
Andreas Schadschneider

Physik des Straßenverkehrs

Version: 23. April 2004

Wintersemester 2001/2002
Sommersemester 2004

Vorbemerkungen

Die Vorlesung soll als Beispiel der Anwendung physikalischer Methoden auf ein interdisziplinäres Problem gesehen werden. Viele der vorgestellten Techniken lassen sich auch in anderen Bereichen anwenden. Trotz der offensichtlichen praktischen Relevanz ist das Gebiet noch sehr stark im Fluß. Gerade in den letzten fünf Jahren hat man einige interessante neue Entdeckungen gemacht.

Zusätzlich zur Vorlesung werden in unregelmäßigen Abständen begleitende Übungen angeboten. Diese sollen in erster Linie zum Nachdenken anregen.

Als zusätzliche begleitende Literatur, in der einzelne Aspekte ausführlicher besprochen werden, empfehle ich

- D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider:
Statistical physics of vehicular traffic and some related systems,
Physics Reports **329**, 199 (2000) [cond-mat/0007053]
- D. Helbing:
Traffic and related self-driven many-particle systems,
Reviews in Modern Physics **73**, 1067 (2001) [cond-mat/0012229]
- D. Helbing: *Verkehrsdynamik*, Springer Verlag (1997)

Weitere Literaturhinweise werden in der Vorlesung und dieser Ausarbeitung gegeben.

Die bei den beiden ersten Artikeln angegebenen cond-mat Nummern beziehen sich auf den sog. Preprint server im Internet. Dort lassen sich die Manuskripte z.B. über

<http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/0007053>

abrufen. Links befinden sich auf meiner Homepage.

Für Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar. Sie können auch per email an mich (as@thp.uni-koeln.de) geschickt werden. Die jeweils aktuellste Version des Skripts ist im Internet über meine Homepage

<http://www.thp.uni-koeln.de/~as/as.html>

verfügbar.

Andreas Schadschneider

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen	3
I.1 Einleitung	3
I.2 Empirische Daten	5
I.2.1 Meßmethoden	5
I.2.2 Meßgrößen	6
I.2.3 Empirische Ergebnisse	8
II Modellklassen	17
II.1 Hydrodynamische Modelle	17
II.1.1 Lighthill-Whitham-Theorie	18
II.1.2 Burgers-Gleichung	21
II.1.3 Impulsgleichung und Fluktuationen	24
II.1.4 Payne-Modell und Varianten	25
II.1.5 Allgemeine Struktur hydrodynamischer Modelle	27
II.1.6 Instabilität und Stautestehung	29
II.2 Gaskinetische Modelle	33
II.2.1 Prigogine-Herman-Modell	34
II.2.2 Paveri-Fontana-Modell	36
II.2.3 Gaskinetische Herleitung makroskopischer Gleichungen	38
II.3 Fahrzeugfolge-Modelle	41
II.3.1 Follow-the-Leader-Modelle	41
II.3.2 Optimal-Velocity-Modell	43
II.3.3 Intelligent-Driver-Modell	52
II.4 Coupled-Map-Modelle	54
II.4.1 Yukawa-Kikuchi-Modell	55
II.4.2 Coupled-Map-OV-Modell	57
II.4.3 Nagel-Herrmann-Modell	57
II.4.4 Krauß-Modell	58
III Zellularautomaten-Modelle	63
III.1 Nagel-Schreckenberg-Modell	63
III.1.1 Fundamentaldiagramm	67

III.1.2	Mean-Field-Theorie	70
III.1.3	Cluster-Approximation	74
III.1.4	Car-Oriented-Mean-Field (COMF)	76
III.1.5	Paradiesisches Mean-Field	81
III.1.6	Phasenübergang	85
III.2	Nichtgleichgewichtseffekte	91
III.2.1	Unordnung und Defekte	91
III.2.2	Offene Randbedingungen	100
III.3	Verallgemeinerungen des NaSch-Modells	107
III.3.1	VDR-Modell	107
III.3.2	Bremslicht-Modell	110
III.4	Mehrspurverkehr	114
III.5	Stadtverkehr	116
III.5.1	Biham-Middleton-Levine-Modell	117
III.5.2	Chowdhury-Schadschneider-Modell	121
III.6	Fußgängerdynamik	125
III.6.1	Phänomenologie	125
III.6.2	Social-Force-Modell	129
III.6.3	Bionisches Zellularautomatenmodell	130
A	Ergänzungen	133
A.1	Numerische Lösung von hydrodynamischen Gleichungen	133
A.2	Theorie stochastischer Systeme	136
A.2.1	Mastergleichung	136
B	Übungen	141
B.1	Lösungen zu Übung 1	144
B.2	Lösungen zu Übung 2	147
B.3	Lösungen zu Übung 3	150
B.4	Lösungen zu Übung 4	153

