Singularitätentheoreme II

Anwendungen in der Kosmologie und für Schwarze Löcher

Handout zum entsprechenden Seminarvortrag am 22.01.2010

Christian Schell
cschell@smail.uni-koeln.de

Inhaltsverzeichnis

1 Singularität und Singularitätentheoreme

Bisher haben wir uns in der Vorlesung zur “Allgemeinen Relativitätstheorie und Kosmologie“ vor allem mit Situationen mit einer hohen Symmetrie wie sphärisch symmetrischem Kollaps und dem homogenen, isotropen Universum (nach dem *kosmologisches Prinzip*) befasst. Bei den *Singularitätentheoremen* geht es um die Frage, was in einer allgemeineren Raumzeit passiert. Führen nichtsphärische Kollapse zu singulären Situationen und was passiert in einem allgemeinerem Universum, in dem die (relativ starke) Annahme der Homogenität und Isotropie fallen gelassen wird?

1.1 Definition einer Singularität

Zuerst müssen wir uns klarmachen, was wir unter einer *Singularität* verstehen wollen (für ausführlichere Diskussion siehe [11]). Intuitiv ist klar, dass eine Singularität angezeigt wird dadurch, dass eine physikalische (z.B. Dichte) oder geometrische (z.B. Krümmung) Größe explodiert und uns quasi um die Ohren fliegt. Diese Definition bringt aber einige Schwierigkeiten mit sich:

- singuläre Punkte gehören per Definition nicht zur Raumzeit, bzw. können aus dieser ausgeschnitten werden, sodass die zurückbleibende Mannigfaltigkeit in jedem Falle regulär ist

- die Charakterisierung von Singularitäten ist schwierig, da z.B. die Divergenzen des Krümmungstensors von einer ungünstigen Wahl der Basis abhängen können und selbst wenn man nur Krümmungsinvarianten nutzt, kann es passieren, dass alle diese Größen verschwinden und trotzdem Singularitäten bleiben ([21]). Dies ist eine Eigenschaft der Lorentzschen Geometrie, in der die Zeitachse eine andere Signatur als die Raumachsen hat

Von daher definiert man Singularitäten über die Unvollständigkeit von Kurven in der Raumzeit (man nimmt normalerweise Geodäten, obwohl es auch Raumzeiten mit vollständigen Geodäten, aber unvollständigen zeitartigen Kurven gibt, siehe [11] oder [15], S. 257f), sozusagen als "Zeiger" auf die "Löcher" in der Raumzeitmannigfaltigkeit. Gewöhnlich werden nur kausale Kurven (zeitartig oder lichtartig) betrachtet, obwohl im Allgemeinen auch raumartige Kurven Singularitäten definieren.
Als minimale Bedingung für eine singularitätenfreie Raumzeit ist daher nach Hawking & Ellis ([15]) zeitartige und lichtartige Geodätenvollständigkeit zu fordern (Hawking & Ellis unterscheiden zwischen metrischer, geodätischer und bündelartiger Vollständigkeit). Von daher benutzen wir folgende Definition von Singularitäten (Zusatz mit eingebettetem Raum aus [16] S.15)

Def Eine Raumzeit ist singulär, wenn in ihr unvollständige zeitartige oder lichtartige Geodäten existieren und sie nicht in eine größere Raumzeit eingebettet werden kann

1.2 Annahme über die Raumzeit in den Theoremen

Wie bei jedem mathematisch zu beweisendem Theorem braucht man gewisse Annahmen (es sei den es handelt sich um logische Wahrheiten). Es gibt viele verschiedene Singularitätentheoreme, man kann aber meist zwischen vier Klassen an Annahmen unterscheiden ([10], S.2)

- Die klassische Raumzeit erfüllt die Einstein-Gleichungen (hier ohne kosmologische Konstante Λ), d.h. es gilt
$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi T_{ab}.$$
Das bedeutet, dass wir im Gültigkeitsbereich der klassischen Allgemeinen Relativität arbeiten

- Es gibt einen Energie-Impuls-Tensor, der gewisse Energiebedingungen erfüllt (s. S. 3) (es gibt allerdings auch Singularitätentheoreme, die ohne Energiebedingung auskommen (s. [6], dort wird die Singularität gezeigt, durch Ausnutzen, dass die inflationäre Phase nicht ewig gedauert haben kann, ohne den Energie-Impuls-Tensor zu gebrauchen)

- "Besondere" physikalische Situationen als Eingangsbedingung wie die Existenz von "gefangenen Oberflächen", wie sie z.B. bei schwarzen Löchern auftreten können oder eine Bedingung an die Entwicklung des Universums, wie einen Zeitpunkt, ab dem das ganze Universum expandiert. Diese Annahme ist notwendig, da es nichtsinguläre exakte Lösungen der Einstein-Gleichungen gibt, wie z.B. bei einem statischen Stern. Allerdings scheint z.B. die Annahme, dass Gravitation stark genug ist, um gewisse Regionen zu fangen, nicht unnatürlich

- kausales Verhalten der Raumzeit, das übersetzt wird in globales topologisches Verhalten wie z.B. ein global hyperbolisches Universum

Def eine offene Menge U heißt *global hyperbolisch*, wenn
(vgl.[15], S. 206 und [16], S. 8, einfachere Definition s.S. 6)
-$\forall$Punkte $p,\ q \in U$: der Schnitt aus Zunkunft von p und Vergangenheit von q kompakt ist und enthalten in U ($I^+(p) \cap I^-(q) \subset U$ und ist kompakt)
-starke Kausalitätsbedingung gilt in U, was bedeutet, dass keine geschlossenen oder fast geschlossenen zeitartigen Kurven in U enthalten sind

Die Annahmen über die kausale Struktur der Raumzeit sind vielleicht die gesichertsten der ganzen Vorraussetzungen. Trotzdem gibt es Theoreme, die ohne diese Bedingung auskommen (s. [15], S. 272). Die Raumzeit sollte so beschaffen sein, dass sie kausales Verhalten zulässt, wir also geschlossene zeitartige Kurven verbieten. Dadurch wird eine globale Zeitrichtung ausgezeichnet. Außerdem brauchen wir die kausale Bedingung, um die Existenz von Geodäten mit maximaler Eigenzeit zwischen zwei Raumzeitpunkten zu sichern, was zu Geodäten ohne Verklumpung führt. Im folgenden untersuchen wir einige *Energiebedingungen*

- **schwache Energiebedingung** $\forall$zeitartige Geodäten ξ^a : $T_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$. Dies besagt, dass die lokale Energiedichte im Ruhesystem nicht negativ ist. Diese Energiebedingung sollte, vom klassischen Gesichtspunkt her, für alle im Universum vorkommende Materie erfüllt sein. Auch gilt dies lokal für den quantenmechanischen Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors. Aus Stetigkeitsgründen folgt diese Bedingung auch für lichtartige Geodäten, wenn wir ξ^a dem Nullvektor annähern

