Wie Einstein seine Feldgleichungen fand

Johannes Neidhart

5. November 2009

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Nachdem Albert Einstein 1912 Gravitation in Verbindung mit der Gauß'schen Theorie gekrümmter Flächen brachte, brauchte er drei Jahre, um die Feldgleichungen seiner Allgemeine Relativitätstheorie veröffentlichen zu können. Erstaunlicherweise arbeitete er den Großteil dieser Zeit in eine falsche Richtung. Um einen Einblick zu geben, wie aufgrund weniger falscher Annahmen die Entstehungszeit seiner Gleichungen vervielfacht wurde und warum das seinen Erfolg dennoch nicht mindert möchte ich in diesem Artikel, welcher begleitend zu meinem Seminarvortrag ist, erläutern. Basis für diese Arbeit ist „How Einstein Found His Field Equations“ von John Norton.

1 Einleitung

1905 veröffentlichte Albert Einstein seine Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ und legte damit gleichzeitug den Grundstein für seine Allgemeine Relativitätstheorie. In dieser Arbeit postuliert er, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bewegungszustand des lichtemittierenden Körpers ist.
1907 versucht Einstein die Gravitation in seine Spezielle Relativitätstheorie mit einzubeziehen und kam so auf sein Äquivalenzprinzip, welches über die klassische Äquivalenz von träger und schwerer Masse hinausgeht und besagt, dass beschleunigte Bezugssysteme mit solchen äquivalent sind, welche entsprechende gravitative Effekte aufweisen.
Nach dieser Entdeckung veröffentlichte Einstein erstmal nichts weiter zu diesem Thema, bis er sich 1911/1912 in Prag wieder mit Gravitation beschäftigte.

In der Zwischenzeit sorgte Herrmann Minkowski aber für eine neue Entwicklung, indem er 1908 mit seinem Vortrag „Raum und Zeit“ die vierdimensionale Raumzeit einführte und das Vierdimensionale Linienelement

$$dl^2 \longrightarrow ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2$$

entwickelte.

2 Die ersten Schritte

In Prag untersuchte Einstein Gravitation über sein Äquivalenzprinzip, indem er gleichmäßig beschleunigte Bezugssysteme betrachtete. Er stellte dort fest, dass auch gravitative Effekte den Gang von Uhren beeinflussen und dass Uhren bei Anwesenheit von Gravitation langsamer gehen. Er vermutete, dass in einem solchen Fall die Lichtgeschwindigkeit c nicht konstant ist, sondern die Verallgemeinerung des Newton'schen Gravitationspotentials.
1912 geht er dann einen Schritt weiter und er versucht die Newton'sche Poissongleichung zu verallgemeinern, indem er das Newton'sche Gravitationspotential ϕ durch die Lichtgeschwindigkeit ausdrückt:

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \longrightarrow \Delta c = kc\rho, \tag{1}$$

wobei G die Gravitationskonstante und ρ die Massendichte ist. Kurz darauf stellte er jedoch fest, dass diese Feldgleichung das dritte Newton'sche Axiom, actio=reactio, verletzen.
Im August 1912 Begann mit seiner Rückkehr nach Zürich die Zusammenarbeit mit Marcel Großmann einem Ungarischen Mathematiker. Einstein hatte nämlich eine Idee: er stellte eine Analogie zwischen der Gravitationstheorie und der Gauß'schen Theorie der Flächen her und Großmann half ihm mit der mathematischen Formulierung.
Relativ bald schreibt Einstein dann auch, das der dreidimensionale Raum nicht zwangsläufig euklidisch sein muss und führt als Erweiterung des Minkowski'schen Linienelements eine Metrik g_{ik} ein, so dass

$$ds^2 = dx^i g_{ik} dx^k$$

ist. Einstein nimmt außerdem jetzt schon an, dass die Metrik bei Anwesenheit von Gravitation im Allgemeinen nicht konstant ist und die Metrik somit die Verallgemeinerung des Newton'schen Gravitationspotentials ist.

