

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 7: **Kerr-Newman-Metrik** (1+3+4+4+3 Punkte)

Die allgemeinste Lösung für ein stationäres Schwarzes Loch ist durch die Kerr-Newman-Metrik gegeben, welche ein Loch mit Drehimpuls $J = M a$ und Ladung q beschreibt. Das Linienelement lautet in Boyer-Lindquist-Koordinaten

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (1)$$

mit

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2(\theta), \quad \Delta = r^2 - 2Mr + q^2 + a^2, \quad q^2 + a^2 \leq M^2. \quad (2)$$

- a) Zeigen Sie, dass dieses Linienelement aus dem Linienelement der Kerr-Metrik durch die Substitution $M \rightarrow M - (q^2)/(2r)$ hervorgeht.
- b) Bei $\Delta = 0$ liegen Koordinatensingularitäten vor. Bestimmen Sie deren Radialkoordinaten. Die Fläche $r_+ = \text{const.}$ (mit r_+ als dem größeren Wert der beiden) bildet den Ereignishorizont. Berechnen Sie dessen Oberfläche für $t = \text{const.}$
- c) Analog zur Kerr-Metrik sei ein Beobachter mit $r = \text{const.}$, $\theta = \pi/2$ betrachtet, dessen Tangentialvektor parallel zu dem Killing-Feld $\chi^a = \xi^a + \Omega \Psi^a$ ist. Welche Werte kann Ω bei vorgegebenem $r \geq r_+$ annehmen? Zeigen Sie, dass am Horizont nur ein Wert Ω_H möglich ist und bestimmen Sie diesen.

- d) Wir betrachten nun das Killing-Feld $\chi^a = \xi^a + \Omega\Psi^a$ ausgewertet am Ereignishorizont. Zeigen Sie, dass dieses auf dem gesamten Horizont lichtartig ist. Zeigen Sie weiter, dass die vermöge $[\nabla^a(\chi_b\chi^b)]_H = -2\kappa\chi^a|_H$ definierte Oberflächengravitation κ eine wohldefinierte Größe ist. Berechnen Sie die Lie-Ableitung der Definitionsgleichung von κ bzgl. χ^i und zeigen Sie so, dass κ entlang der Integralkurven von χ konstant ist. (Nach einer etwas längeren Rechnung erhält man $\kappa = (r_+ - M)/(r_+^2 + a^2)$, was hier nicht gezeigt werden soll.)
- e) Betrachten Sie die am Horizont definierten Nullgeodätischen, deren Tangentialvektoren k^a proportional zu χ^a sind. Finden Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen dem affinen Parameter λ dieser Nullgeodätischen und dem Killing-Parameter v der Integralkurven von χ^a (d.h. $\chi^a = (\partial/\partial v)^a$).

Aufgabe 8: Hawking-Temperatur (6 Punkte)

In der Vorlesung ist angegeben worden, dass ein Schwarzschildsches Schwarzes Loch mit der Hawking-Temperatur $T_H = (\hbar c^3)/(8\pi k_B GM)$ strahlt. Nehmen Sie an, dass nur Photonen mit einem perfekten Planck-Spektrum abgestrahlt werden. Finden Sie den Zusammenhang zwischen der Anfangsmasse des Schwarzen Lochs und seiner Lebenszeit und untersuchen Sie diesen für einige interessante Zeiten und Massen.

Abgabe: Mi, 11.11.2009