Kapitel I

Grundlagen

In der Vorlesung soll am Beispiel des Straßenverkehrs die Anwendung physikalischer Methoden auf eine interdisziplinäre Fragestellung demonstriert werden. Wir werden sehen, daß diese Methoden sowohl bei der empirischen Untersuchung als auch bei der Entwicklung von Modellen hilfreich sind. Das Spektrum der zum Einsatz kommenden Verfahren deckt dabei fast das gesamte Feld der klassischen Physik ab, von der klassischen Mechanik und Hydrodynamik bis hin zur statistischen Physik, insbesondere der Nichtgleichgewichtssysteme. Die unterschiedlichsten mathematischen Methoden werden dabei auftauchen, von der Numerik (Monte-Carlo-Simulation, numerische Lösung partieller DGL) bis hin zu analytischen Verfahren aus anderen Bereichen der Physik (Matrixprodukt-Ansatz, Bethe-Ansatz).

I.1 Einleitung

Folgendes Zitat des Verkehrsforschers H. Greenberg aus dem Jahre 1959 gilt eigentlich heute immer noch bzw. in noch viel stärkerem Maße:

The volume of vehicular traffic in the past several years has rapidly outstripped the capacities of the nation's highways. It has become increasingly necessary to understand the dynamics of traffic flow and obtain a mathematical description of the process.

Verkehrsprobleme sind uns aus dem Alltag wohlbekannt. Hohes Verkehrsaufkommen führt oft genug zu nervenden Staus und fügt darüber hinaus der Volkswirtschaft erheblich Schaden zu. Es ist deshalb klar, daß ein allgemeines Verständnis der Mechanismen des Straßenverkehrs wünschenswert ist, um somit z.B. Möglichkeit der Verkehrsoptimierung (z.B. zur Stauvermeidung) zu haben.

Bevor wir uns mit den grundlegenden Phänomenen und deren Modellierung beschäftigen, möchte ich kurz ein paar Zahlenwerte anführen, die die Verkehrsproblematik genauer beleuchten.

Die Verkehrsleistung in den alten Bundesländern hat in der Zeit von 1960 bis 1995 drastisch zugenommen. Aufgeteilt auf die verschiedenen Verkehrsmittel ergeben sich folgende Steige-

rungsraten:

Auto/Motorrad: +163%

Flugzeug: +200%

öffentlicher Nahverkehr: +25%

Bahn/öffentlicher Fernverkehr: +0%

Man sieht, daß gerade der Individualverkehr stark zugelegt hat. Die Zunahme bei Flugzeugen kommt in erster Linie durch verstärkte Fernreisen im Urlaub zustande.

Der Wunsch nach Mobilität bei gleichzeitig Wahrung der Individualität spiegelt sich auch in der Zahl der Autos wieder. In der Bundesrepublik mit seinen etwa 80 Millionen Einwohnern besitzt mittlerweile fast jeder Zweite einen PKW. Die durchschnittliche Fahrleistung pro Jahr beträgt etwa 12400 km. Trotz dieser Zahlen erwartet man bis ins Jahr 2020 einen weiteren Zuwachs der Zulassung um 10 – 20%.

Folgende Tabelle zeigt die Entwicklung der Gesamtfahrleistung (in Milliarden km):

	1975	1994
Gesamtfahrleistung	302,1	590,9
davon PKW	260,5	505,7
davon LKW	25,6	51,0

Im Vergleich dazu hat die Länge der öffentlichen Straßen im gleichen Zeitraum deutlich weniger zugenommen (Angaben in 1000 km) :

	1975	1994
Gesamtlänge	169,1	228,6
davon Autobahnen	6,2	11,1

Als Vergleich noch die von öffentlichen Straßen bedeckte Fläche (in km²):

	1975	1994
Gesamtfläche	2777,8	3061,9
davon Autobahnen	154,8	223,2

Das Ziel in der Zukunft muß also eine bessere Ausnutzung der vorhandenen Infrastruktur sein, da es kaum möglich ist, in beliebigem Maße neue Straßen zu bauen. Ein wichtiges Feld, das sich mit dieser Problematik beschäftigt, ist die sogenannte *Telematik*. Hierunter versteht man alle Methoden zur elektronischen Unterstützung des Verkehrs und seiner Infrastruktur. Dies umfaßt Informations-, Kommunikations- und Leitsysteme.