- **gemittelte schwache Energiebedingung** $\forall$zeitartige Geodäten ξ^a : $\int T_{ab}\xi^a\xi^b d\tau \geq 0$, bzw. mit affinem Parameter λ bei lichtartige Geodäten. Diese Energiebedingund ist noch schwächer, da sie der lokalen Energiedichte erlaubt, in einigen Regionen sogar negativ zu sein

- **starke Energiebedingung** $\forall$zeitartige Geodäten ξ^a : $T_{ab}\xi^a\xi^b \geq 1/2\xi^a\xi_a T$, wobei $T = T^c_c$. In einem Bezugssystem, in dem T_{ab} diagonal ist, bedeutet diese Bedingung, dass mit der lokalen Energiedichte ρ und dem lokalen Druck p_i gilt: $\rho + \sum p_i \geq 0$. Die starke Energiebedingung ist, wie der Name schon sagt, stärker und gilt für alle "normale" Materie. Allerdings gibt es Skalarfelder, die diese Bedingung verletzen (siehe dazu [15], S. 95)

- **generische Energiebedingung** ([16], S.14) die starke Energiebedingung gilt und jede zeitartige oder lichtartige Geodäte enthält einen Punkt, an dem $\xi_{[a}R_{b]cd[e}\xi_{f]}\xi^c\xi^d \neq 0$ gilt. Diese Bedingung wird von vielen exakten Lösungen erfüllt, aber von einigen speziellen nicht. Von "normalen", generischen Lösungen sollte die Bedingung allerdings erfüllt werden. Wenn sie gilt, wird jede Geodäte eine gravitativ fokussierte Gegend antreffen

- **dominante Energiebedingung** $\forall$zeitartige Geodäten ξ^a : $T_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$ und $T^{ab}\xi_a$ ist nicht raumartig (siehe [15], S.91ff)

Die *Raychaudhuri-Gleichung* lautet (Herleitung s. z.B. [24])

$$\xi^c\nabla_c\Theta = \frac{d\Theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}\xi^c\xi^d$$

mit der Dilatation Θ, der Scherung σ und der Rotation ω. Wir formulieren die Gleichung als

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = -R_{ab}\xi^a\xi^b + \mathrm{Rest}$$

hierbei wird mit "Rest" der Rest bezeichnet, welcher für rotationsfreie Geodäten nicht positiv ist. Zu der Herleitung dieser Gleichung wurde "keine Physik" benutzt, sondern nur geometrische

Eigenschaften. Erst die positive Energiebedingung in den Einsteingleichung führt zu einem positiven Krümmungstensor. Damit sehen wir auch, dass $\frac{d\Theta}{d\tau} < 0$ gilt, was bedeutet, dass die Geodäten im gravitativen Feld gebündelt werden und somit zur Verklumpung neigen. Dies ist konsistent mit Vorstellung der attraktiven Wirkung der Gravitation.

1.3 Theoreme

Die Singularitätentheoreme werden nun typischerweise formuliert, indem man in einer vernünftigen Raumzeit arbeitet, also mit der Allgemeinen Relativitätstheorie, und dort zum einen eine Energiebedingung annimmt. Diese übersetzt sich mit den Einsteingleichungen in eine positive Krümmungsbedingung und führt zum Zusammenlaufen der Geodäten und "Verklumpung" von Geodätenfamilien. Zum anderen stellen wir Kausalitätsbedingung, die sich in topologische Eigenschaften der Raumzeit wie globale Hyperbolizität oder räumliche Nichtkompaktheit formuliueren lassen. Diese erlauben eine Verbindung von Eigenschaften der Geodätenfamilien mit denen der Raumzeit. Außerdem nehmen wir eine geeignete Eingangs- bzw. Randbedingung an, wie ein überall expandierendes/sich zusammenziehendes Universum (Kosmologie) oder die Existenz von gefangenen Flächen an.
Der Beweis skizziert sich häufig folgendermaßen; die physikalischen Eingangsbedingungen stellen sicher, dass es Geodätenfamilien gibt, die sich aufeinander zu bewegen, wie für gefangene Oberflächen bei Schwarzen Löchern oder im kosmologischen Fall ein Zeitursprung, ab dem alles expandiert oder ein geschlossenes Universum. Die Energiebedingung wird mit der Einsteingleichung in eine Krümmungsbedingung übersetzt, die mit der Raychaudhuri-Gleichung zu einer Fokussierung der Geodäten führt. Mit den Eingangsbedingung folgt, dass dies in endlicher Zeit geschieht. Die kausale Bedingung, übersetzt als topologische Bedingung führt zu Geodäten mit maximaler Eigenzeit und somit zum Nichtvorhandensein von Verklumpungspunkten. Daraus folgert man einen Widerspruch zur Vollständigkeit der Geodäten.
Die Einsteingleichungen, also die Dynamik des Gravitationsfeldes wird eigentlich nur gebraucht, um die Energie- in eine Krümmungsbedingung zu verwandeln.
Mit diesen Theoremen wurde durch Hawking und Penrose in den 1960er Jahren gezeigt, dass, im Rahmen der Gültigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie unter vernünftigen Annahmen, die unser Universum zu beschreiben scheinen, die Existenz von Singularitäten unvermeidbar ist.
Durch die Singularitätentheoreme kann man die Stabilität von Singularitäten, die in symmetrischen Lösungen auftauchen, unter nicht-symmetrischen Störungen sehen (z.B. bei der Schwarzschildgeometrie, siehe [4] §2.2.4). Allerdings sind einige der Vorraussetzungen für die Theorem unter Umständen zu stark. Die stärksten Theoreme (schwächsten Annahmen) zeigen, dass zumindest eine unvollständige Geodäte existiert, sagen allerdings nichts über die generelle Struktur der Raumzeit aus. Es sind auch (nicht ganz realistische) Lösungen, in denen einige Vorraussetzungen erfüllt sind und keine Singularitäten auftreten, bekannt (s. §3). Die Frage ist also, welche Vorrausetzungen man verwenden darf. Beispielsweise ist die Gültigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie an Singularitäten im Prinzip hinfällig.

2 Singularitäten in Kosmologie und in Schwarzen Löchern

Die Singularitätentheoreme verweisen auf zwei verschiedene Arten von Singularitäten. Zum einen verweisen sie auf in der Zukunft liegende Singularitäten, dabei könnte es sich um den Kollaps von Sternen oder anderen massiven Objekten handeln. Diese Singularitäten bedeuten ein Ende der Zeit, zumindestens für die Objekte, die sich auf den unvollständigen Geodäten bewegen. Zum anderen wird eine in der Vergangenheit liegende Singularität vorrausgesagt zu Beginn der

gegenwärtigen Expansion des Universums, also einem *Urknall* oder *Big Bang*.
So wurde in einem frühen Theorem von Penrose 1965 ([18]) gezeigt, dass bei der Existenz von gefangenen Flächen Singularitäten folgen, die sich in der Zukunft befinden. Im selben Jahr entdeckte Hawking ([13]), dass man das Argument von Penrose auch umdrehen, also die zeitgespiegelte Version betracheten kann. Eine umgekehrte gefangene Fläche, die sehr groß sein kann (kosmologische Maßstäbe), führt (zusammen mit Kausalitätsannahmen) zu einer Singularität in der Vergangenheit.
Da der singuläre Punkt per Definition nicht zur Mannigkaltigkeit gehört, können dort die Einsteinschen Feldgleichungen nicht formuliert werden und wir können physikalisch nichts über die Singularität aussagen. Das bedeutet, dass die Allgemeine Relativität in dem Sinne unvollständig ist. Mit der Ursprungssingularität scheint die einzige Möglichkeit umzugehen, indem man eine gemeinsame Theorie der Gravitation und der Quantentheorie beachtet.

