Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

18.11.2008

6. Übungsblatt zur Quantenmechanik II
Wintersemester 2008

Aufgabe 15 (Potentialtopf)
(5 Punkte)

Bestimmen Sie für die gebundenen Zustände des Potentialtopfes

$$V(x) = -\frac{U}{\cosh^2(x/2a)}, \quad U = \frac{\hbar^2\lambda(\lambda-1)}{8ma^2}, \quad \lambda > 0$$

die Eigenwerte. Zeigen Sie zunächst, dass die Eigenfunktionen von der Form

$$u(y) = (1-y)^\delta v(y), \quad y = -\sinh^2(x/2a)$$

sind, wobei $v(y)$ die hypergeometrische Differentialgleichung

$$y(1-y)\frac{d^2v(y)}{dy^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)y]\frac{dv(y)}{dy} - \alpha\beta v(y) = 0$$

erfüllt, welche die linear unabhängigen Lösungen

$$\begin{aligned} v_1(y) &= F_{2,1}(\alpha,\beta,\gamma;y) \\ v_2(y) &= y^{1-\gamma}F_{2,1}(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;y) \end{aligned}$$

besitzt. Leiten Sie mit Hilfe der für große Argumente y gültigen Relation

$$F_{2,1}(\alpha,\beta,\gamma;y) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-y)^{-\alpha} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-y)^{-\beta}$$

die asymptotische Form der Eigenfunktionen ab und finden Sie eine Bedingung aus der die Eigenwerte folgen.
Berechnen Sie den Streuquerschnitt für eine Welle mit positiver Energie und $l = 0$ an diesem Potential für den Fall $\lambda = 3$. Hinweis: Die Relation

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{2z\ln 2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$$

ist beim Vereinfachen der Wellenfunktion hilfreich.

Aufgabe 16 (Coulomb-Potential) (5 Punkte)

Betrachten Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für ein Coulomb-Potential zwischen zwei Ladungen $Z_1 e$ und $-Z_2 e$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}\right)\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}), \quad E > 0.$$

Zeigen Sie, dass sich diese Gleichung durch den Ansatz

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{ikz}\chi(u), \quad u = ik(r-z) =: ikw$$

auf die folgende Form bringen lässt:

$$\left(u\frac{d^2}{du^2} + (1-u)\frac{d}{du} - i\gamma\right)\chi(u) = 0, \quad \gamma k := \frac{Z_1 Z_2 e^2 m}{\hbar^2}, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Untersuchen Sie die Singularitätenstruktur dieser Gleichung im Sinne der Theorie der Differentialgleichungen.

Abgabe: Mi, 26.11.08