Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Manuel Krämer

6. Juni 2012

www.thp.uni-koeln.de/gravitation/courses/qm12.html

8. Übungsblatt zur Quantenphysik

Sommersemester 2012

Abgabe: bis Mittwoch, 13. Juni 2012, 12:00 Uhr in der Holzbox vor dem Institut für Theoretische Physik

Übung 20 (1 + 1 + 1 + 1 Punkte): *Eigenschaften des Drehimpulsoperators*

Es seien L_i die Komponenten des Drehimpulsoperators und $L_\pm := L_x \pm \mathrm{i}\, L_y$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

20.1 $[L_z, L_\pm] = \pm\hbar\, L_\pm$

20.2 $[L_+, L_-] = 2\hbar\, L_z$

20.3 $[\vec{L}^2, L_\pm] = 0$

20.4 $L_+\, L_- = L_x^2 + L_y^2 + \hbar\, L_z$ und somit $\vec{L}^2 = L_-\, L_+ + \hbar\, L_z + L_z^2$.

Übung 21 (3 + 1 Punkte): *Anschließende Messung*

An einem Teilchen wurden die Observablen $\vec{L}^2$ und L_z gemessen und die Werte $\hbar^2\ell(\ell+1)$ bzw. $\hbar m$ gefunden.

21.1 Bestimmen Sie die Erwartungswerte und die Varianzen für eine anschließende Messung von L_x und L_y. Für welche Werte von m sind die Varianzen minimal?

21.2 Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle \vec{n}\cdot\vec{L}\rangle$ für die anschließende Messung der Drehimpulskomponente in einer beliebigen Richtung $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$.

Übung 22 (2 + 4 + 3 + 3 Punkte): *Legendre-Polynome*

Betrachten Sie zwei Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$ im $\mathbb{R}^3$, der Winkel zwischen beiden werde mit θ bezeichnet. Wir bezeichnen mit $r_<$ den kleineren und mit $r_>$ den größeren der beiden Beträge $|\vec{r}|$ und $|\vec{r}\,'|$.

22.1 Führen Sie eine Taylor-Entwicklung von $|\vec{r} - \vec{r}\,'|^{-1}$ in Abhängigkeit von $t := \frac{r_<}{r_>}$ um $t = 0$ durch und bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten bis zur Ordnung $\mathcal{O}(t^3)$.

Wir nutzen diese Entwicklung um die Legendre-Polynome mit Hilfe der erzeugenden Funktion F folgendermaßen zu definieren:

$$F(t,\xi) := \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,\xi\, t + t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\xi)\, t^\ell\,,$$

wobei $\xi = \cos\theta$ und $|t| < 1$.

22.2 Zeigen Sie die durch Ableiten der erzeugenden Funktion $F(t,\xi)$ nach t bzw. ξ die folgenden Rekursionsformeln:

$$(\ell+1)\, P_{\ell+1}(\xi) = (2\ell+1)\,\xi\, P_\ell(\xi) - \ell\, P_{\ell-1}(\xi)\,,$$
$$\left(1 - \xi^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} P_\ell(\xi) = \ell\left(P_{\ell-1}(\xi) - \xi\, P_\ell(\xi)\right).$$

Bitte wenden.

Die Darstellung der Legendre-Polynome P_ℓ mittels der *Formel von Rodrigues* lautet:

$$P_\ell(\xi) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}\xi^\ell} \left(\xi^2 - 1\right)^\ell .$$

22.3 Beweisen Sie hiermit die Orthogonalitätsrelationen der Legendre-Polynome:

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\xi \; P_m(\xi)\, P_n(\xi) = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{mn} .$$

22.4 Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome der folgenden Differentialgleichung genügen:

$$\left(1 - \xi^2\right) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} P_\ell(\xi) - 2\xi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} P_\ell(\xi) + \ell(\ell+1)\, P_\ell(\xi) = 0 .$$

Historisches Zitat zur Quantenmechanik

Ist F dagegen nicht hermitisch, so läßt sich über die Realität [der Eigenwerte] nichts aussagen. Wir werden daher annehmen, daß nur hermitische Operatoren eine Bedeutung haben, also physikalischen Größen zugeordnet werden dürfen. Diese Forderung mag zunächst sehr einschneidend erscheinen, sie schränkt aber gerade die Willkür, die bisher noch in der Möglichkeit der Zuordnung der Operatoren zu den mechanischen Größen bestand, in passender Weise ein. Eine mechanische Größe hatten wir ja als eine Funktion eines kanonischen Variablenpaares $p\,q$ angenommen, und den zugehörigen Operator dadurch gewonnen, daß wir diese Funktion als Operatorfunktion ansahen. Diese Zuordnung ist aber nicht eindeutig, da ja bei der Operatorfunktion die Reihenfolge der Faktoren wesentlich ist. Durch passende Anordnung und lineare Kombination verschiedener Anordnungen ist es nun stets möglich, einen hermitischen Operator zu bilden, z. B. ist ja $\frac{1}{2}(A + A^\dagger)$ stets hermitisch. [...]

Im übrigen ist hier gerade der Punkt, an dem Modifikationen der Theorie vorgenommen werden können. Es wird nach dem bisherigen Verfahren der zu einer mechanischen Größe gehörige Operator dadurch bestimmt, daß man einfach die Funktion $F(p\,q)$ zugrunde legt, die in der klassischen Mechanik diese Größe darstellt, wobei eventuell nur, wie gesagt, ein gewisser Symmetrisierungsprozeß vorzunehmen ist. Es ist nun keineswegs ausgemacht, ja sogar sehr unwahrscheinlich, daß dies schon in allen Fällen das richtige Rezept darstellt. Es scheint z. B. zu versagen, wenn man versucht, der in der Theorie der Spektren so fundamentalen Hypothese des magnetischen Elektrons Rechnung zu tragen.

aus: David Hilbert, Johann von Neumann und Lothar Nordheim,
Über die Grundlagen der Quantenmechanik, *Mathematische Annalen* **98**, 1–30 (1928).