2.1 neue Definitionen

Um uns das Verhalten der Singularitäten weiter anzuschauen, führen wir zuerst einige Definitionen ein. Diese sind im Wesentlichen an [24] angelehnt.

Def Eine differenzierbare Kurve $\lambda(t)$ wird *in Zukunft/Vergangenheit gerichtete Kurve* genannt, wenn $\forall p \in \lambda$ die Tangente t^a ein in die Zukunft/Vergangenheit gerichteter Vektor ist, was bedeutet, dass er in der "Zukunftshälfte", bzw. "Vergangenheitshälfte" des Lichtkegels liegt. λ heißt *in Zukunft/Vergangenheit gerichtete kausale Kurve*, wenn $\forall p \in \lambda$ die Tangente t^a entweder in Zukunft/Vergangenheit gerichteter zeitartiger oder lichtartiger Vektor ist

Wir wollen festlegen, was wir unter der Zukunft und Vergangenheit verstehen. Dabei unterscheiden wir zwischen chronologischen (zeitlichen) und kausalen Begriffen.

Def die *chronale Zukunft/Vergangenheit* $I^+/I^-(p)$ eines Punktes p der Raumzeit (M, g_{ab}) ist definiert als $I^+/I^-(p) := \{q \in M | \exists$ in Zukunft/Vergangenheit gerichtete zeitartige Kurve $\lambda(t)$ mit $\lambda(0) = p,\ \lambda(1) = q\}$

Def die *kausale Zukunft/Vergangenheit* $J^+/J^-(p)$ eines Punktes p der Raumzeit (M, g_{ab}) ist definiert als $J^+/J^-(p) := \{q \in M | \exists$ in Zukunft/Vergangenheit gerichtete kausale Kurve $\lambda(t)$ mit $\lambda(0) = p,\ \lambda(1) = q\}$

Def die *chronale/kausale Zukunft/Vergangenheit* $I^\pm,\ J^\pm$ einer Menge an Punkten in M ist die Vereinigung der Zukünfte/Vergangenheiten an den Punkten der Menge

Def eine Untermenge $S \subset M$ heißt *achronal*, falls $\nexists p, q \in S :\ q \in I^+(p)$, d.h. $I^+(S) \cap S = \emptyset$

Def eine Raumzeit (M, g_{ab}) heißt *stark kausal* wenn $\forall p \in M$ und $\forall$Umgebungen O von $p : \exists$Umgebung V von $p \subset O$ s.d. keine kausale Kurve V mehr als ein mal schneidet (wenn (M, g_{ab}) nicht stark kausal ist, kommt sich eine kausale Kurve in Umgebung von p beliebig nahe und schneidet sich selbst)

Def sei S eine geschlossene, achronale Menge (mit Rand möglich). Die *Zukunfts-/Vergangenheitsabhängigkeitsdomäne* von S ist $D^+(S)/D^-(S) := \{p \in M |$jede in Vergangenheit/Zukunft gerichtete, unerweiterbare, kausale Kurve durch p schneidet $S\}$,
die Abhängigkeitsdomäne von S ist $D(S) := D^+(S) \cup D^-(S)$

Def eine geschlossene achronale Menge $\sum$ der Raumzeit (M, g_{ab}), für die $D(\sum) = M$ gilt, heißt *Cauchy-Fläche*

Wir können nun auch eine einfache Definition für eine global hyperbolische Raumzeit geben

Def enthält eine Raumzeit (M, g_{ab}) eine Cauchy-Fläche $\sum$, so heißt sie *global hyperbolisch*

Def für eine geschlossene achronale Menge S ist der Rand der Abhängigkeitsdomäne der *Cauchyhorizont* $H(S) := \dot{D}(S) = H^+(S) \cup H^-(S)$

Def unter einer *Anfangsdatenmenge* verstehen wir ein Tripel $(\sum, h_{ab}, K_{ab})$, wobei $\sum$ eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik h_{ab} ist und K_{ab} ein symmetrisches Tensorfeld, die induzierte äußere Krümmung ist

Häufig will man ein isoliertes System wie beispielsweise einen einzelnen Stern betrachten. In dieser eigentlich natürlich nicht realisierbaren, idealisierten Situation kann dann der Einfluss von weit entfernter Materie und der kosmologischen Krümmung vernachlässigt werden. Wir suchen also eine asymptotisch flache Raumzeit, d.h. die Gravitation soll bei großen Distanzen verschwinden. Allerdings ist dies in der Allgemeinen Relativität nicht ganz so einfach. Wir haben keine flache Hintergrundmetrik η_{ab}, womit der Abfall von der realen, physikalischen Metrik g_{ab} bestimmt werden könnte, wir haben also kein natürlisches globales Koordinatensystem um z.B. die Radialkomponente r für die Abfallraten zu beschreiben. Wir suchen also eine präzise Vorstellung von asymptotischer Flachheit und ein Verständnis von Grenzverhalten $r \to \infty$.
Wir führen in die reale, physikalische Raumzeit angenäherte Grenzen, "Punkte an Unendlich" ein und schaffen damit eine ünphysikalische" Raumzeit (M, g_{ab}). Eine präzise Definition von asymptotisch flach kann dann so formuliert werden (vgl. [24])

Def eine Anfangsdatenmenge $(\sum, h_{ab}, K_{ab})$ heißt *asymptotisch flach*, wenn $\exists\tilde{\sum}$, s.d.
- $\exists$ "Punkt an Unendlich" $\Lambda \in \tilde{\sum}$: $\exists$konforme Isometrie $\Psi : \sum \to (\tilde{\sum} \setminus \Lambda)$ mit $\tilde{h}_{ab} = \Omega^2 \Psi^* h_{ab}$ auf $(\tilde{\sum} \setminus \Lambda)$
- $\Omega \in C^2$ an Λ und C^∞ sonst auf $\tilde{\sum}$, solange $\tilde{h}_{ab} \in C^{>0}$ an Λ und C^∞ sonst auf $\sum$
- $\Omega(\Lambda) = 0$ und $\lim_\Lambda \tilde{D}_a \Omega = 0$ während $\Omega^{-1}(\tilde{D}_a \tilde{D}_b \Omega - 2\tilde{h}_{ab})$ einen endlichen, richtungsabhängigen Grenzwert an Λ annähert, an dem $\tilde{D}_a$ der Ableitungsoperator assoziiert mit h_{ab} ist
- der "unphysikalische" Ricci-Tensor ${}^{(3)}R_{ab}$ und $\Psi^* K_{ab}$ haben angemessenes Grenzverhalten an Λ, d.h. $\Omega^{1/2}\ {}^{(3)}R_{ab}$ und $\Omega \Psi^* K_{ab}$ gehen gegen endliche, richtungsabhängige Grenzwerte an Λ