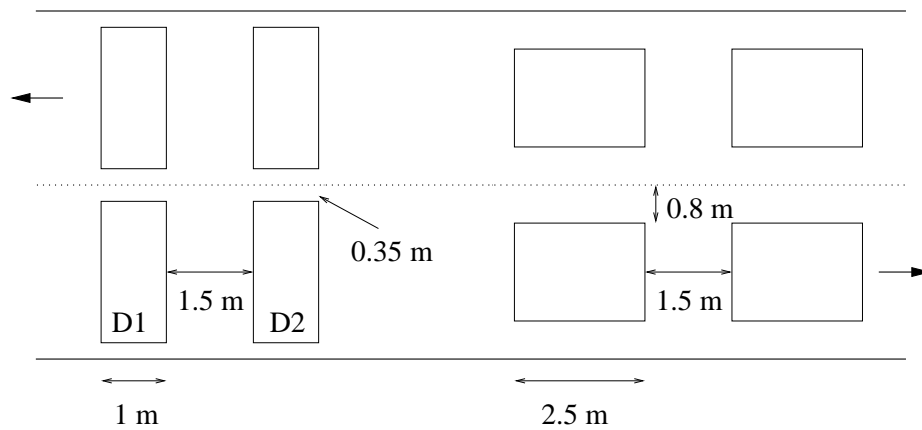


Abbildung I.2.1: Zweisehleifendetektoren.

I.2 Empirische Daten

Neben der Modellierung von Straßenverkehr spielt natürlich auch die empirische Untersuchung eine wichtige Rolle. Dabei müssen Verkehrsdaten erfaßt und analysiert werden. Im folgenden werden die wichtigsten Verfahren kurz vorgestellt.

I.2.1 Meßmethoden

Die wichtigste Klasse von Detektoren, die zur Messung des aktuellen Verkehrszustandes verwendet werden, sind sogenannte *Festdetektoren* oder *Induktionsschleifen*. Abb. I.2.1 zeigt die beiden Typen, die zur Zeit auf deutschen Straßen zum Einsatz kommen. Es handelt sich um *Zweisehleifendetektoren*, wobei man zwischen kurzen und langen Schleifen unterscheidet. Im Betrieb wird der Zustand der Schleifen mit einer Frequenz von einigen wenigen bis zu etwa 150 Hz abgefragt. Dabei werden im Prinzip nur Zeiten gemessen, aus denen dann andere relevante Größen, wie z.B. die Dichte oder Geschwindigkeiten, bestimmt werden müssen. Außerdem ist zu beachten, daß i.a. nur (hinreichend schnell) bewegte Fahrzeuge detektiert werden können, da nur dann ein Signal induziert wird.

Bei der Induktionsschleife handelt es sich um eine in den Fahrbelag eingelassene stromdurchflossene Leiterschleife, die von einem hochfrequenten Wechselstrom (ca. $40 \cdot \cdot \cdot 100$ kHz) durchflossen wird. Das hierdurch entstehende magnetische Wechselfeld erzeugt in den Metallteilen der passierenden Fahrzeuge Wirbelströme. Diese beeinflussen ihrerseits das Wechselfeld, so daß die Induktivität der Schleife sinkt. Der resultierende Anstieg der Schleifenfrequenz wird dann von einer Auswertungseinheit registriert.

Neben den Induktionsschleifen gibt es weitere Arten von Festdetektoren, z.B. Infrarot-, Radar- oder Ultraschallmessungen. Vereinzelt werden auch fest installierte Videokameras zur Datenerfassung eingesetzt. Allerdings ist die Auswertung der Videodaten nicht ganz einfach.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der sog. *Überkopfüberwachung*. Dies stellt häufig die einzige Meßmethode dar, mit der Messungen an längeren Streckenabschnitten durchgeführt werden können. Ein typisches Beispiel sind hier Videokameras, die Aufnahmen aus einem Helikopter

heraus machen. Neuerdings werden auch Kameras an Brücken fest installiert.

Schließlich gibt es noch *Floating-Car-Messungen*. Hierbei handelt es sich um Messungen aus einem fahrenden Fahrzeug heraus. Typischerweise wird dabei die Eigengeschwindigkeit, der Abstand und die Differenzgeschwindigkeit zum Vordermann gemessen, wobei z.B. Radar oder gepulste IR-Laser zum Einsatz kommen. Natürlich ist diese Methode problematisch, z.B. durch subjektive Einflüsse wie das Verhalten des Testfahrers. Außerdem kann es zu Meßfehlern kommen, wenn z.B. der Laser in engen Kurven den Kontakt zum Vordermann verliert.