Allerdings machen beide eine fatale Annahme über statische Gravitationsfelder, welche ihre Arbeit lange verzögern sollte. Als Verallgemeinerung seiner früheren Ergebnisse glaubt Einstein, dass

$$g_{00} = c^2 = c(\vec{x})^2 \tag{2}$$

ist. Außerdem hat Einstein vorher schon bei der Betrachtung beschleunigter Bezugssysteme herausgefunden, dass Gravitation auf die Zeit wirkt. Seine Annahme war nun, dass sich die Lichtgeschwindigkeit als erste Verallgemeinerung des Gravitationspotentials mit dem Raum ändert, im statischen Fall der Raum aber flach bleibt. Wenn dem so wäre, ließe sich ein Koordinatensystem finden in dem sich die Metrik g_{ik} auf die Minkowskimetrik η_{ik} reduzierte.

3 Die Entwurf Arbeit

1913 Veröffentlichten Einstein und Großmann ihre Arbeit „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation“ die hier ab jetzt Entwurf genannt werden soll. Die Arbeit ist zweigeteilt in einen physikalischen Teil von Einstein und einen mathematischen Teil von Großmann. In einem vielversprechenden Abschnitt werden Feldgleichungen vorgestellt, bestimmt durch den Energie-Impuls-Tensor T_{ik} und den Gravitationstensor G_{ik}, sowie eine Konstante:

$$G_{ik} = \kappa T_{ik}. \tag{3}$$

Die Form dieser Feldgleichungen entspricht also zu diesem Zeitpunkt schon den heutigen. Die herausforderung war nun einen Gravitationstensor zu finden, der die Feldgleichungen allgemein kovariant werden ließ. Dass sich G_{ik} aus der Metrik und ihren Ableitungen zusammensetzte stand für Einstein und Großmann schon fest. Einstein vermutete sogar, dass er sich aus zweiten Ableitungen der Metrik entwickeln musste.
In einer langen Rechnung versuchte Einstein die Newton'schen Poissongleichungen zu verallgemeinern und kam so auf die Form

$$G^{ik} \stackrel{!}{=} \left(g^{lm} g^{ik}{}_{,m}\right)_{,l} + O^{ik}, \tag{4}$$

wobei O^{ik} ein Term ist, der in der Näherung schwacher Felder vernachlässigbar klein wird. Das führt dann im Fall schwacher statischer Felder unter der Annahme das g_{ik} dann nur noch Diagonaleinträge hat zu

$$\Box g^{ik} = G^{ik} \Longrightarrow G^{00} = -\Delta g^{00} \tag{5}$$

und damit zu dem erwarteten Newton'schen Grenzfall, dass g^{00} als der einzige nichtverschwindende Term das Gravitationsfeld über die Lichtgeschwindigkeit determiniert.
In Großmanns Teil schreibt dieser, dass der natürliche Kandidat für den Gravitationstensor der Ricci-tensor ist. Allerdings erfüllt dieser nicht die erwartete Grenzbedingung.
Was Einstein und Großmann zu diesem Zeitpunkt offensichtlich noch nicht bewusst gewesen zu sein scheint, ist die Tatsache, dass man mithilfe von Koordinateneichungen die gewünschte Form erzielen kann. Allerdings liegt dort nicht das Hauptproblem. Mit der Grenzannahme von statischen Feldern, die Einstein und Großmann getroffen hatten, ist es nicht möglich den Ricci-Tensor zu akzeptieren.
Im Folgenden versuchte Einstein in seinem „Züricher Notizbuch“ auf verschiedene Weisen einen Gravitationstensor aus dem Riccitensor zu extrahieren, der das gewünschte Verhalten hatte. So setzte er zum Beispiel an, einen Gravitationstensor τ^{ik} zu konstruieren, der voll kontrahiert dem Ricciskalar gleicht, also