2.2 kosmische Zensur

Für die zukünftigen Singularitäten scheint es eine besondere Eigenschaft zu geben, die (von Penrose) *kosmische Zensur* genannt wurde. Dies besagt, dass die Natur nackte Singularitäten verabscheut. Man kann also demnach nicht z.B. die Singularität eines schwarzen Loches beobachten. Der Zusammenbruch der Theorie wirkt sich also (klassisch gesehen) nicht auf den Außenraum aus.
Um die Vermutung der kosmischen Zensur genauer zu fassen, definieren wir uns zunächst, was wir unter einem *Schwarzen Loch* verstehen wollen, der Gegend, die so etwas wie eine "Region ohne Entkommen" darstellen soll.

Def sei (M, g_{ab}) eine asymptotisch flache Raumzeit mit assoziierter "unphysikalischer" Raumzeit $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$. (M, g_{ab}) heißt *stark asymptotisch vorhersagbar*, wenn $\exists$ Region $\tilde{V} \subset \tilde{M}$ mit $\overline{M \cap J^-(\mathcal{I}^+)} \subset \tilde{V} : (\tilde{V}, \tilde{g}_{ab})$ global hyperbolisch. Eine stark asymptotisch vorhersagbare Raumzeit (M, g_{ab}) enthalte ein *Schwarzes Loch*, wenn M nicht in $J^-(\mathcal{I}^+)$. Die *Schwarz-Loch-Region* B ist definiert als $B := M \backslash J^-(\mathcal{I}^+)$. $H := \partial B = \dot{J}^-(\mathcal{I}^+) \cap M$ ist der *Ereignishorizont*. Eine asymptotisch flache Raumzeit, die nicht stark asymptotisch vorhersagbar ist, besitzt *nackte Singularitäten*

Das bedeutet, dass *keine* Singularität in $(M \cap \tilde{V}) \supset (M \cap \overline{J^-(\mathcal{I}^+)})$ von einem Beobachter gesehen werden kann, ausgenommen wird hier eine Anfangssingularität wie z.B. ein Weißes Loch.
Ein *weißes Loch* kann analog definiert werden, indem $J^-(\mathcal{I}^+)$ durch $J^+(\mathcal{I}^-)$ ersetzt wird. Es ist zu erwähnen, dass unsere Definition einer stark asymptotisch vorhersagbaren Raumzeit (kommt aus [24]) von der Definition von Ellis & Hawking ([15]) abweicht, da wir eine andere Notation der asymptotischen Flachheit verwenden.
Existieren in einer Raumzeit Singularitäten, bedeutet dies nicht, dass Schwarze Löcher existieren, da Singularitäten nackt sein können, d.h. die Raumzeit nicht stark asymptotisch vorhersagbar sein muss. Wenden wir uns nun der Vermutung zu, dass wir keine solchen nackten Singularitäten, wie sie in Schwarzen Löchern vorkommen sollten, beobachten können. Dies kann wie folgt formuliert werden.

Kosmische Zensur (Vermutung, schwache Version) Sei $(\sum, h_{ab}, K_{ab})$ eine asymptotisch flache Anfangsdatenmenge für die Einsteingleichungen mit einer vollständigen Riemann-Mannigfaltigkeit $(\sum, h_{ab})$. T_{ab} erfülle eine Energiebedingung und die Einsteingleichungen als quasilineares, diagonales, hyperbolisches System zweiter Ordnung. Außerdem erfüllen die Anfangsdaten des Materiefeldes auf $\sum$ geeignete asymptotische Abfallbedingungen bei der räumlichen Unendlichkeit. Dann, so die Vermutung, ist die maximale Cauchy-Entwicklung dieser Anfangsbedingungen eine asymptotisch flache, stark asymptotisch vorhersagbare Raumzeit.

Etwas anschaulicher formuliert besagt die Vermutung, dass der gravitative Kollaps eines Körpers immer zu Schwarzen Löchern und nicht zu nackten Singularitäten führt, was bedeutet, dass alle durch den gravitativen Kollaps entstandenen Singularitäten versteckt sind in Schwarzen Löchern und demnach nicht von entfernten Beobachtern gesehen werden können.
Penrose schlägt 1979 eine stärkere Version der Vermutung vor. Als einzige Bedingung an T_{ab} stellt er die Energiebedingung. Wenn die maximale Cauchyentwicklung der Anfangsdaten erweiterbar ist, dann soll $\underline{\forall p \in H^+(\sum)}$ in jeder Erweiterung entweder die starke Kausalität an p zusammenbrechen oder $\widehat{I^+(p)\sum}$ nicht kompakt sein.
Davon können wir uns wieder eine physikalischere Formulierung anschauen. Die starke Vermutung besagt, dass alle physikalisch vernünftigen Raumzeiten global hyperbolisch sind, d.h. abgesehen von einer Anfangssingularität (Urknall) keine Singularitäten jemals für einen Beobachter sichtbar werden.
Diese Formulierung ist stärker als die erste Vermutung, da sie auf alle Beobachter, nicht nur auf weit entfernte in asymptotisch flacher Raumzeit zutrifft.
Es ist meines Wissens nicht bewiesen, ob die kosmische Zensur wirklich wahr ist. (s. dazu auch [16], S.32-34), jedenfalls ist sie nach Wald "the key unresolved issue in the theory of gravitational collapse" ([24], S. 303). Sie scheint unter Einbeziehung der Quantenmechanik verletzt zu sein, wie das Verdampfen Schwarzer Löcher zeigt.