I.2.2 Meßgrößen

Im folgenden gehen wir davon aus, daß wir Meßdaten von einer Induktionsschleife erhalten haben. Wie schon erwähnt, messen diese nur Zeiten oder Zeitdifferenzen. Allerdings wird auch manchmal die Form des induzierten elektrischen Signals aufgezeichnet, da sich hieraus u.U. zusätzliche Informationen ableiten lassen.

Die wichtigste Meßgröße ist der Fluß oder Strom J . Er ist definiert als die Zahl der Fahrzeuge, die pro Zeiteinheit den Detektor passieren¹.

Da die Detektoren aus zwei Schleifen in kurzem Abstand bestehen, läßt sich die Geschwindigkeit v_n des n -ten Fahrzeugs relativ leicht bestimmen. Ist t_{D_1} bzw. t_{D_2} die Zeit, zu der das betrachtete Fahrzeug den Detektor D1 bzw. D2 passiert (siehe Abb. I.2.1) und d_D der Abstand der Detektoren, so erhält man die Geschwindigkeit über

$$v_n = \frac{d_D}{t_{D_2} - t_{D_1}}. \quad (\text{I.2.1})$$

Hierbei wurde implizit angenommen, daß sich die Geschwindigkeit im Intervall $[t_{D_1}, t_{D_2}]$ nicht ändert. Dies ist auf Grund des geringen Abstandes der Schleifen i.a. gut erfüllt. Eine Ausnahme bilden allerdings Fahrzeuge, die in einem Stau stehen und z.B. nach einer kurzen Fahrstrecke zwischen den Schleifen stehen bleiben. Wir werden auf dieses Problem bei der Dichtebestimmung zurück kommen.

Weitere Information erhält man aus der Belegungszeit t_B . Der Detektor liefert ein binäres Signal, der für jeden Abtastzyklus angibt, ob der Detektor belegt oder leer ist. Aus der Belegungszeit t_B , also der Zeit, die der Detektor belegt ist, läßt sich dann über

$$l_{F,n} = v_n t_{B,n} - l_D \quad (\text{I.2.2})$$

die Fahrzeuglänge $l_{F,n}$ des n -ten Fahrzeugs bestimmen. l_D ist hierbei die Länge des Detektors. Man bezeichnet $l_{F,n}$ auch als die *elektrische Länge* des Fahrzeugs. Sie ist i.a. kleiner als die physikalische Länge l_{phys} , da nur massiv-metallische Teile ein Signal induzieren. $l_{F,n}$ kann im Prinzip genutzt werden², um den Fahrzeugtyp zu bestimmen. I.a. unterscheidet man zwischen PKW (mit/ohne Anhänger), LKW, Lastzügen und Motorrädern. Ist der Fahrzeugtyp bekannt, so kann man l_{phys} durch geeignete Korrekturfaktoren aus $l_{F,n}$ bestimmen.

¹Technisch kann man dies z.B. aus der Zahl der ansteigenden Flanken des Induktionssignals ableiten.

²z.B. zusammen mit der Zahl der Achsen, die man u.U. aus der Signalform ableiten kann.

Eine wichtige Größe zur Charakterisierung der Verkehrssituation ist der *zeitliche Abstand* Δt_n zweier aufeinanderfolgender Fahrzeuge. Der Abstand des n -ten Fahrzeugs zum Vordermann $n - 1$ ist gegeben durch

$$\Delta t_n = t_{D_1,n} - t_{D_1,n-1}. \quad (\text{I.2.3})$$

Hieraus läßt sich der *räumliche Abstand* Δx_n gemäß

$$\Delta x_n = v_n \Delta t_n - l_{F,n} \quad (\text{I.2.4})$$

bestimmen. Dabei wird angenommen, daß sich die Geschwindigkeit v_{n-1} des Vordermannes in der Zeit $[t_{D_1,n-1}, t_{D_1,n}]$ nur unwesentlich ändert. Diese Annahme ist nicht gerechtfertigt für große Zeitlücken, wie sie z.B. im Freiflußbereich oder bei einem totalen Verkehrskollaps auftreten.

Schließlich spielt natürlich die *Dichte* ρ eine wesentliche Rolle. Bei deren Bestimmung aus Messungen an Induktionsschleifen gibt allerdings prinzipielle Probleme. Per Definition ist die Dichte eine räumliche Größe, während die Detektoren nur zeitliche Messungen durchführen können. Zusätzlich treten systematische Fehler auf, da nur bewegte Fahrzeuge detektiert werden. Eine genauere Diskussion dieser Probleme ist Gegenstand von Aufg. 1. Abgesehen von diesen generellen Schwierigkeiten gibt es zwei Methoden, um die Dichte aus den Daten von Induktionsschleifen abzuleiten.

