Institut für
Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. C. Kiefer

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Physik I (Mechanik)
im Wintersemester 2006/07

Aufgabe 19: **Erhaltungsgrößen** (9 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$\mathcal{E}(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

wobei $L = L(q, \dot{q}, t)$ die Lagrange-Funktion ist.

a) Wann ist $\mathcal{E}$ zeitlich erhalten?

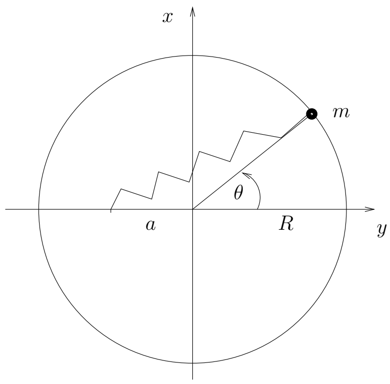
b) Zeigen Sie: Falls das Potential unabhängig von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten und die kinetische Energie eine homogene Funktion vom Grade 2 in diesen Geschwindigkeiten ist, so ist $\mathcal{E}$ gleich der Energie.

c) Betrachten Sie wieder das Beispiel vom letzten Übungsblatt, Aufgabe 18 (rotierender Ring im Erdfeld, auf dem eine Kugel gleitet). Ist dort $\mathcal{E}$ erhalten?
Vergleichen Sie $\mathcal{E}$ mit der Energie und interpretieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Für L ergab sich die Lösung:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \omega^2 \sin^2\theta) + mgR \cos\theta \ .$$

Aufgabe 20: **Federkraft** (21 Punkte)



Ein Massenpunkt m bewege sich auf einer vorgeschriebenen Kreisbahn mit Radius R. Er sei durch eine Feder einer exzentrisch wirkenden Kraft ausgesetzt. Die Federkonstante sei k, die Ausdehnung der entspannten Feder im Verhältnis zu $(R - a)$ vernachlässigbar (siehe Skizze). Die Länge der Feder sei mit ℓ bezeichnet. Im entspannten Zustand ist $\ell = R$. Verwenden Sie im Folgenden Polarkoordinaten.

a) Stellen Sie eine Formel für die Auslenkung der Feder, $(\ell - R)$, als Funktion von θ auf.

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(\theta, \dot{\theta})$ auf. Verwenden Sie, daß die potentielle Energie einer Feder $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ beträgt, wobei x die Auslenkung aus der Ruhelage bezeichnet.

c) Zeigen Sie, daß

$$\ddot{\theta} = \frac{k \sin\theta}{m} \frac{a}{R} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2 + 2aR\cos\theta}} \right) . \tag{1}$$

d) Nun soll a klein gegenüber R sein. Entwickeln Sie den Bruch in (1) in $\frac{a}{R}$. In linearer Näherung erhalten Sie

$$\ddot{\theta} = \frac{ka^2}{2mR^2} \sin 2\theta . \tag{2}$$

e) Bestimmen Sie die Schwingungsdauer für Anfangswerte $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Leiten Sie dazu aus (2) eine Gleichung für $\dot{\theta}$ her. Der Ausdruck für die Schwingungsdauer enthält ein elliptisches Integral, das Sie nicht lösen müssen. Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit Ihren Ergebnissen aus Aufgabe 7 (3. Übungsblatt).

Abgabe: Di, 12.12.2006