

## 12. Übungsblatt zur Quantenphysik Sommersemester 2012

**Abgabe:** bis Mittwoch, 11. Juli 2012, 12:00 Uhr in der Holzbox vor dem Institut für Theoretische Physik

### Übung 31 (4 + 3 Punkte): *Harmonischer Oszillator im Heisenbergbild*

Observablen erfüllen im Heisenbergbild der Quantenmechanik die Bewegungsgleichungen

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = [A_H(t), H], \quad (1)$$

Zustände sind zeitunabhängig.

**31.1** Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen (1) für Ortsoperator  $Q(t)$  und Impulsoperator  $P(t)$  mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m} \left( P(t)^2 + m^2 \omega^2 Q(t)^2 \right)$$

des harmonischen Oszillators im Heisenbergbild unter Berücksichtigung von  $[Q(t), P(t)] = i\hbar$ .

Lösen Sie die Bewegungsgleichungen zu den Anfangsbedingungen  $Q(0) \equiv Q = x$  und  $P(0) \equiv P = -i\hbar \frac{d}{dx}$  mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} Q(t) &= \alpha_q(t) Q + \beta_q(t) P \\ P(t) &= \alpha_p(t) Q + \beta_p(t) P \end{aligned}$$

und bestimmen Sie  $\alpha_{q/p}(t)$  und  $\beta_{q/p}(t)$ .

**31.2** Bestimmen Sie die Kommutatoren

$$[Q(t), Q(t')], \quad [P(t), P(t')] \quad \text{und} \quad [Q(t), P(t')].$$

### Übung 32 (6 Punkte): *Matrixdarstellung*

Zeigen Sie, dass man die Wirkung des Operators  $A$  auf eine beliebige Wellenfunktion kennt, wenn man alle „Matrizelemente“

$$(A)_{nm} := \int \varphi_n^* A \varphi_m d^3x$$

von  $A$  zwischen den Funktionen eines vollständigen Systems  $\{\varphi_n\}$  kennt. Jedem Operator  $A$  ist also eine im Allgemeinen unendlichdimensionale Matrix  $\{A_{nm}\}$  zugeordnet. Zeigen Sie, dass die dem Produkt  $AB$  zweier Operatoren zugeordnete Matrix  $\{(AB)_{nm}\}$  das Matrixprodukt der den Operatoren  $A$  und  $B$  zugeordneten Matrizen  $\{A\}$  und  $\{B\}$  ist.

*Bitte wenden.*

### Übung 33 (2 + 2 + 3 Punkte): Rechnen mit $(2 \times 2)$ -Matrizen

Die Pauli-Matrizen  $\sigma_k$  der Form

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ermöglichen eine zweckmäßige Parametrisierung komplexer  $(2 \times 2)$ -Matrizen: Jedes beliebige  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  lässt sich darstellen als

$$M_{\alpha, \vec{a}} = \frac{1}{2} (\alpha \mathbb{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}),$$

wobei  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  ein komplexer Vektor,  $\vec{a} \cdot \vec{\sigma} = a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z$  und  $\mathbb{1}$  die Einheitsmatrix ist.

**33.1** Rechenregeln in dieser Parametrisierung: Zeigen Sie, dass gilt

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \mathbb{1} + i (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}.$$

**33.2** Eine orthogonale Projektion ist eine Matrix  $P$  mit den Eigenschaften

$$P^2 = P \quad \text{und} \quad P^\dagger = P.$$

Was sind die Bedingungen für  $\alpha$  und  $\vec{a}$ , dass  $M_{\alpha, \vec{a}}$  eine orthogonale Projektion ist?

**33.3** Eine Matrix  $D$  heißt Dichtematrix, wenn sie selbstadjungiert ist, für die Spur  $\text{tr} D = 1$  gilt und  $D$  außerdem nur Eigenwerte  $\lambda_k \geq 0$  hat. (Ein  $D$  mit dieser Eigenschaft heißt positiver Operator.) Welche Bedingungen müssen  $\alpha$  und  $\vec{a}$  erfüllen, damit  $M_{\alpha, \vec{a}}$  eine Dichtematrix ist?

(Anm.: Dichtematrizen sind die allgemeinste Form quantenmechanischer Zustände.)

## Historisches Zitat zur Quantenmechanik

Eine Katze wird in eine Stahlkammer gesperrt, zusammen mit folgender Höllenmaschine [...]: in einem Geigerschen Zählrohr befindet sich eine winzige Menge radioaktiver Substanz, so wenig, daß im Lauf einer Stunde vielleicht eines von den Atomen zerfällt, ebenso wahrscheinlich aber auch keines; geschieht dies, so spricht das Zählrohr an und betätigt über ein Relais ein Hämmerchen, das ein Kölbchen mit Blausäure zertrümmert. Hat man dieses ganze System eine Stunde lang sich selbst überlassen, so wird man sich sagen, daß die Katze noch lebt, wenn inzwischen kein Atom zerfallen ist. [...] Die  $\psi$ -Funktion des ganzen Systems würde das so zum Ausdruck bringen, daß in ihr die lebende und die tote Katze [...] zu gleichen Teilen gemischt oder verschmiert sind.

aus: Erwin Schrödinger, Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, *Die Naturwissenschaften* **48**, 807–812 (1935).