3. Übung zur Physik des Straßenverkehrs

im Wintersemester 2001/2002

12. Optimal-Velocity-Modell numerisch

Bestimme numerisch das Fundamentaldiagramm des Optimal-Velocity-Modells. Da die Sensitivität τ lediglich die Zeit reskaliert, kann man o.B.d.A. $\tau = 1$ setzen. Benutze die in der Vorlesung angegebene Form

$$V_{\rm opt}(\Delta x) = \tanh(\Delta x - 2) + \tanh 2$$

und diskretisiere die Zeitableitung (z.B. durch ein Runge-Kutta-Verfahren). Als Zeitdiskretisierung wähle etwa $\Delta t = 0.01$ und als Systemlänge (mit periodischen Randbedingungen) $L = 100$. Variiere dann die Zahl der Fahrzeuge. Betrachte verschiedene Anfangsbedingungen (z.B. annähernd äquidistant oder einen großen Stau).
Bestimme den Fluß nach etwa 1000 Zeitschritten Aufwärmphase (um den stationären Zustand zu erreichen) durch Mittelung über die nächsten 10000 Zeitschritte. Vergleiche die Ergebnisse, die man durch a) Messung der mittleren Umrundungszeit T und b) durch Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit in jedem Zeitschritt erhält.
Überprüfe auch, ob nach 1000 Zeitschritten wirklich schon der stationäre Zustand erreicht ist. Welche Auswirkungen hat die Größe der Diskretisierung Δt bzw. das Diskretisierungsschema?

13. Optimal-Velocity-Modell analytisch

Betrachte das Optimal-Velocity-Modell mit der OV-Funktion

$$V_{\rm opt}(\Delta x) = v_{\max}\Theta(\Delta x - d)$$

mit einer Konstanten d. $\Theta(x)$ ist dabei die Heavisidesche Sprungfunktion mit $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$.
a) Bestimme die Lösung der Bewegungsgleichung für $x(t = 0) = x_0$ und $v(t = 0) = v_0$.
(Tip: Unterscheide die Fälle $\Delta x < d$ und $\Delta x > d$.)
b) Untersuche die Auflösung eines Staus mit N Fahrzeugen bei $x_n(t = 0) = -n\Delta x_J$ mit dem mittleren Abstand $\Delta x_J \leq d$ im Stau. Es sei t_n der Zeitpunkt, zu dem der Abstand zum Vordermann den Wert d erreicht: $\Delta x_n(t_n) = d$. Leite unter der Annahme $\Delta t := t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \ldots = t_N - t_{N-1}$ die Beziehung $\Delta x_J + v_{\max}\Delta t = \Delta x_F$ ab, mit $\Delta x_F := \lim_{t\to\infty} \Delta x_n(t)$.
c) Untersuche analog zu b) das Wachstum eines Staus und zeige so:

$$\Delta x_F = d + \frac{v_{\max}\Delta t}{2}, \qquad \Delta x_J = d - \frac{v_{\max}\Delta t}{2}.$$

Leite folgende Gleichung zur Bestimmung von τ ab:

$$\frac{\Delta t}{\tau} = 2\left(1 - e^{-\Delta t/\tau}\right).$$

14. Unfallfreiheit im Krauß-Modell

Begründe die Beziehung

$$d(v_n) + v_n\tau \leq d(v_{n+1}) + s_n \qquad (*)$$

wobei $d(v)$ der Bremsweg bei der Geschwindigkeit v und konstanter Verzögerung b ist.
Betrachte den Fall der Gleichheit in $(*)$ und entwickele beide Seiten in 1. Ordnung um $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_n + v_{n+1})$. Leite hieraus die in der Vorlesung angegebene Bedingung für Unfallfreiheit her.

15. Geordnet-sequentielle Dynamik

Begründe, daß i.a. die Teilchen-sequentielle und die Gitter-sequentielle Dynamik zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.
Tip: Es genügt, ein Teilchen zu betrachten.

16. Master-Gleichung für den Random Walk

Wie lautet die Master-Gleichung (in kontinuierlicher Zeit) für die Bewegung *eines* Teilchens, das mit der Rate D_R nach rechts (zu $x+1$) und mit der Rate D_L nach links (zu $x-1$) hüpft.
Bestimme die erzeugende Funktion

$$\tilde{P}(k,t) := \frac{1}{L}\sum_{x=1}^{L} P(x,t)e^{i2\pi kx/L}$$

für ein periodisches System mit L Gitterplätzen.
Was ergibt sich im stationären Zustand?
Tip: $P(x,t) =$ Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t am Ort x zu finden.