

8. Übungsblatt zur Vorlesung  
**Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II**  
im Wintersemester 2007/08

**Aufgabe 19: Eddington-Lemaître-Modell** (12 Punkte)

Betrachten Sie ein Friedmann-Modell mit  $\Omega_{m,0} \approx \Omega_0 = 1/3$  und unspezifiziertem  $\Omega_{v,0} =: \Omega_\Lambda$ . Angenommen, das Universum hätte in der Vergangenheit eine sehr lange quasistatische Phase durchlaufen: Welchem Wert von  $\Omega_\Lambda$  würde dies entsprechen? Bei welcher Rotverschiebung wäre diese quasistatische Phase erfolgt?

**Aufgabe 20: De Sitter-Raum** (8 Punkte)

Zeigen Sie, daß sich die durch die de Sitter-Metrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1)$$

$\alpha^2 = 3/\Lambda$ , charakterisierte Raumzeit isometrisch auf den vierdimensionalen Unterraum

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - T^2 = \alpha^2 \quad (2)$$

des  $\mathbb{R}^5$  mit Metrik

$$ds^2 = dT^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - du^2 \quad (3)$$

abbilden läßt.

Anleitung: Ersetzen Sie die euklidischen Koordinaten  $(y, z, u)$  des Einbettungsraums durch die üblichen Polarkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$ . Betrachten Sie dann die Einbettung  $(t, r, \theta, \phi) \mapsto (T, x, r, \theta, \phi)$  mit  $(t, r) \mapsto (T, x)$ ,  $T = \sqrt{\alpha^2 - r^2} \sinh t/\alpha$ ,  $x = \sqrt{\alpha^2 - r^2} \cosh t/\alpha$ , und dem Rest unverändert. Zeichnen Sie im  $(T, x)$ -Diagramm die Kurven  $t = \text{konst.}$  und  $r = \text{konst.}$  ein.

(Bem.: Diese Transformation ist auf  $x \geq |T|$ ,  $x > 0$ , beschränkt, jedoch läßt sich der gesamte Koordinatenbereich analog zum Kruskal-Diagramm durch weitere Transformationen abdecken.)

Abgabe: Mi, 19.12.2007