1. Übung zur Vorlesung
Stark korrelierte Systeme der Festkörperphysik

im Sommersemester 2003

1. Spinoperatoren

Zeige explizit, dass die in der Vorlesung definierten Operatoren

$$\mathbf{S}_j = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} c_{j\alpha}^\dagger \tau_{\alpha\beta} c_{j\beta}$$

die bekannten Vertauschungsrelationen für Drehimpulsoperatoren erfüllen. Dabei ist $\tau = (\tau^x, \tau^y, \tau^z)$ mit den Pauli-Matrizen τ^α (indiziert durch $\alpha, \beta =\uparrow, \downarrow$). Die Operatoren $c_{j\alpha}$ etc. seien Fermioperatoren.

2. Spinaustausch

Zeige, dass sich der Operator P_{ij}, der zwei Spins i und j (mit Spin 1/2) miteinander vertauscht, durch die Spinoperatoren $\mathbf{S}_j$ gemäß

$$P_{ij} = 2\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \frac{1}{2}$$

ausdrücken lässt.

3. XXZ-Modell

Zeige, dass sich das relative Vorzeichen der Anisotropie $\Delta = J_z/J_{xy}$ des XXZ-Modells

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{L} \left[J_{xy} \left(S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y \right) + J_z S_j^z S_{j+1}^z \right]$$

durch eine geeignete Transformation ändern lässt ($\Delta \to -\Delta$).

4. Jordan-Wigner-Transformation

a) Zeige, dass σ_j^+ etc. die Drehimpulsvertauschungsrelationen erfüllen, falls $c_j^\dagger$ etc. Fermi-Operatoren sind.

b) Wie lautet die "Umkehrung" der Jordan-Wigner-Transformation?

c) Diskutiere die Anwendbarkeit der Jordan-Wigner-Transformation in Dimensionen $d > 1$.

(b.w.)

5. XY-Modell und freie Fermionen

In der Vorlesung wurde ein allgemeines Verfahren zur Diagonalisierung von fermionischen Bilinearformen skizziert. Im konkreten Fall des XY-Modells ist es — im Gegensatz zur vorgestellten Methode — einfacher, zunächst die Fourier- und dann die Bogoliubov-Transformation auszuführen. Diagonalisiere auf diese Art und Weise den Hamiltonoperator

$$\mathcal{H} = -\sum_{j=1}^{L} \left[\left(c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j \right) + \gamma \left(c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger + c_{j+1} c_j \right) + 2B c_j^\dagger c_j \right] .$$

(mit periodischen Randbedingungen).

Besprechung der Aufgaben: 6. Mai 2003, 15^{45} Uhr