10. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2005/2006

1. Trigonometrische Funktionen

a) Zeigen Sie ausgehend von den Definitionen der trigonometrischen Funktionen, dass

$$\cos^2\phi = \frac{1}{1+\tan^2\phi} \quad \text{und} \quad \sin^2\phi = \frac{1}{1+\cot^2\phi} \ .$$

b) Zeigen Sie

1. $\sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi \quad \text{bzw.} \quad \cos(2\phi) = 2\cos^2\phi - 1$,
2. $\cos\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\phi)} \quad \text{für} \quad \phi \in [-\pi,\pi]$,
3. $\sin\phi_1 + \sin\phi_2 = 2\,\sin\frac{(\phi_1+\phi_2)}{2}\cos\frac{(\phi_1-\phi_2)}{2}$.

mit Hilfe der bekannten Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\phi_1 \pm \phi_2) &= \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2 \pm \cos\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \,, \\ \cos(\phi_1 \pm \phi_2) &= \cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2 \mp \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \,. \end{aligned}$$

2. Hyperbolische Funktionen

Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen der hyperbolischen Funktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

folgende Beziehungen:

1. $\sinh(-x) = -\sinh(x) \quad \text{bzw.} \quad \cosh(-x) = \cosh(x)$
2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
3. $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$
4. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$

3. Hyperbolische Umkehrfunktion

Zeigen Sie

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

ausgehend von den Definitionen der elementaren Funktionen.