Die erste Methode nutzt die Belegungszeiten $t_{B,n}$. Hieraus läßt sich zunächst über

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N t_{B,n} \quad (\text{I.2.5})$$

eine relative Dichte bestimmen, die auch als *Belegung* bezeichnet wird, wobei im Meßintervall der Länge T gerade N Fahrzeuge den Detektor passiert haben. Offensichtlich ist $0 \leq \tilde{\rho} \leq 1$. Aus der relativen Dichte erhält man dann die "echte" Dichte

$$\rho = \tilde{\rho} \rho_{\max}, \quad (\text{I.2.6})$$

mit der maximalen Dichte ρ_{\max} , die durch den mittleren Platzbedarf l_{\max} eines Fahrzeugs im Stau gegeben ist: $\rho_{\max} = 1/l_{\max}$.

Eine alternative Möglichkeit der Dichtebestimmung verwendet die sog. *hydrodynamische Relation*

$$J = \rho v \quad \text{mit} \quad v = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n. \quad (\text{I.2.7})$$

v ist also die Durchschnittsgeschwindigkeit. Da nur bewegte Fahrzeuge detektiert werden, wird die Durchschnittsgeschwindigkeit i.a. überschätzt und somit die Dichte $\rho = \frac{J}{v}$ unterschätzt. Dies wird in Aufg. 1 diskutiert. Außerdem ist i.a. die Dichte, die aus der Belegung bestimmt wird, größer als die aus der hydrodynamischen Relation berechnete.

Abschließend sei noch angemerkt, daß die Detektoren häufig nicht die *Einzelfahrzeugdaten* abspeichern, sondern zur Datenreduktion eine automatische Mittelung durchführen. Je nach Länge des Mittelungsintervalls unterscheidet man *1-Minuten- und 5-Minuten-Daten*.

I.2.3 Empirische Ergebnisse

In diesem Abschnitt wollen wir einen kurzen Überblick über die wichtigsten Phänomene und Meßgrößen geben, die zur Charakterisierung des Straßenverkehrs verwendet werden. Aufgabe der Verkehrsmodellierung ist es dann, Modelle zu entwickeln, die diese Phänomene reproduzieren können.

Spontane Staubildung

Ein wohlbekanntes Phänomen aus dem Alltag ist die *spontane Staubildung*, auch bekannt als *Stau aus dem Nichts*. Hierbei handelt es sich um Staus, die ohne offensichtlichen äußeren Anlaß entstehen. Zu den offensichtlichen Anläßen gehören z.B. Unfälle, Bauarbeiten oder jede Art von Fahrbahnverengung. Bei dem Stau aus dem Nichts handelt es dagegen um ein *kollektives Phänomen* und gibt dem Physiker wichtige Hinweise, die bei der Modellierung zu berücksichtigen sind.

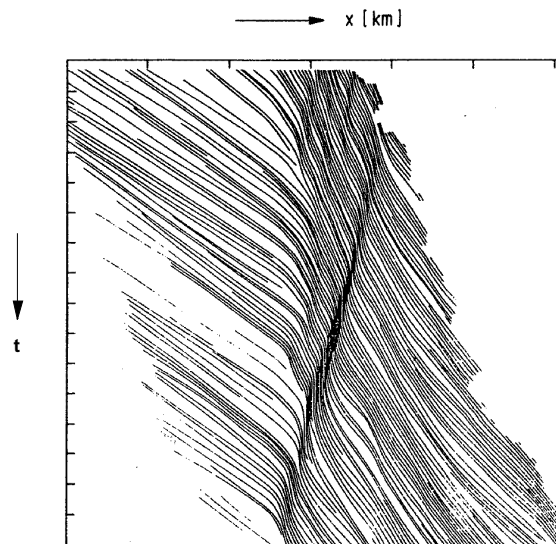


Abbildung I.2.2: Die Trajektorien zeigen die Bewegung einzelner Fahrzeuge auf einer Spur einer mehrspurigen Straße. Die spontane Staubildung ist deutlich zu erkennen, ebenso die Bewegung des Staus gegen die Fahrtrichtung.

