Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

9.12.2008

9. Übungsblatt zur Quantenmechanik II

Wintersemester 2008

Aufgabe 22 (Eigenschaften der Gamma-Matrizen) (7 Punkte)

Durch Bildung von Produkten aus den γ^μ kann man 16 linear unabhängige 4×4-Matrizen konstruieren. Diese sind

$$\begin{aligned}\Gamma^S &= \mathbf{1}\\ \Gamma^V_\mu &= \gamma_\mu\\ \Gamma^T_{\mu\nu} &= \sigma_{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\\ \Gamma^A_\mu &= \gamma_5\gamma_\mu\\ \Gamma^P &= \gamma_5\,.\end{aligned}$$

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

1. $(\Gamma^a)^2 = \pm\mathbf{1}$
2. Für jedes Γ^a außer $\Gamma^S = \mathbf{1}$ existiert ein Γ^b, so dass
$$\Gamma^a\Gamma^b = -\Gamma^b\Gamma^a\,.$$
3. Für $a \neq S$ gilt $\mathrm{Tr}(\Gamma^a) = 0$.
4. Zu jedem Paar Γ^a, Γ^b mit $a \neq b$ gibt es ein $\Gamma^c \neq \mathbf{1}$, so dass $\Gamma^a\Gamma^b = \beta\Gamma^c$, $\beta = \pm1, \pm\mathrm{i}$.
5. Die Matrizen Γ^a sind linear unabhängig.
6. Falls eine 4×4 Matrix X mit jedem γ^μ kommutiert, dann ist $X \propto \mathbf{1}$.
7. Gegeben sind zwei Sätze von γ-Matrizen, γ und γ', die beide
$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$
erfüllen. Dann existiert ein nichtsinguläres S
$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1},$$
und S ist eindeutig bis auf einen konstanten Faktor.

Aufgabe 23 (Gordon-Identität) (3 Punkte)

Die Funktion $u(p)$ erfüllt die Dirac-Gleichung im Impulsraum. Zeigen Sie die Identität

$$\bar u(p')\gamma^\mu u(p) = \bar u(p')\left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu - p_\nu)}{2m}\right]u(p)\,.$$

Abgabe: Mi, 17.12.08