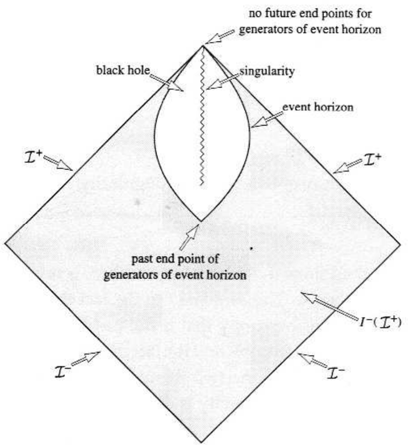

Abbildung 1: Ein kollabierender Stern, eingebettet in eine Mannigfaltigkeit mit Rand (aus [16])

2.3 Ende?

Die folgenden Betrachtungen sind nur in klassischen Fall zutreffend. In den Standardmodellen der Kosmologie (Friedman, Lemaître, Robertson, Walker; FLRW) hat der Urknall verschwindenden (bzw. nahe bei 0 liegenden) Weyl-Tensor (für Dimension $n \geq 3$)

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{2}{n-2}(g_{a[d}R_{c]b} + g_{b[c}R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{a[c}g_{d]b},$$

der die Gezeitenkräfte eines sich auf einer Geodäte bewegenden Körpers beschreibt.
Es gibt auch Betrachtungen zum umgekehrten Fall, nämlich dass ein Universum mit Anfangssingularität von konform regulärem Typ mit verschwindendem Weyl-Tensor und einigen geeigneten Zustandsgleichungen ein FLRW-Universum sein muss (s. [17]).
Auf der anderen Seite haben Schwarze (und falls sie existieren Weiße) Löcher im Normalfall divergierenden Weyltensor (bzw. dieser nimmt sehr große Werte an). Allerdings muss man mit Weißen Löchern vorsichtig sein, da sie dem zweiten Haupsatz der Thermodynamik widersprechen ([16]). Daher formulieren wir die (phänomenologische)

Weylsche Krümmunghypothese
-Anfangssingularitäten müssen verschwindenden (oder sehr kleinen) Weyl-Tensor haben
-Endsingularitäten haben keine solche Einschränkung

Das bedeutet, das Universum hat mit einem Urknall (Big Bang) begonnen und hat zwei wesentliche Möglichkeiten, zu "enden". Im offenen Universum haben die entstehenden Schwarzen Löcher divergierenden Weyl-Tensor, im geschlossenen Fall würde der Weyl-Tensor für die Endsingularität auch divergieren und das Universum würde in einem Endknall (Big Crunch) enden (siehe Abb. 2). Durch diese Vermutung könnte auch eine Richtung der Zeit festgelegt werden ([16]). Die Wahrscheinlichkeit, dass eine solch spezieller Anfangszustand vorlag, ist, im Vergleich zu einem anderen Anfangszustand etwa

$$1 \text{ zu } 10^{10^{123}}, ([16])$$

Das bedeutet, dieser Zustand besitzt eine viel geringere Entropie und das Universum entwickelt sich von einem Zustand niedriger Entropie zu einem mit höherer. Weiterführende Theorien könnten eventuell einen Grund für die Zeit-Asymmetrie liefern, z.B. die Weylsche Krümmungshyphothese bestätigen.
Als mögliche Endszenarien seien hier nur fünf Varianten genannt

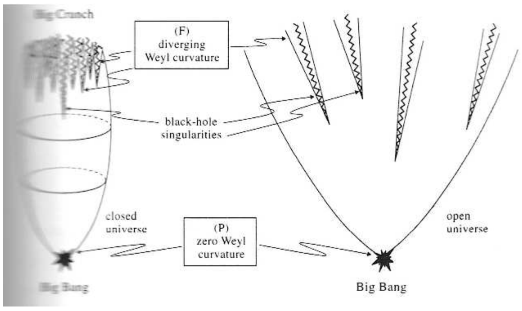

Abbildung 2: zur Weylschen Krümmungshyphothese (aus [16])

- *big crunch*: dies ist sozusagen das Gegenstück zum big bang am Anfang des Universums. Das Universum wird sich im Laufe der Zeit immer mehr zusammenziehen und demnach in einem *Endknall*, in dem wieder alle Materie in einem Punkt singulär vereinigt ist, vergehen
- *big freeze/whimper*: hierbei handelt es sich um eine ewige Expansion, allerdings bleibt die Größe und Dichte "lokaler Objekte" (Menschen, Sterne, Galaxien etc.) erst mal konstant, die Gravitation gleicht das "Enstehen des neuen Raums" durch die Expansion aus. Allerdings wandelt sich die Materie in Strahlung um im Laufe der Zeit bis dann in, je nach Schätzung $10^{150} \dots 10^{1000}$ Jahren alle Protonen zerstrahlt sind (!) und jegliche Strahlung soweit ausgedünnt ist, dass die Temperatur des Kosmos bei etwa $0K$ liegt
- *big rip*: in diesem hyphotetischem Modell stoppt wie beim big freeze die Expansion des Universums nie, sondern steigt sogar irgendwann exponentiell an ($\rightarrow$ "Endknall"). Dadurch werden auch die "lokalen Objekte" immer weiter ausgedünnt, so dass die Dichte und Temperatur bei gleichbleibender Masse abnehmen. Wächst der Raum je Zeiteinheit irgendwann so schnell, dass ihn Teilchen auch mit Lichtgeschwindigkeit nicht durchqueren können, so steigt sogar das Volumen von Schwarzen Löchern, deren Dichte nimmt ab und sie zerfallen. Es ergibt sich der (etwas traurige) Endzustand, dass jedes "Elementarteilchen" für sich selbst existiert und keine Wechselwirkung mit anderen Teilchen eingehen kann. Zusammenfassend sagt man, der Skalenfaktor divergiert gegen $+\infty$ in endlicher Zeit
- *big brake*: in diesem Modell bleibt der Skalenfaktor und dessen erste zeitliche Ableitung endlich (und damit der Hubble-Parameter $H = \dot{a}/a$ regulär), allerdings divergiert die Ableitung von H (und damit die zweite Ableitung des Skalenfaktor, also dessen Beschleunigung) und damit eine Krümmungsinvariante (s. dazu [12]). Das bedeutet, die Entwicklung des Universums hört in einer endlichen Zeit abrupt auf. In [12] wird dies in Abhängigkeit eines Tachyonenfeldes (überlichtschnelle, hyphotetische Elementarteilchen) diskutiert
- *big bounce*: dadurch wird ein zyklisches, oszillierendes Universum beschrieben, d.h. der Urknall wird als Ergebnis eines früheren kollabierenden Universums gesehen. Wir brauchen also nach einem big bang einen big chrunch, der wieder von einem big bang gefolgt wird usw. um von einem big bounce reden zu können. Natürlich widerspricht diese Möglichkeit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik

