Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber, Christian Heinicke 07.12.2004

8. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I
Wintersemester 2004/2005

Abgabe: 14.12.2004

Aufgabe 19 (3 Punkte): *Isotrope Koordinaten*

Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$t = \bar{t} \qquad r = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2 \bar{r}$$

der Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\, d\Omega^2,$$

und berechnen Sie die Metrik in den neuen Koordinaten. Welchen Wert hat die Metrik am Horizont?

Aufgabe 20 (7 Punkte): *ADM-Energie*

Falls die Metrik einer Raumzeit in der Form $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$ mit im Unendlichen verschwindenden Funktionen h_{ij} geschrieben werden kann, ist die Gesamtenergie des Systems durch das Oberflächenintegral

$$E = \frac{1}{16\pi G} \int \sum_{\alpha,\beta} \left(g_{\alpha\beta,\beta} - g_{\beta\beta,\alpha}\right)\, d^2 S_\alpha$$

über eine Fläche weit außerhalb jeder Materieverteilung gegeben (ADM-Energie). Die griechischen Indizes bezeichnen hierbei räumliche Koordinaten. Berechnen Sie diese Energie für die Schwarzschild-Raumzeit. *Tip*: Die Rechnung geht am einfachsten in isotropen Koordinaten.

Aufgabe 21 (10 Punkte): *Stationärer Beobachter*

Eine Raumzeit heißt *stationär*, falls auf ihr ein zeitartiges Killingfeld ξ^i existiert. Wir betrachten im folgenden eine stationäre Raumzeit, auf der Koordinaten t, r, θ, φ so gewählt werden können, daß die Metrik für große Werte der radialen Koordinate r in die Metrik des Minkowski-Raums übergeht (so eine Raumzeit nennt man asymptotisch flach). Wir wollen weiter annehmen, daß das Killingfeld ξ^i durch die (Komponenten der) Richtungsableitung $\partial/\partial t$ gegeben ist und definieren ferner die Größe $V^2 := \xi_i \xi^i$. Ein Beobachter A in dieser Raumzeit heißt *stationär*, falls seine Vierergeschwindigkeit u^i immer ein Vielfaches des Killingfeldes ξ^i ist.

1. Drücken Sie u^i durch ξ^i und V aus. Der stationäre Beobachter A habe eine Ruhemasse m. Berechnen Sie seine Energie zum einen in seinem Ruhesystem und zum anderen aus der Sicht eines Beobachters B im Unendlichen, und interpretieren Sie das Ergebnis.

2. Berechnen Sie weiter den Betrag der Kraft, die ein Raketentriebwerk aufbringen muß, um den Beobachter A auf seiner stationären Bahn zu halten, sowie die Kraft, die Beobachter B im Unendlichen aufbringen muß, um dasselbe mittels eines (masselosen) Fadens zu leisten.

3. Werten Sie schließlich die Ergebnisse für die Schwarzschild-Raumzeit mit Massenparameter M aus und berechnen Sie insbesondere die Oberflächengravitation κ, welche durch die Kraft definiert ist, die ein Beobachter im Unendlichen aufwenden muß, um eine Einheitsmasse auf dem Schwarzschild-Radius mittels eines (masselosen) Fadens stationär zu halten.