

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 4: **Penrose-Diagramme** (6 Punkte)

- a) Formulieren Sie das Linienelement für den Minkowski-Raum in Kugelkoordinaten (t, r, Θ, ϕ) . Vollführen Sie dann die Koordinatentransformation $u = t - r, v = t + r$. Wie sieht dann das Linienelement aus? Welche Interpretation haben die Koordinaten u und v ?
- b) Führen Sie eine weitere Koordinatentransformation $(u, v) \mapsto (u', v')$ durch mit

$$u' = \arctan(u) =: t' - r', \quad v' = \arctan(v) =: t' + r' .$$

Schraffieren Sie in einem (t', r') -Diagramm den Bereich, den diese Koordinaten überdecken. Zeichnen Sie einen radialen Lichtstrahl ein, der (in den ursprünglichen Koordinaten) aus dem Unendlichen einläuft, durch $r = 0$ geht und wieder ins Unendliche läuft. Skizzieren Sie in einem separaten (t', r') -Diagramm die Flächen $t = \text{konstant}$ und $r = \text{konstant}$.

- c) Berechnen Sie das Linienelement in den gestrichenen Koordinaten und zeigen Sie, dass es konform zu dem Linienelement

$$d\bar{s}^2 = 4 (dt' - dr'^2) - \sin^2(2r') d\Omega^2$$

ist.

Aufgabe 5: **Kerr-Metrik I**

(10 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Oberfläche des Ereignishorizontes eines rotierenden Schwarzen Loches ($|a| \leq M$) für $t = \textit{konst.}$ Zeigen Sie weiter, dass der Umfang über die Pole immer kleiner als der Äquatorumfang ist, die Geometrie des Ereignishorizontes also nicht sphärisch ist. Schätzen Sie für den extremalen Fall ($|a| = M$) das Verhältnis von Polar- zu Äquatorumfang ab.
- b) Betrachten Sie in der Kerr-Metrik den Grenzfall $r \gg M$ und $r \gg |a|$. Zeigen Sie, dass der Nichtdiagonalterm $\propto d\Phi dt$ gleich dem in §7.6 abgeleiteten Nichtdiagonalterm einer langsam und starr rotierenden kugelförmigen Massenverteilung ist (wählen Sie die z-Achse parallel zur Drehrichtung).
- c) Betrachten Sie die Kerr-Metrik im Grenzfall $M \rightarrow 0$ (a fest). Zeigen Sie, am besten durch eine explizite Koordinatentransformation auf kartesische Koordinaten, dass es sich um die Metrik des flachen Raumes handelt. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinate r in diesem Grenzfall?

Aufgabe 6: **Kerr-Metrik II**

(4 Punkte)

Schätzen Sie grob den aus der Kerr-Metrik bekannten Parameter a/M für Sonne und Erde ab. (Entnehmen Sie die dafür benötigten physikalischen Parameter wie Sonnenradius etc. aus der Literatur.) Was fällt Ihnen auf?

Abgabe: Mi, 4.11.2009