

11. Übungsblatt zur Quantenmechanik II Wintersemester 2008/09

Aufgabe 26 (Wasserstoffatom)

(6 Punkte)

- a) Beweisen Sie die in der Vorlesung benutzte Beziehung

$$\varphi_{jm_j}^{(+)} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{x}}{r} \varphi_{jm_j}^{(-)},$$

wobei $\varphi_{jm_j}^{(+)}$ und $\varphi_{jm_j}^{(-)}$ die Pauli-Spinoren zu $j = l \pm 1/2$ sind.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\varphi_{jm_j}^{(-)}$ Eigenfunktion von $\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$ ist, und berechnen Sie den Kommutator $[\vec{\sigma} \cdot \vec{L}, \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{x}}{r}]$.

(Ergebnis: $[\vec{\sigma} \cdot \vec{L}, \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{x}}{r}] = \frac{2}{r}(r^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{x})(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) - \vec{\sigma} \cdot \vec{x})$)

- b) Beweisen Sie die in der Vorlesung benutzte Beziehung

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{x})f(r)\phi_{jm_j}^l = -\frac{i}{r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \pm \left(j + \frac{1}{2} \right) \right] f(r)\phi_{jm_j}^l.$$

- c) Berechnen Sie die Grundzustandsspinoren des Wasserstoffatoms aus der Dirac-Gleichung.

Aufgabe 27 (Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld)

(4 Punkte)

Ein geladenes Teilchen bewegt sich in einem homogenen elektromagnetischen Feld $\vec{B} = (0, 0, B)$ und $\vec{E} = (E_0, 0, 0)$. Wählen Sie die Eichung $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ und geben Sie die Energie-Niveaus an, indem Sie von der Klein-Gordon-Gleichung ausgehen.

Abgabe: Mi, 21.1.09