

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Physik I (Mechanik)
im Wintersemester 2006/07

Aufgabe 17: **Teilchen im elektromagnetischen Feld**
(12 Punkte)

Gegeben sei ein Teilchen mit Ladung e und Masse m im elektromagnetischen Feld.

- a) Betrachten Sie die in der Vorlesung angegebene Lagrange-Funktion

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e\phi(\vec{r}, t) + e\vec{A}(\vec{r}, t)\dot{\vec{r}} \quad (1)$$

und zeigen Sie, daß die Lagrangeschen Gleichungen äquivalent zu

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

sind, mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ als elektrischem und $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ als magnetischem Feld.

- b) Zeigen Sie, daß \vec{E} und \vec{B} unter den ‘Eichtransformationen’

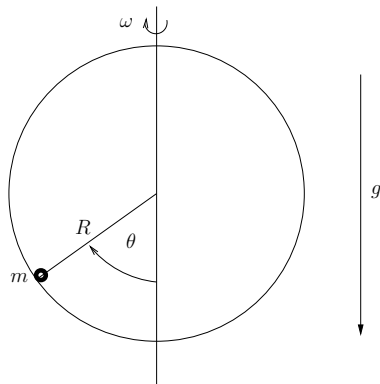
$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &\longrightarrow \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}, t) \\ \phi(\vec{r}, t) &\longrightarrow \phi'(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial\lambda(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

invariant sind.

- c) Wie transformiert sich die Lagrange-Funktion (1) unter diesen Eichtransformationen? Was ergibt sich für die transformierten Lagrangeschen Gleichungen?

Aufgabe 18:

(18 Punkte)



Eine Kugel der Masse m gleite reibungslos auf einem Ring mit Radius R unter dem Einfluß des homogenen Gravitationsfeldes. Der Ring soll mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um seine vertikale Achse rotieren. Dabei soll θ die Position der Kugel auf dem Ring angeben (s. Skizze).

- Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(\theta, \dot{\theta})$ auf.
- Wie hängen die Gleichgewichtspunkte θ_0 von θ von ω ab? Gibt es zudem von ω unabhängige Gleichgewichtspunkte? Wo ist das Gleichgewicht stabil, wo instabil?
Hinweis: Stellen Sie zur Bestimmung der Gleichgewichtspunkte eine Gleichung für $\ddot{\theta}$ auf. Interpretieren Sie deren rechte Seite als Kraft. Das Teilchen befindet sich im Gleichgewicht, wenn es keine Kraft erfährt. Überlegen Sie, welche Bedingung für die Kraft gelten muß, damit das Gleichgewicht stabil bzw. instabil ist.
- Finden Sie die Frequenzen kleiner Schwingungen um das stabile Gleichgewicht.
 Entwickeln Sie dazu die oben gefundene Gleichung für $\ddot{\theta}$ um θ_0 in erster Ordnung. Was können Sie über die Bewegung aussagen, wenn sich das System für $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ an dem einzigen stabilen Gleichgewichtspunkt befindet?

Abgabe: Di, 5.12.2006