3 Singularitätenfreie Raumzeit

Man könnte nun meinen, die Singularitätentheoreme verbieten im Allgemeinen Raumzeiten ohne Singularitäten. Dies stimmt so allerdings nicht. Es lassen sich durchaus viele vernünftige Raumzeiten konstruieren, auf die die Singularitätentheoreme nicht anwendbar sind. Einige gehören zu

räumlich inhomogenen Universen, andere enthalten eine kosmologische Konstante und es gibt weitere Beispiele (siehe dazu [20], Paragraph 7).
Wir wollen hier ein Beispiel einer zylindersymmetrischen Raumzeit untersuchen (aus [7], das ganze Beispiel ist auch in aller Kürze diskutiert in [8]). In Zylinderkoordinaten nehmen wir für das Linienelement folgende Form an

$$ds^2 = \cosh^4(act)\cosh^2(3ar)(-c^2dt^2 + dr^2) + \frac{1}{9a^2}\cosh^4(act)\cosh^{-2/3}(3ar)d\Phi^2 +$$

$$\cosh^{-2}(act)\cosh^{-2/3}(3ar)dz^2$$

wobei $a = \text{const} > 0$ ist. Dies ist eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für $\Lambda = 0$ und einem Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + p(g_{ab} + u_a u_b)$$

mit der Energiedichte der Flüssigkeit

$$\frac{8\pi G}{c^4}\rho = 15a^2\cosh^{-4}(act)\cosh^{-4}(3ar)$$

und dem isotropen Druck p. Das Einheits-Geschwindigkeits-Vektorfeld der Flüssigkeit ist

$$u_a = (-c\cosh^2(act)\cosh(3ar), 0, 0, 0)$$

Es ist i.A. keine Geodäte. Die Flüssigkeit erfülle die realistische Gleichung $\rho = 3p$ (beschreibt strahlungsdominiertes Universum, kann also für die frühe Phase des Universums benutzt werden). Es kann gezeigt werden, dass diese Raumzeit Geodäten-vollständig und damit frei von Singularitäten ist (siehe [7], Paragraph 2).
Die Raumzeit erfüllt die starke Kausalitätsbedingung, was bedeutet, dass sie global hyperbolisch ist und ebenso die dominante Energiebedingung. Berechnen wir die Divergenz der Geschwindigkeit, ergibt dies

$$\nabla_a u^a = 3a\frac{\sinh(act)}{\cosh^3(act)\cosh(3ar)}$$

Also wird die Geschichte des Universums in zwei Hälften geteilt, eine kontahierende Phase ($t < 0$) und eine expandierende ($t > 0$). Im letzten Fall folgern wir, dass das Universum dann *überall* expandierend ist. Dies war allerdings eine mögliche äußere Bedingung. Warum kann also dieses Modell singularitätenfrei sein?
Die Auflösung des scheinbaren Wiederspruchs zu den Singularitätentheoremen ist, dass die exakte Bedingung eines Theorems mit global hyperbolischer Raumzeit impliziert, dass $\nabla_a u^a > b(=\text{const}) > 0$ gelten soll, dass also $\nabla_a u^a$ von unten begrenzt ist durch eine positive Konstante. Dies ist in unserem Fall allerdings nicht zutreffend, da sinh für $t = 0$ auch 0 ergibt. Dieser winzige Unterschied erlaubt es unserem Modell frei von Singularitäten zu sein.
Der Widerspruch zum Theorem von Penrose ([18], *Theorem* 9.5.3 in [24], S. 239f) ergibt sich wie folgt. Wir wissen bereits, dass die Lösung lichtartig Geodäten-vollständig ist (singularitätenfrei), global hyperbolisch ist und dass die starke Energiebedingung gilt. Da das Theorem natürlich gültig ist, darf unser Beispiel keine gefangene Oberflächen besitzen. Rechnungen ergeben, dass diese wirklich nicht existieren. Somit ist in dieser Lösung die Gravitation "nicht stark genug" um Regionen, wie Schwarze Löcher zu erzeugen.
Auch interessant ist, das Theorem von Hawking und Penrose ([14], *Theorem* 2 in [15], S. 266f, oder *Theorem* 9.5.4 in [24], S. 240f) zu betrachten. Die generische Energiebedingung gilt und auch die starke Energiebedingung (daraus folgt $R_{ab}v^a v^b \geq 0$) und die chronologische Bedingung

(d.h. es existieren keine geschlossenen zeitartigen Kurven) sind erfüllt. Also darf, da die Raumzeit Geodäten-vollständig ist, keine der drei alternativen Bedingungen gelten. Da wir schon wissen, dass wir keine geschlossenen gefangenen Flächen haben, müssen wir nur die anderen beiden Bedingungen untersuchen.
Die Existenz eines Punktes q, so dass auf *jeder* in Vergangenheit (Zukunft) gerichteten lichtartige Geodäte von q aus, die Expansion Θ der lichtartigen Geodäten negativ wird (d.h. dass die lichtartigen Geodäten von q durch Materie oder Krümmung fokussieren und dann wieder auseinanderlaufen). Die Nichtexistenz kann gezeigt werden, indem man zwei Geodätenfamilien betrachtet. Die radialen lichtartigen Geodäten durch jeden Punkt der Mannigfaltigkeit divergieren aber in der Zukunft (Vergangenheit), wenn sie hinauslaufend (hineinlaufend) sind, so dass Θ nicht negativ sein kann.
Auch die dritte Bedingung, die Annahme einer Existenz einer kompakten achronalen Menge ohne Rand (d.h. dass (M, g_{ab}) ein geschlossenens Universum darstellt) kann zu einem Widerspruch gebracht werden.
Dieses Beispiel zeigt uns, dass sehr wohl vernünftige klassische überall expandierende Modelle existieren, die die Kausalitäts- und Energiebedingungen erfüllen und trotzdem singularitätenfrei sind. Damit ist auch die Wichtigkeit der "Eingangsbedingung", also der physikalischen Annahme über die Raumzeit, unterstrichen.
Dieses Modell trifft leider nicht auf die wirkliche Beschreibung unseres Universums zu, z.B. kann die hohe Isotropie der Hintergrundstrahlung nicht erklärt werden. Allerdings ist die Frage offen, ob klassische *realistische* Universen konstruiert werden können, auf die die Singularitätentheoreme nicht anwendbar sind und deren Geodäten vollständig sind.
Um dieser Frage weiter auf den Grund zu gehen, haben u.a. Raychaudhuri ([19]) und Senovilla([22]) versucht, die besondere physikalische Bedingung durch räumliche Bedingungen an die Mittelwerte bestimmter Größen zu ersetzen. Dabei ergibt sich z.B., dass in Modellen, die Kausalitäts- und Energiebedingung und nichtverschwindende kosmologische Konstante aufweisen, nur die Bedingungen an räumliche Mittelwerte ausreichen, damit *alle* in Vergangenheit gerichtete zeitartigen Geodäten unvollständig sind.

4 Probleme und Auswege

Das Auftreten von Singularitäten bereitet einem Schwierigkeiten, da sie unter geeigneten Annahmen aus der Gültigkeit der Allgemeinen Relativität zu folgen scheinen, allerdings gleichzeitig das Versagen der Theorie an der Stelle ankündigen. Man könnte daher vermuten, dass der Existenzbeweis von Singularitäten nur ein Artefakt einer unvollständigen Theorie ist. Der Zusammenbruch der Theorie macht es notwendig, sich mit weiterführenden Theorien beschäftigen und zu schauen, was dann mit den Singularitäten passiert.
Ein weiterer ungeklärter Punkt ist, was mit der Materie an der Singularität passiert, z.B. wenn sie in ein schwarzes Loch fällt und die Singularität erreicht. Wird sie dort als "singuläre Materie" erscheinen? Im Rahmen der Allgemeinen Relativität verliert Materie an der Singularität ihre Materieeigenschaften, sonder existiert als "Masse ohne Materie". Dies wird zumindest vom *No-Hair-Theorem* nahegelegt.

