6. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2005/2006

Definitionen:

1. Gegeben seien die Matrizen A und B, wobei die Spaltenzahl der Matrix A gleich der Zeilenzahl der Matrix B ist. Dann ist das Produkt $AB =: C$ wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & \boxed{b_{ij}} & \cdots & b_{ik} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \boxed{b_{nj}} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{ik} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

   wobei $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{lj}$ (d.h. 'Zeile mal Spalte').

2. Eine Matrix heißt zu einer gegebenen $n \times n$-Matrix A inverse, hinfort mit A^{-1} bezeichnet, falls sie die folgende Eigenschaft hat:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \quad \text{mit} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Sofern $|A| \neq 0$ erfüllt ist, findet man die inverse Matrix A^{-1} durch folgende Relation:

$$A^{-1} = (x_{ij}) \quad \text{mit} \quad x_{ji} = \frac{(-1)^{i-j}|A_{ij}|}{|A|}.$$

   Dabei ist $|A_{ij}|$ die Unterdeterminante von A, die man durch Streichen der i. Zeile und j. Spalte aus der Matrix (a_{ij}) bildet. Man beachte die Vertauschung der Indizes in der oberen Gleichung!

1. Aufgabe

Berechnen Sie jeweils die Produkte AB und BA aus

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ist das Matrixprodukt kommutativ?

2. Aufgabe

Wie heißen die Inversen A^{-1}, B^{-1} von $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ bzw. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

3. Aufgabe

Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ durch Konstruktion von A^{-1} nach $\vec{x}$ auf. Dabei sind:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. Aufgabe

Berechnen Sie die Gleichung $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4-\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0.$

5. Aufgabe

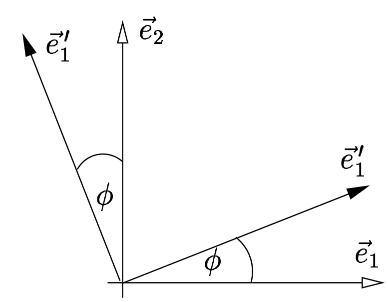
Gegeben sei $D_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Determinanten von D_1, D_2 und $D_2 D_1$.

b) Was wird durch die drei Matrizen beschrieben?

6. Aufgabe

Die Vektoren $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ gehen aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ durch Drehung um den Winkel ϕ hervor (vgl. Skizze).



a) Drücken Sie $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ durch $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ aus.

b) Bestimmen Sie die Drehmatrix $D(\phi)$ und berechnen Sie deren Determinante

c) Gilt $D(\phi)D(\psi) = D(\psi)D(\phi)$?