Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

8.12.2009

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 19: **Eddington-Lemaître-Modell** (12 Punkte)

Betrachten Sie ein Friedmann-Modell mit $\Omega_{m,0} \approx \Omega_0 = 1/3$ und unspezifiziertem $\Omega_{v,0} =: \Omega_\Lambda$. Angenommen, das Universum hätte in der Vergangenheit eine sehr lange quasistatische Phase durchlaufen: Welchem Wert von Ω_Λ würde dies entsprechen? Bei welcher Rotverschiebung wäre diese quasistatische Phase erfolgt?

Aufgabe 20: **De Sitter-Raum** (8 Punkte)

Zeigen Sie, daß sich die durch die de Sitter-Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\ , \tag{1}$$

$\alpha^2 = 3/\Lambda$, charakterisierte Raumzeit isometrisch auf den vierdimensionalen Unterraum

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - T^2 = \alpha^2 \tag{2}$$

des $\mathbb{R}^5$ mit Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}T^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}u^2 \tag{3}$$

abbilden läßt.

Anleitung: Ersetzen Sie die euklidischen Koordinaten (y, z, u) des Einbettungsraums durch die üblichen Polarkoordinaten (r, θ, ϕ). Betrachten Sie dann die Einbettung $(t, r, \theta, \phi) \mapsto (T, x, r, \theta, \phi)$ mit $(t, r) \mapsto (T, x)$, $T = \sqrt{\alpha^2 - r^2}\sinh t/\alpha$, $x = \sqrt{\alpha^2 - r^2}\cosh t/\alpha$, und dem Rest unverändert. Zeichnen Sie im (T, x)-Diagramm die Kurven $t =$ konst. und $r =$ konst. ein.

(Bem.: Diese Transformation ist auf $x \geq |T|$, $x > 0$, beschränkt, jedoch läßt sich der gesamte Koordinatenbereich analog zum Kruskal-Diagramm durch weitere Transformationen abdecken.)

Abgabe: Mi, 16.12.2009