7. Übung zur Vorlesung Einführung in die Hydrodynamik

im Wintersemester 2003/04

13. Integrabilität der KdV-Gleichung: Lax-Paare

Die Lösbarkeit vieler nichtlineare Differentialgleichungen beruht auf der Tatsache, dass es sich eigentlich um integrable (mechanische) Systeme handelt. Sie führen auf zeitabhängige Potentiale, die ein zeitunabhängiges Spektrum generieren.
Sei $\mathcal{H}(t)$ ein zeitabhängiger selbstadjungierter linearer Operator, der differenzierbar ist und die (diskreten) reellen Eigenwerte $\lambda(t)$ besitzt, d.h.

$$\mathcal{H}(t)\,|\psi(t)\rangle = \lambda(t)\,|\psi(t)\rangle\,.$$

Wir betrachten nun einen (i.a. nichtlinearen!) Operator $\mathcal{B}(t)$, für den gilt

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = [\mathcal{B},\mathcal{H}].$$

Die Operatoren $\mathcal{B}$ und $\mathcal{H}$ bezeichnet man dann als *Lax-Paar.*

a) Zeige zunächst:

$$(\mathcal{H}-\lambda)\left(\frac{\partial\,|\psi\rangle}{\partial t} - \mathcal{B}\,|\psi\rangle\right) = \lambda_t\,|\psi\rangle\,,$$

wobei $\lambda_t := \frac{\partial\lambda}{\partial t}$.

b) Folgere aus a): $\lambda_t = 0$, d.h. das Spektrum von $\mathcal{H}(t)$ ist zeitunabhängig.
Tip: Benutze die Selbstadjungiertheit von $\mathcal{H}$.

c) Wir betrachten speziell den Schrödinger-Operator $\mathcal{H} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)$ und $\mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial x}$. Zeige, dass das Spektrum von $\mathcal{H}$ zeitunabhängig ist, falls $V_t = V_x$. Finde ein Beispiel für ein solches Potential.

d) Als zweites Beispiel betrachten wir wieder den Schrödinger-Operator aus c) und

$$\mathcal{B} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + b\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}b$$

mit $b = -\frac{3}{4}V$. Zeige, dass $\mathcal{B}$ und $\mathcal{H}$ ein Lax-Paar bilden, falls

$$V_t = \frac{1}{4}V_{xxx} - \frac{3}{2}VV_x.$$

Somit folgt: Erfüllt das Potential V die KdV-Gleichung, so ist das Spektrum der entsprechenden Schrödinger-Gleichung zeitunabhängig.

Bem.: Eine Konsequenz der obigen Zusammenhänge ist, dass man "physikalische Methoden" (z.B. die sog. "inverse Streutheorie") zur Lösung partieller DGLen einsetzen kann.

Besprechung der Aufgaben: 20. Januar 2004, 13^{45} Uhr.

Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter `www.thp.uni-koeln.de/~as`.