Abb. I.2.2 zeigt ein berühmtes empirisches Beispiel für die Existenz der spontanen Staubildung. Jeder Linie entspricht der Trajektorie eines Fahrzeugs³. Diese Trajektorien wurden aus einer Serie von Luftaufnahmen abgeleitet. Man erkennt deutlich, daß sich die Fahrzeuge links mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Dann werden sie gezwungen abzubremsen, stehen für einige Zeit, und fahren dann wieder mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Im Bereich des Staus sind

³Linie, die abrupt enden bzw. beginnen, gehören zu Fahrzeugen, die die Spur wechseln.

die Trajektorien deutlich dichter und fast senkrecht. Bei den Beobachtungen wurde kein äußerer Anlaß für den Stau festgestellt. Ein weiteres Charakteristikum ist die Rückwärtsbewegung des Staus, d.h. die Staufront bewegt sich entgegengesetzt⁴ zur Fahrtrichtung der Autos. Die Geschwindigkeit v_{stau} dieser Bewegung ist eine wichtige Konstante in der Verkehrsforschung. Sie ist weitgehend unabhängig von vielen Details (Land, Wetter, Straßenzustand etc.) und beträgt etwa

$$v_{\text{stau}} \approx 15 \text{ km/h.} \quad (\text{I.2.8})$$

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß die Existenz der spontanen Staubildung von einigen Verkehrsforschern (z.B. C. Daganzo) bezweifelt wird. Sie führen jede Art von Staubildung auf die Existenz sog. *Bottlenecks* zurück. Ein Bottleneck ist dabei eine Inhomogenität auf Grund reproduzierbarer externer Gründe. Dazu zählen neben Fahrbahnverengungen und Auf- und Abfahrten auch sonstige Ablenkung am Fahrbahnrand. Die Auswirkungen solcher Bottlenecks werden wir später ausführlicher untersuchen (siehe Kap. III.2.2).

Fundamentaldiagramm

Die wichtigste Meßgröße zur Charakterisierung des Verkehrs ist das sogenannte *Fundamentaldiagramm*, wie schon aus dem Namen deutlich wird. Hierbei handelt es sich um den funktionalen Zusammenhang $J = J(\rho)$ zwischen dem Strom J und der Dichte ρ . Im folgenden wollen die schematische Struktur des Fundamentaldiagramms diskutieren. Wir orientieren uns dabei an der historischen Entwicklung, in Laufe deren immer wieder neuen Strukturen entdeckt wurden.

Abb. I.2.3 zeigt ein typisches Fundamentaldiagramm aus empirischen Messungen. Jeder Datenpunkt ist aus einer Mittelung von Dichte und Fluß über 5 Minuten hervorgegangen. Man erkennt deutlich zwei getrennte Äste: Einen *Freiflußast* mit positiver Steigung und einen *gestauten Ast* mit negativer Steigung. Im Freiflußast ist die Wechselwirkung der Fahrzeuge miteinander vernachlässigbar. Jedes Auto kann daher mit seiner Wunschgeschwindigkeit $v_{\text{max}}^{(n)}$ fahren, die i.a. mit dem herrschenden Tempolimit übereinstimmt. Die Steigung der Geraden ist daher gerade durch die Wunschgeschwindigkeit gegeben: $\left. \frac{dJ}{d\rho} \right|_{\text{FF}} \approx v_{\text{max}} > 0$. Werden die Wechselwirkungen wichtig, so kommt es zu Abweichung von der Geraden. Ab einer bestimmten Dichte dominieren die Wechselwirkungen und der Fluß nimmt schließlich mit zunehmender Dichte wieder ab: $\left. \frac{dJ}{d\rho} \right|_{\text{S}} < 0$. Dies passiert im gestauten Ast. Dort ist der mittlere Abstand der Fahrzeuge klein, so daß die Wechselwirkung dominiert. Die Geschwindigkeit v_n der Autos ist deutlich kleiner als die Wunschgeschwindigkeit $v_{\text{max}}^{(n)}$ und es kommt zur Bildung von Staus.

Im einfachsten Fall hat das Fundamentaldiagramm die in Abb. I.2.4a dargestellte schematische Form. Der Fluß verschwindet bei verschwindender Dichte und bei der maximalen Dichte ρ_{max} . Dazwischen gibt es genau ein Flußmaximum bei der Dichte ρ_c . Abb. I.2.4b zeigt eine alternative Form des Fundamentaldiagramms, die auf Grund der hydrodynamischen Relation (I.2.7) äquivalent ist. Sie zeigt das anschaulich erwartete Verhalten, daß die Geschwindigkeit monoton fallend von der Dichte abhängt, d.h. $\frac{dv}{d\rho} \leq 0$. Außerdem ist $\lim_{\rho \rightarrow 0} v(\rho) = v_{\text{max}}$. Es gibt noch eine dritte äquivalente Form des Fundamentaldiagramms, nämlich $v = v(J)$. Diese wird gerne von Verkehrsingenieuren benutzt. Für eine genauere Diskussion sei auf Aufg. 3 verwiesen.