4.1 Quantenmechanik

Um einen Einblick in die Schwierigkeiten zu bekommen, die bei der Einbeziehung der Quantenmechanik in die Theorie entstehen, schauen wir uns zunächst den "semiklassischen" Fall an, dass wir Elemente der Quantenmechanik in unsere Theorie aufnehmen.

4.1.1 Verletzung der Energiebedingung

Über die Heisenbergsche Energieunschärfe ist klar, dass quantenmechanische Effekte die klassische Energieerhaltung verletzt. Betrachten wir den *Casimireffekt* (es befinden sich zwei Platten im elektromagnetischen Vakuum), bekommen wir negative lokale Energiedichten, die zu einer anziehenden Wirkung zwischen den Platten führt. Dies widerspricht der schwachen Energiebedingung und sogar der gemittelten schwachen Energiebedingung (obwohl dies für lichtartigen Geodäten doch erfüllt zu sein scheint).
Eine zweite Möglichkeit, in der Quantenmechanik negative Energiedichten erzeugen kann, besteht in Kohärenzeffekten, z.B. in einer bosonischen Feldtheorie (siehe [10]).
Die Frage, ob diese Verletztungen der Energiebedingung nutzen lassen, um die Singularitäten der klassischen Physik zu umgehen, konnte in einigen Fällen positiv beantwortet werden. Es konnte z.B. schon in den 70er Jahren eine nichtsinguläre Kosmologie betrieben werden unter Benutzung des quantenmechanischen Kohärenzeffektes um die Anfangssingularität zu vermeiden. Das Universum prallt an einer endlichen Krümmung zurück (sogar weit entfernt von der Größe der Planckskala) und vermeidet somit die Krümmungssingularität.
Allerdings wird dadurch nur gezeigt, dass es Situationen gibt, in denen Singularitäten vermieden werden können. Es wird keine Aussage über die Notwendigkeit der Vermeidung der Singularität ausgesagt. Die Situation mit Schwarz-Loch-Singularitäten scheint auch wesentlich schwieriger zu sein. Außerdem ist zu erwähnen, dass es sich hierbei um eine semiklassische Theorie handelt, in der zwar das Materiefeld, nicht jedoch die Gravitation quantisiert wird.

4.1.2 Quantenfluktuationen der Raumzeit-Geometrie

Es gibt zwei Ursachen für Fluktuationen der Raumzeit, die sich auf der Größenordnung der Planckskala abspielen sollten. Zum einen entstehen sie, wenn das Gravitationsfeld als Quantenfeld behandelt wird, zum anderen, wenn der Energie-Impuls-Tensor für ein quantisiertes Materiefeld aufgestellt wird. Selbst wenn die Gravitation nicht quantenmechanisch beschrieben wird, führen Fluktuationen der lokalen Energiedichte zu Fluktuationen des Gravitationsfeldes.
Durch diese Effekte ist die Gültigkeit der Einsteinschen Gleichungen in der klassischen Raumzeit nicht mehr streng erfüllt. Lichtkegel fokussieren nicht mehr präzise an einem Punkt sondern sind verwaschen. Dies kann behandelt werden, indem die Raychaudhuri-Gleichung in eine Langevin-Gleichung mit flukturierendem Ricci-Tensor umgewandelt wird (s. [10]).

4.2 chronologisches Verhalten

Wie aus den Theoremen ersichtlich wird, müssen wir ein gewisses chronologisches Verhalten der Raumzeit zusätzlich postulieren, um über die Übersetzung in topologische Raumeigenschaften die Defokussierung im Beweis zu erreichen. Offenbar bekommen wir diese Eigenschaft nicht geschenkt. So wurde in den 60er Jahren auch überlegt, ob die Singularitätentheoreme nicht die Existenz einer Singularität, sondern das akausale Verhalten der Raumzeit beweist.
Die Einsteingleichungen machen nur lokale Aussagen ohne Einschränkung über das globale Raumzeitverhalten. So existieren exakte Lösungen der Einsteingleichungen ($\rightarrow$ *Gödel-Universum*), die lokal physikalisch Sinn machen nur global unserem Kausalitätsverständnis wiedersprechen und experimentell falsifiziert sind. So existieren dort geschlossene zeitartige Kurven was zu Paradoxien wie einem Effekt, der seine eigene Ursache ist, führt. Der Wunsch besteht also, diese *Chronologie-Schutz-Vermutung* nicht zusätzlich fordern zu müssen, sondern aus der Theorie automatisch zu erhalten.
Ein Beweis wie von Stephen Hawking, der einen starken experimentellen Hinweis für die Richtigkeit der Vermutung in der Tatsache sieht, dass wir noch nicht von Horden an Touristen aus der

Zukunft überschwemmt wurden, reicht hier nicht aus. Semiklassische Argumente versagen hier bislang als Erklärung (vgl. [23]), evtl. können weiterführende Theorien mehr Aufschluss geben.