$$R = g_{ik} \tau^{ik}.$$

Er brach dieses Vorhaben aber mit der Bemerkung „zu kompliziert“ab. Danach begann er mit der Koordinatenbedingung

$$g^{kl} \Gamma^{i}{}_{kl},$$

welche den Ricci Tensor auf Form (4) gebracht hätte, brach aber auch diesen Ansatz ab. Einen weiteren Ansatz startete er mit einer Aufteilung des Ricci-Tensors zwei Terme mit $R^i = \log(\sqrt{g})^{,i}$:

$$R^{ik} = R^{i,k} - \Gamma^{ik}{}_l R^l - \Gamma^{ik}{}_{,j}{}^{j} - \Gamma^{ij}{}_l \Gamma^{lk}{}_j$$

und definierte $\tilde{R}^{ik} = \Gamma^{ij}{}_l \Gamma^{lk}{}_j$ als Kandidaten für den Gravitationstensor. $\tilde{R}^{ik}$ erfüllt sogar (4), allerdings liefert er im statischen Fall keine Minkowskimetrik, deswegen wurde auch dieser Ansatz verworfen.

4 Die Abkehr von der allgemeinen Kovarianz

Während der Suche nach einem allgemein kovarianten Gravitationstensor untersuchte Einstein das Gravitationsfeld einer ruhenden Staubwolke und fand

$$\Delta g_{00} = \kappa c^2 \rho_0,\ \Delta g_{\mu\nu} = 0.$$

Ein Ergebnis, welches Einstein in seinen Annahmen über statische Felder bestätigte. Bald darauf, im August 1913 fand er dann heraus, dass die Konstanz des Energie-Impuls-Tensors,

$$T_i{}^{k,k} = (\tilde{T}_i{}^k + \tilde{t}_i{}^k)^{,k} = 0,$$

nur unter linearen Koordinatentransformationen gegeben ist. Diese Tatsache, welche in der Nichtexistenz lokalisierter Energie begründet ist, verunsicherte Einstein, ob die allgemeine Kovarianz eine gerechtfertigte Forderung war.
Zur völligen Abkehr von der allgemeinen Kovarianz führte dann das Lochargument:
Hat man eine Mannigfaltigkeit mit zwei Koordinatensystemen K, K' mit Metriken $G(x), G'(x')$, dann ist auch $G'(x)$ eine Metrik in Bezug zu K. Sind nun die Feldgleichungen allgemein Kovariant, erfüllen beide Metriken diese Feldgleichungen und aus allgemein kovarianten Feldgleichungen kann kein Feld eindeutig bestimmt werden.
Durch dieses Argument bestätigt, beschränkte sich Einstein erstmal auf lineare Transformationen. 1914 stieß er dann bei der Untersuchung beschleunigter Koordinatensysteme auf Koordinatenbedingungen, welche seiner Meinung nach erfüllt werden müssten:

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{-g} g_{ik} g^{lm} g_{mn,}{}^{k}\right)_{,}^{\ i} = \kappa \left(\tilde{T}_l{}^n + \tilde{t}_l{}^n\right) \\ \Rightarrow &\left(\sqrt{-g} g_{ik} g^{lm} g_{mn,}{}^{k}\right)_{,}^{\ in} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Koordinatensysteme, welche diese Bedingung erfüllen nennt er angepasst. Transformationen zwischen angepassten Koordinatensystemen (AKS) nennt er gerechtfertigt.
Einstein und Großmann eignen sich zudem die Variationsrechnung als mächtiges mathematisches Werkzeug an. Mit ihrer Hilfe gelingt es ihnen zu zeigen, dass die AKS die maximale, durch das Lochargument beschränkte, kovarianz bieten. Einstein merkt aber an, dass im Falle allgemeiner kovarianz alle Koordinatensysteme angepasst wären und der Gravitationstensor aus dem Riccitensor hervorgeht.