⁴In der Verkehrsforschung bezeichnet man dies häufig als *stromaufwärts* (*upstream*).

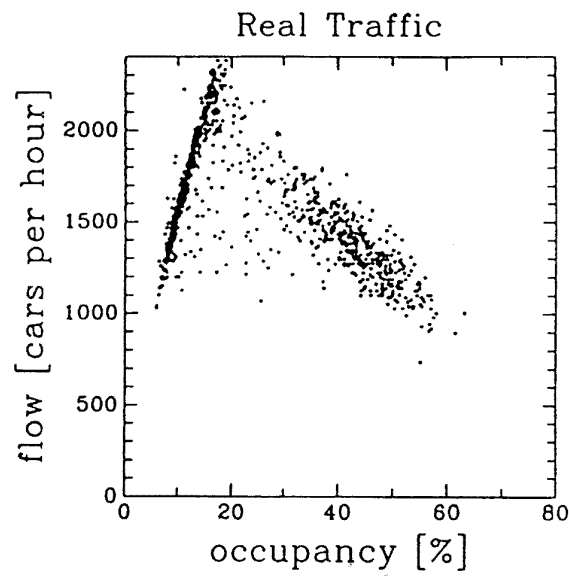


Abbildung I.2.3: Empirisches Fundamentaldiagramm. Jeder Punkt entspricht einer Mittelung über 5 Minuten.

Die empirischen Daten in Abb. I.2.3 lassen schon erahnen, daß das Fundamentaldiagramm mehr Struktur haben kann. Insbesondere in der Nähe des Maximums ist es nicht unbedingt klar, daß Freiflußast und gestauter Ast in einem gemeinsamen Punkt enden. Tatsächlich beobachtet man häufig einen Dichtebereich $[\rho_1, \rho_2]$, in dem der Fluß keine eindeutige Funktion der Dichte mehr ist. Dieser Bereich tritt in der Nähe des Flußmaximums auf (siehe Abb. I.2.5). Man bezeichnet dies auch (aufgrund der Ähnlichkeit mit der Form des griechischen Buchstabens) als *inverse Lambda-Form*. Es zeigt sich, daß Zustände mit Flüssen $J > J(\rho_1)$ nicht stabil, sondern *metastabil* sind. Sie zerfallen bei hinreichend großen Störungen in gestaute Zustände mit entsprechend kleinerem Fluß. Die Differenz $J(\rho_2) - J(\rho_1)$ bezeichnet man auch als *capacity drop*. Später werden wir sehen, daß $J(\rho_1) = J_{\text{out}}$, wobei J_{out} der Ausfluß ist einem großen Stau ist.

In engem Zusammenhang mit der Existenz von metastabilen Zuständen steht das Phänomen der Hysterese. Angenommen, man startet zu einer Zeit t_1 mit einem Fluß und einer Dichte, die einem Punkt auf dem metastabilen Hochflußast liegen. Erhöht man die Dichte weiter, so steigt zunächst der Fluß an. Irgendwann bricht er aber zusammen und man fällt auf den gestauten Ast. Erniedrigt man jetzt die Dichte wieder, so wird der Fluß wieder ansteigen. Da man sich aber auf dem gestauten Ast bewegt, wird der Ausgangsfluß nicht mehr erreicht, wenn man bei der Ausgangsdichte ankommt. Dies erkennt man deutlich auf den empirischen Daten von Abb. I.2.6. Die Zustände auf dem gestauten Ast haben eine typische mikroskopische Struktur. Man beobachtet dort eine *Phasenseparation* in gestaute Bereiche, die aus einem sehr kompakten großen Stau bestehen, und Bereiche mit Freifluß⁵. Im Gegensatz dazu sind die Zustände auf dem Freiflußast räumlich homogen. Wie schon erwähnt, entspricht der Fluß am Schnittpunkt der beiden

⁵Dies bezeichnet man auch als *local cluster Effekt*, siehe Kap. II.1.6.

