

5. Übungsblatt zur Quantenphysik Sommersemester 2012

Abgabe: bis Mittwoch, 16. Mai 2012, 12:00 Uhr in der Holzbox vor dem Institut für Theoretische Physik

Übung 12 (6 Punkte): *Unendlich hoher Potentialtopf*

Lösen Sie direkt die Schrödinger-Gleichung für den unendlich hohen Potentialtopf mit $V = 0$ für $-a < x < a$, $V = \infty$ außerhalb. Geben Sie die normierten Wellenfunktionen sowie die Energieeigenwerte an.

Übung 13 (2 + 5 Punkte): *δ -Potential*

Man diskutiere die stationäre Schrödinger-Gleichung für das Potential $V(x) = -V_0 \delta(x)$ mit $V_0 > 0$.

13.1 Wie lauten die Randbedingungen für die Wellenfunktion und ihre Ableitungen an der Stelle $x = 0$?

13.2 Bestimmen Sie explizit Wellenfunktionen und Energieeigenwerte für die gebundenen Zustände.

Übung 14 (2 + 5 Punkte): *Bewegung im homogenen elektrischen Feld*

Wir betrachten einen Strom von Elektronen der Anfangsenergie E , welcher von einer Kathode bei $x = 0$ in positiver Richtung emittiert und durch ein in gleicher Richtung angelegtes elektrisches Feld \mathcal{E} beschleunigt wird.

14.1 Formulieren Sie die eindimensionale stationäre Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion u eines Elektrons dieses Stroms. Führen Sie eine charakteristische Länge l und einen dimensionslosen Parameter λ durch die Definitionen

$$\frac{2m_e e \mathcal{E}}{\hbar^2} = \frac{1}{l^3} \quad \text{und} \quad \frac{2m_e E}{\hbar^2} = \frac{\lambda}{l^2}$$

ein und schreiben Sie die Schrödinger-Gleichung um mit Hilfe der dimensionslosen Variablen

$$\xi := \frac{x}{l} + \lambda.$$

Die Lösung der daraus entstehenden Schrödinger-Gleichung lässt sich durch sogenannte Hankel-Funktionen* $\mathfrak{H}_{\frac{1}{3}}^{(1)}$ erster Art zum Index $\frac{1}{3}$ ausdrücken:

$$u(\xi) = C \sqrt{\frac{\pi}{3}} \xi \mathfrak{H}_{\frac{1}{3}}^{(1)}\left(\frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}}\right), \quad C = \text{konst.}$$

Deren asymptotisches Verhalten für $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \mathbb{C}$ ergibt sich aus

$$\mathfrak{H}_{\frac{1}{3}}^{(1)}(z) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i\left(z - \frac{5\pi}{12}\right)\right].$$

14.2 Betrachten Sie nun den Fall $x \gg \lambda$. Bilden Sie mit der asymptotischen Lösung u die Wahrscheinlichkeitsstromdichte j sowie die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ und berechnen Sie hiermit die Geschwindigkeit der Elektronen im Abstand x von der Kathode, die gegeben ist durch $v = \frac{j}{\rho}$.

Zeigen Sie, dass sich hieraus die folgende klassische Formel ergibt:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = E + e \mathcal{E} x.$$

*Informieren Sie sich über die Hankel-Funktionen auch aus einem mathematischen Lehrbuch oder einer Formelsammlung.

Historische Zitate zur Quantenmechanik

Dadurch daß ψ im allgemeinen von viel mehr als 3 Variablen abhängt, wird die unmittelbare Deutung als Schwingungen im dreidimensionalen Raum in jeder nur irgend wünschenswerten Weise erschwert.

Hingegen muß ich mich bei aller Reverenz vor der Erkenntnistheorie dagegen verwehren, daß ich so sehr viel möglicher Weise Unnötiges in die Theorie *hineinstecke*. Knotenlinien, Kugelfunktionen usw. das steckt doch alles unweigerlich in der Schwingungsgleichung drin, genau wie die Elektronenbahnen mit ihren Schleifen, Periheldrehungen usw. in den Grundgleichungen der Mechanik. Hineinstecken tu ich *jetzt* eigentlich gar nichts mehr als die Gleichung $v = \frac{E}{h}$. Und auch diese liegt eigentlich schon durch die Hamiltonsche Theorie präformiert da.

aus: Erwin Schrödinger, *Eine Entdeckung von ganz außerordentlicher Tragweite*, Band 1, hrsg. von Karl von Meyenn, Springer 2011. (Brief an Arnold Sommerfeld vom 20. Februar 1926)

Die Schrödingersche Quantenmechanik gibt also auf die Frage nach dem Effekt eines Zusammenstoßes eine ganz bestimmte Antwort; aber es handelt sich um keine Kausalbeziehung. Man bekommt keine Antwort auf die Frage „wie ist der Zustand nach dem Zusammenstoße“, sondern nur auf die Frage „wie wahrscheinlich ist ein vorgegebener Effekt des Zusammenstoßes“ (wobei natürlich der quantenmechanische Energiesatz gewahrt bleiben muß).

Hier erhebt sich die ganze Problematik des Determinismus. [...] Ich selber neige dazu, die Determiniertheit in der atomaren Welt aufzugeben. Aber das ist eine philosophische Frage, für die physikalische Argumente nicht allein maßgebend sind.

aus: Max Born, *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*, *Zeitschrift für Physik* 37, 863–867 (1926).