ als (effektiven) Radius. Welche Masse müßte ein Elementarteilchen haben, damit seine Comptonwellenlänge so groß ist wie sein Schwarzschildradius, und wie groß ist dieser dann? Die bei diesen Betrachtungen auftretenden Größen werden häufig in sogenannten Planck-Einheiten angegeben, die sich in eindeutiger Weise aus den Naturkonstanten G, c und $\hbar$ ergeben. Berechnen Sie die Planck-Masse, die Planck-Länge, die Planck-Zeit und die Planck-Energie in cgs-Einheiten.

Aufgabe 8 (6 Punkte): *Krümmung II*

Betrachten Sie die in den flachen dreidimensionalen Raum eingebettete Schar von Gaussglocken $z = \exp(-a^2 r^2)$ mit $r^2 = x^2 + y^2$. Bestimmen Sie die Metrik auf einer Gaussglocke in den Koordinaten (r, φ) und berechnen Sie die Krümmung im Scheitelpunkt zum einen mit den beiden in der Vorlesung angegebenen Formeln (Vergleich von Flächeninhalt bzw. Umfang) sowie zum anderen durch Anschmiegen einer Kugelschale und Verwendung der bekannten Krümmung einer Kugel vom Radius R.

Aufgabe 9 (10 Punkte): *Tensoren*

a) Zeigen Sie, dass $A_{ij}B^{ij} = 0$, wenn A_{ij} antisymmetrisch und B^{ij} symmetrisch, also wenn $A_{(ij)} = 0$ und $B_{[ij]} = 0$ ist. Beweisen Sie zudem, dass die Beziehungen

$$V^{ij}A_{ij} = V^{[ij]}A_{ij} \quad \text{und} \quad V^{ij}B_{ij} = V^{(ij)}B_{ij}$$

für einen beliebigen Tensor V^{ij} gelten.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der unabhängigen Komponenten eines Tensors $T^{ij\cdots}$ der Stufe r in einem n-dimensionalen Raum. Wie viele Komponenten gibt es, wenn $T^{ij\cdots}$ symmetrisch oder antisymmetrisch in s Indizes ist?

d) A und B seien zwei Tensoren vom Typ $(3,3)$ bzw. $(2,1)$. Zeigen Sie, dass

$$C^b = A^{abc}{}_{aef}\, B^{ef}{}_c$$

ein Tensor vom Typ $(1,0)$ ist.

e) Zeigen Sie, dass das Kronecker-Symbol δ_i^j (=1 für $i=j$, sonst 0) ein numerisch invarianter Tensor ist.

f) Zeigen Sie

$$\frac{\partial g}{\partial x^j} = g^{ik}\, g\, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = -g_{ik}\, g\, \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^j}$$

und damit

$$\frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^j} = \Gamma^i{}_{ij}\,.$$

f) Betrachten Sie das Objekt

$$\epsilon(ijkl) = \begin{cases} +1\,, & (ijkl) \text{ ist gerade Permutation von } (0123) \\ -1\,, & (ijkl) \text{ ist ungerade Permutation von } (0123) \\ 0\,, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

und nehmen Sie an, es transformiere sich so, als habe es obere Indizes. Zeigen Sie, dass es sich dann um eine (Pseudo-)Tensordichte vom Gewicht 1 handelt. Daraus folgt offenbar, dass

$$\epsilon^{ijkl} := \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \epsilon(ijkl)$$

ein (Pseudo-)Tensor ist. Beweisen Sie abschließend

$$\epsilon_{abcd} := g_{ia}\, g_{jb}\, g_{kc}\, g_{ld}\, \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon(ijkl) = -\sqrt{-g}\, \epsilon(abcd) = g\, \epsilon^{abcd}\,.$$