12. Übung zur Vorlesung
Stark korrelierte Systeme der Festkörperphysik

im Sommersemester 2003

41. Teilchen-Loch-Anregungen und chemisches Potential

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Teilchen-Loch-Anregungen durch die Energiefunktion

$$2\pi\epsilon(k) - \int_{-Q}^{Q} h(\sin k - \sin \tilde{k}) \cos \tilde{k}\ \epsilon(\tilde{k}) d\tilde{k} = -2\pi(2\cos k + \mu)$$

beschrieben werden.

a) Zeige, dass gilt: $\epsilon(k) = \epsilon(-k) = \epsilon(k + 2\pi) = \epsilon(\pi - k) - 4\cos k$.

b) Bestimme $\epsilon(k)$ bei Halbfüllung ($Q = \pi$) explizit!

c) Bestimme das chemische Potential μ bei Halbfüllung aus der Bedingung $\epsilon(\pm Q) = 0$. Vergleiche mit dem in der Vorlesung angegebenen Ausdruck für μ_-.

Tip: $\frac{J_1(\omega)}{\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega \sin k} \cos^2 k dk$.

42. Attraktives Hubbard-Modell

a) Zeige: Ist $\{k_j, \lambda_\alpha\}$ eine Lösung der Bethe-Ansatz-Gleichungen für ein Hubbard-Modell mit Coulomb-Wechselwirkung U, so ist $\{\pi + k_j, -\lambda_\alpha\}$ eine Lösung für $-U$.
Bem.: L sei gerade!

b) Wir betrachten den Grundzustand eines repulsiven Hubbard-Modells bei Halbfüllung und ersetzen im Ausdruck für die Grundzustandsenergie $U \to |U|$. Für $U < 0$ haben die Anregungen mit Doppelbesetzungen negative Anregungsenergien. Berechne die Energie eines "angeregten" Zustandes, bei dem *alle* Elektronen zu 2-strings $k_j^\pm$ ($j = 1, \ldots, L/2$) gepaart werden. Benutze dabei die in Vorlesung hergeleitete Anregungsenergie $\epsilon_c(k)$ für ein Paar. Warum ist das Ergebnis erstaunlich?

Tip: Untersuche die Symmetrien von $\hat{\epsilon}(k) := \epsilon(k) + 2\cos k$. Verwende außerdem die in der Vorlesung angegebene Beziehung $E_0/L = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \epsilon(k) dk$.

43. Homogene Funktionen

Zeige: Eine Funktion $f(\vec{x})$ ist homogen vom Grade α (d.h. $f(\lambda\vec{x}) = \lambda^\alpha f(\vec{x})$ für $x \in \mathbb{R}^d$), genau dann wenn gilt

$$\vec{x} \cdot \nabla f(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}).$$

Folgere im Fall $d = 1$, dass hierdurch die Funktion $f(x)$ weitgehend bestimmt ist.

Besprechung der Aufgaben: 29. Juli 2003, 15^{15} Uhr