5 Die Theorie ist unvollständig

Im April 1914 zieht Einstein nach Berlin. Dort begann er seine Zusammenarbeit mit dem Astronomen Erwin Freundlich, der sich an die Arbeit machte Einsteins Theorie experimentell zu testen. Bis in die Mitte des nächsten Jahres verteidigte Einstein seine Theorie, doch dann überkamen ihn langsam Zweifel. In der Korrespondenz mit Freundlich ist ihm wohl aufgefallen, dass seine Theorie das Merkurperihel falsch berechnet, um etwa die Hälfte. Zudem stellte er fest, dass eine einfache Rotation keine gerechtfertigte Koordinatentransformation war. Und außerdem war die in der Variationstheoretischen Herleitung verwendete Wirkung H nicht wie er dachte durch die Kovarianz beschränkt, sondern nur durch seine Annahmen über den Newton'schen Grenzfall. Gegen Ende des Jahres 1915 entwickelte sich seine Theorie dann sehr schnell. Wieder an seine Arbeit von 1913 angesetzt versuchte er nun wieder allgemein kovariante Feldgleichungen zu finden. Das Lochargument hat er entkräftet, indem er sich bewusst gemacht hat, dass die Feldgleichungen in Bezug zu bestimmten Koordinaten für sich genommen keinen physikalischen Gehalt haben. Erst die Wirkung des Feldes auf Materie bestimmt die physikalische Relevanz.
Am 4.11. versucht er erneut einen Gravitationstensor zu erhalten indem er den Riccitensor aufteilt, außerdem beschränkt er sich auf Koordinatentransformationen mit Determinante 1.
Am 11.11. Fordert er

$$\sqrt{-g} \stackrel{!}{=} konst.$$

und stellt fest, dass T^{ik} dadurch beschränkt wird. Außerdem stellt er die Hypothese auf, dass alle Materie ein elektrodynamisches Wesen habe und es gilt:

$$T_i{}^i = 0 \Rightarrow R_{ik} = -\kappa T_{ik}$$

Am 18.11. berechnete er das Gravitationsfeld der Sonne und stellte fest, dass seine Annahmen des Newton'schen Grenzfalls falsch waren und die Metrik nicht Minkowski'sch wird. Damit konnte er erneut das Merkurperihel bestimmen und zwar diesmal richtig. Außerdem wurde klar, dass der Energie-Impulstensor keinesfalls Spurlos sein muss, sondern dass

$$g_{ik}{}^{,ik} = \kappa T$$

ist.
Am 25.11. konnte er dann seine endgültigen Feldgleichungen vorstellen. Zuerst betrachtete er den Quellfreien Fall:

$$(g^{sb}\Gamma^a{}_{mb})_{,a} = -\kappa\left(t^s{}_m - \frac{1}{2}\delta^s{}_m t\right) \tag{7}$$

und verallgemeinerte dann auf die vollständige Form

$$(g^{sb}\Gamma^a{}_{mb})_{,a} = -\kappa\left(t^s{}_m + Ts\ {}_m - \frac{1}{2}\delta^s{}_m(t+T)\right) \tag{8}$$

6 Rückblickende Betrachtung

Sieht man die Irrwege Einsteins und Großmanns rückblickend, stellt sich die Frage, wieso so scheinbar triviale Fehler die Entwicklung der Theorie so lange aufhalten konnten. Allerdings sind die Fehler vielleicht im Nachhinein leicht als solche zu identifizieren, weil die richtige Lösung bekannt ist, allerdings zeigt Einstein ja, dass er nach erkennen seiner falschen Annahme innerhalb weniger Wochen die richtigen Feldgleichungen finden konnte. Außerdem sind die Irrwege meistens sehr gut nachzuvollziehen, wenn man sich nur die Zeit nimmt sich in sie hineinzuversetzen. Das macht die Suche Einsteins besonders spannend, dass man den Weg den er ging nachvollziehen kann, auch wenn es teilweise der falsche war.