4.3 Quantengravitation

Hier wird versucht, nicht die Quantenmechanik semiklassisch in eine Hintergrundwelt zu bekommen, sondern direkt den Raum zu quantisieren. In der *Schleifen-Quantengravitation* (*loop-quantum gravity*, LQG) wird der Raum nicht als kontinuierliches Konstrukt in der Raumzeit gesehen, sondern der Raum ändert seine Größe in kleinsten Sprüngen (auf der Größenskala der Plancklänge).
Die LQG liefert einem Gleichungen, die es einem im Prinzip erlauben sollte, um von einem gegebenen Zustand an gequantelten Raumzeitelementen auf einen Anfangszustand zurückzurechnen. Sollte dies gelingen, so wäre es prinzipiell möglich, das Universum in einem Zustand wie in der Urknallsingularität zu berechnen und die mögliche Existenz einer solchen Singularität zu überprüfen.
In der Allgemeinen Relativität weiß man seit der exakten Schwarzschildlösung von der Existenz einer Singularität (auch wenn sie von einigen wie z.B. Einstein selbst nicht gemocht wurde) in einem homogenen und isotropen, also hochgradig symmetrischem Universum. Dank der Singularitätentheoreme ist die Existenz von Singularitäten in der klassischen Relativität für eine allgemeine Raumzeit gesichert. In der LQG-Kosmologie werden ähnlich wie in der Kosmologie der Allgemeinen Relativität starke Symmetrieannahmen durchgeführt, die die komlizierten Gleichungen etwas vereinfachen.
Betrachten wir ein solches symmetrisches Universum und blicken zu dessen Beginn, so wird der Raum, der bis dahin expandiert ist, immer kleiner. Das bedeutet, wir entfernen aus dem Raumkonstrukt aus quantisiertem Volumen immer mehr Raumelemente. Dadurch ergeben sich in der LQG diskrete Differenzengleichungen statt kontinuierliche Differentialgleichungen, die allerdings auch sehr schwierig zu behandeln sind. Die Frage, ob die LQG das Universum vor einer Singularität bewahren kann, ähnlich wie die Quantenmechanik das Wasserstoff vor der Zerstrahlung bewahrt hat, konnte durch Bojowald positiv beantwortet werden (s. [1], [2], [4], s. auch [5]).
Nahe eines Urknalls wird das Universum immer heißer und befindet sich immer näher am Zusammenbruch. Die Allgemeine Relativität behandelt die Raumzeit dort weiterhin kontinuierlich und bricht dort in der Singularität zusammen. In der LQG wird mehr Sorge um die genaue Form der Schrittweite der Zeiteinheit getragen. Betrachtet man den diskretisierten Skalenfaktor, so wird der Wert $a \equiv 0$ nicht angenommen und man kommt so über den Urknall hinaus, die Zeit endet (bzw. beginnt) am Urknall nicht. Es gibt also in der LQG im Gegensatz zur Allgemeinen Relativität einen früheren Zeitpunkt als den Urknall. Als interessante Tatsache stellt sich heraus, dass das Universum vor dem Urknall expandiert (in negativer Zeitrichtung gesehen, also kontahiert) und sich dort die Raumrichtungen umkehren.
Auch für die Singularitäten in Schwarzen Löchern hat Bojowald gezeigt, dass sie in der LQG nicht auftreten (s. [3]). Die neue Frage ist nun aber, ob das Innere des Schwarzen Loches nach der Singularität mit dem Äußeren verbunden ist oder nicht, bzw. anders formuliert: wird die Masse des Schwarzen Loches wieder freigegeben oder zweigt sich evtl. ein Tochteruniversum im Schwarzen Loch ab (s. Abb 3)?
Laut Bojowald ([5], S. 241) gibt es Hinweise, dass eine vollständige Theorie keine Abzweigung in ein Tochteruniversum vorsieht. Singularitätenvermeidung tritt in vielen Fällen von Quantenhyperbolizität (Definition bei [4], §3.4) auf, was den allgemeinsten Mechanismus für nichtsingularitäres Verhalten darstellt.

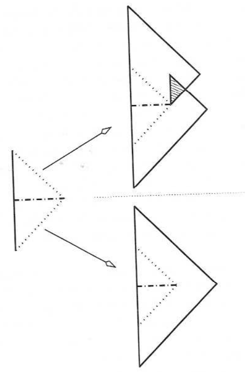

Abbildung 3: zu den zwei Möglichkeiten, das singularitätenfreie Innere mit dem Äußeren zu verbinden (aus [5])

4.4 Stringtheorie

Auch die *Stringtheorie* stellt eine Theorie dar, die bei kleinen Krümmungen und niedrige Energien in die Allgemeine Relativität übergeht und für die Quantentheorie zugänglich ist. Statt der klassischen Punktteilchen werden eindimensionale Strings (oder höherdimensionale Branen) als elementare Objekte gedeutet. Gravitative Anregungen werden auf einer gegebenen Hintergrundraumzeit beschrieben. Die Raumzeit selbst mit in die Theorie zu integrieren, was für das Verständnis der Singularitäten nötig wäre, ist weit schwieriger, wird aber wohl aktuell diskutiert (s. [9] für mehr Details).
In der Stringtheorie werden die Geodäten durch "Welt-Volumen" von Teststrings bzw. -branen ersetzt, die den klassischen Geodäten folgen und die Unvollständigkeit dieser Untermannigfaltigkeiten würde dann eine Singularität ankündigen.

Literatur

[1] Bojowald, M., Initial Conditions for a Universe, 2003 [arXiv:gr-qc/0305069v1]

[2] Bojowald, M., Quantum Gravity and the Big Bang, 2003 [arXiv:astro-ph/0309478v1]

[3] Bojowald, M., Nonsingular Black Holes and degrees of freedom in Quantum Gravity, 2005 [arXiv:gr-qc/0506128v1]

[4] Bojowald, M., Singularities and Quantum Gravity, 2007 [arXiv:gr-qc/0702144v1]

[5] Bojowald, M., Zurück vor den Urknall, 3.Aufl., Fischer Verlag, Frankfurt 2009

[6] Borde, A., Guth, A., Vilenkin, A., Inflationary spacetimes are not past-complete, 2003 [arXiv:gr-qc/0110012v2]

[7] Chinea, F.J., Fernández-Jambrina, Senovilla, J., Singularity-free space-times, Phys. Rev. D **45**, 481-486, 1992

[8] Chinea, F.J., Fernández-Jambrina, Senovilla, J., Absence of singularities in a cosmological perfect fluid solution, 2009 [arXiv:0906.4480v1 [gr-qc]]

[9] Craps, B., Big Bang Models in String Theory, 2006 [arXiv:hep-th/0605199v2]

[10] Ford, L.H. The Classical Singularity Theorems and their Quantum Loopholes 2003 [arXiv:gr-qc/0301045v1]

[11] Geroch, R., What is a Singularity in General Relativity, Ann. Phys., **48**, 526-540, 1968

[12] Gorini, V., Tachyons, scalar fields, and cosmology, Phys. Rev. D **69**, 123512, 2004

[13] Hawking, S., Occurrence of singularities in open universe, Phys. Rev. Lett. **15**, 689-690, 1965

[14] Hawking, S., Penrose, R., The singularities of gravitational colapse and cosmology, Proc. Roy. Soc. London **A314**, 529-548

[15] Hawking, S., Ellis, G., The large scale structure of space-time, Cambridge University Press, Cambridge 1973

[16] Hawking, S., Penrose, R., The Nature of Space and Time, Princeton University Press, Princeton 1996, teilweise (Teil von Hawking) auch über [arXiv:hep-th/9409195v1]

[17] Newman, R., On the structure of conformal singularities in classical general relativity, Proc. Roy. Soc. London **A443**, 473-492

[18] Penrose, R., Gravitational Collapse and Space-Time Singularities, Phys. Rev. Lett., **10**, 66-68, 1965

[19] Raychaudhuri, A., A new singularity theorem in relativistic cosmology, 2000 [arXiv:gr-qc/0002041v1]

[20] Senovilla, J., Singularity Theorems and Their Consequences, General Relativity and Gravitation, **30**, 701-848, 1998

[21] Senovilla, J., Singularity Theorems in General Relativity: Achievements and Open Questions, 2006 [arXiv:physics/0605007v1 [physics.hist-ph]]

[22] Senovilla, J., A New Type of Singularity Theorem, 2007 [arXiv:0712.1428v1 [gr-qc]]

[23] Visser, M., The quantum physics of chronology protection in Gibbons, G.W., Shellard, E.P.S., Rankin, S.J., The Future of Theoretical Physics and Cosmology, 3rd edition, Cambridge University Press, Cambridge 2009

[24] Wald, R., General Relativity, Chicago University Press, Chicago, 1984