Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

20.10.2009

1. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 1: **Wiederholung** (4 Punkte)

Beschreiben Sie auf maximal zwei Seiten die Grundbegriffe der Allgemeinen Relativitätstheorie und deren wichtigste Konsequenzen.

Aufgabe 2: **Kruskal-Koordinaten** (6 Punkte)

Leiten Sie die in der Vorlesung angegebene Form des Linienelementes der Schwarzschild-Metrik in Kruskal-Koordinaten ab. Führen Sie dazu zunächst die neue Radialkoordinate (für $r > 2M$)

$$r_* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

ein und vollführen dann die Koordinatentransformation

$$X = \exp\left(\frac{r_*}{4M}\right)\cosh\left(\frac{t}{4M}\right) , \quad T = \exp\left(\frac{r_*}{4M}\right)\sinh\left(\frac{t}{4M}\right) .$$

Aufgabe 3: **Gravitationswellen** (10 Punkte)

Es sei eine Metrik von der Form

$$g_{\mu\nu} = g^{\mathrm{B}}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

gegeben, wobei $|g^{\mathrm{B}}_{\mu\nu}| >> |h_{\mu\nu}|$ gelten soll. Um die Indizes der Störungen $h_{\mu\nu}$ zu heben und zu senken, wird die Hintergrundsmetrik $g^{\mathrm{B}}_{\mu\nu}$ verwendet.

a) Zeigen Sie, dass die Differenz von der $g^{\mathrm{B}}_{\mu\nu}$ zugeordneten kovarianten Ableitung ∇_B und der $g_{\mu\nu}$ zugeordneten kovarianten Ableitung ∇ ein Tensor $\nabla - \nabla_B = \mathbf{S}$ mit den Komponenten

$$S^{\mu}{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\mu,\mathrm{B}}_{\beta\gamma}$$

ist.

b) Überprüfen Sie die Relation

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu,B} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\nu} - h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\beta}h_{\beta}{}^{\nu} + \dots .$$

c) Leiten Sie die Relationen

$$S^{\mu}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(h_{\alpha\beta|\gamma} + h_{\alpha\gamma|\beta} - h_{\beta\gamma|\alpha})$$

und

$$R_{\beta\delta} - R^{\mathrm{B}}_{\beta\delta} = S^{\alpha}{}_{\beta\delta|\alpha} - S^{\alpha}{}_{\beta\alpha|\delta} + S^{\alpha}{}_{\mu\alpha}S^{\mu}{}_{\beta\delta} - S^{\alpha}{}_{\mu\delta}S^{\mu}{}_{\beta\alpha} \qquad (1)$$

ab. Hierbei ist "$_|$" die kovariante Ableitung bezüglich der Hintergrundsmetrik.

d) Analog zur linearisierten Gravitation ist es einfacher, die Komponenten

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta,\mathrm{B}}g^{\mathrm{B}}_{\mu\nu}$$

zu benutzen. Zeigen Sie, dass unter Verwendung der "Lorenz-Eichung"

$$\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha} = 0$$

die Bewegungsgleichungen für die metrischen Störungen resultierend aus den Einsteinschen Gleichungen und der Relation (1) die Form

$$\bar{h}_{\mu\nu|\alpha}{}^{\alpha} + 2R^{\mathrm{B}}_{\alpha\mu\beta\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} = 0$$

annehmen. Vernachlässigen Sie bei der Ableitung Terme der Form $R^{\mathrm{B}}_{\alpha\mu}h_{\nu}{}^{\alpha}$.

Abgabe: 28.10.2009