14. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2005/2006

1. Uneigentliche Integrale

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

b) Für welche r ist das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^r}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{x}{(1+x^2)^r}\,dx$$

konvergent?

2. Komplexe Zahlen I

a) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil von $z = x + iy$ wie folgt erhalten werden können:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i} .$$

b) Berechnen Sie $(2+2i)^2 + (2-2i)^2$ und $\frac{(-2+3i)^2}{4-4i}$.

c) Bestimmen Sie für $z = 1 + \sqrt{3}\, i$ die reelle Zahlen a und ϕ so, dass $z = a \exp(i\phi)$.

d) Finden Sie alle Werte von $\sqrt[5]{-1}$.

e) Nun betrachten wir zwei komplexe Zahlen $z_k = x_k + iy_k$ mit $k = 1, 2$. Zeigen Sie, dass

1. $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$,
2. $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$,
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

3. Komplexe Zahlen II

Die trigonometrische Funktionen können durch die Exponentialfunktion mit komplexen Argumenten dargestellt werden:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \ .$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass:

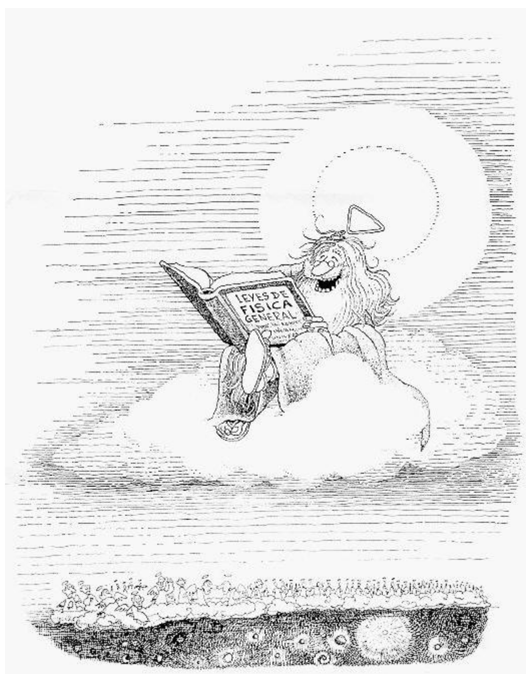
a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

b) $\sin z = -i\sinh(iz)$ bzw. $\cos z = \cosh(iz)$.

c) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$. (Formel von Moivre)

Finden Sie ausgehend von c) eine Formel für $\cos 2\alpha$ bzw. $\sin 2\alpha$ sowie $\cos 3\alpha$ bzw. $\sin 3\alpha$.

— The End —



Wir wünschen Ihnen viel Erfolg im Studium!