Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Manuel Krämer

13. April 2012

www.thp.uni-koeln.de/gravitation/courses/qm12.html

0. Übungsblatt zur Quantenphysik

Sommersemester 2012

Übung A (Präsenzübung): *Hamilton-Jacobi-Gleichung*[*]

Zeigen Sie, dass man die Hamiltonschen Gleichungen dadurch integrieren kann, dass man eine Funktion S der q_i und der Zeit t als Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \overline{H}\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0$$

bestimmt, wobei

$$\overline{H}\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = H(q_i, p_i, t)\Big|_{p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}} .$$

Anleitung: Betrachten Sie wie in der Hydrodynamik q_i und t als unabhängige Variable und p_i an jeder Stelle q_i als Funktion von t gegeben. Stellen Sie dann die Bedingung auf, dass es Strömungsfelder gibt, in denen der Impulsvektor ein Potential besitzt, sodass also gilt

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0 .$$

Übung B (Präsenzübung): *Geometrische Optik*

Betrachten Sie die Wellengleichung der Optik für eine skalare Größe, z.B. das skalare elektromagnetische Potential ϕ:

$$-\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = 0 , \tag{1}$$

wobei n den Brechungsindex bezeichnet.

a) Setzen Sie zunächst $n =$ konst. und lösen Sie (1) durch eine ebene Welle. Geben Sie den Zusammenhang der Wellenzahl k mit der Frequenz ω an. (Nehmen Sie der Einfachkeit halber an, der Wellenzahlvektor weise in Richtung der z-Achse.)

b) Nehmen Sie nun an, dass sich n geringfügig im Raum ändere und machen Sie den Ansatz

$$\phi(\vec{x}, t) = \mathrm{e}^{A(\vec{x}) + \mathrm{i}\, k_0 [L(\vec{x}) - ct]} . \tag{2}$$

Setzen Sie (2) in (1) ein und leiten Sie damit zwei gekoppelte Gleichungen für A und L ab. Der Grenzfall der geometrischen Optik bedeutet, dass die Wellenlänge $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ klein im Vergleich zu den Änderungen im Medium ist. Leiten Sie mit dieser Annahme dann die Grundgleichung der geometrischen Optik ab:

$$(\nabla L)^2 = n^2$$

(Eikonalgleichung) und interpretieren Sie diese.

c) Vergleichen Sie die Eikonalgleichung mit der in **A** abgeleiteten Hamilton-Jacobi-Gleichung.

[*] vgl. A. Einstein, Sitz.ber. kgl.-preuss. Akademie Wiss. XLVI (1917) 606-608.