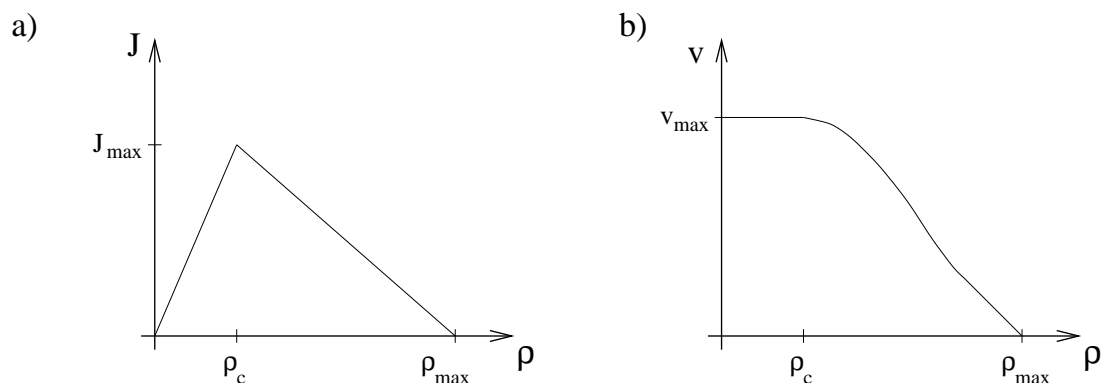
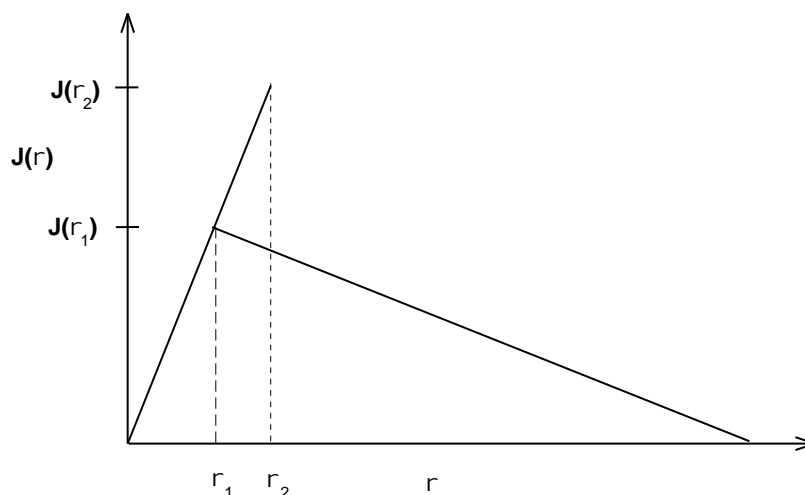
Abbildung I.2.4: Schematisches Fundamentaldiagramm a) $J = J(\rho)$ und b) $v = v(\rho)$.

Abbildung I.2.5: Schematisches Fundamentaldiagramm bei Existenz metastabiler Hochflußzustände.

Äste dem Ausfluß J_{out} aus einem großen Stau. Typisch für die Existenz metastabiler Zustände ist daher, daß der Stauausfluß J_{out} kleiner als der maximal mögliche Fluß J_{\max} ist⁶. Empirisch findet man für den capacity drop

$$\frac{J_{\max}}{J_{\text{out}}} \approx 1.5, \quad (\text{I.2.9})$$

wobei typischerweise $J_{\max} \approx 2500$ veh/h und $\rho_2 \approx 30$ veh/km. Zum Vergleich: Die maximale Dichte ist typischerweise $\rho_{\max} \approx 150$ km/h. Die Größenordnung von J_{\max} wird in Aufg. 4 weiter diskutiert.

Damit ein Stau existieren kann, muß der Ausfluß J_{out} kleiner sein als der Einfluß in den Stau. Bei periodischen Randbedingungen ist diese Bedingung nicht zu realisieren, wenn schon der Stauausfluß gleich dem maximal möglichen Fluß J_{\max} ist. Das macht die Bedingung $J_{\max} > J_{\text{out}}$

⁶ $J_{\max} = J(\rho_2)$

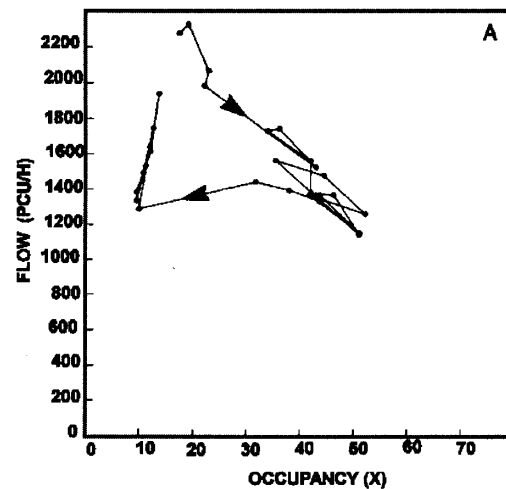


Abbildung I.2.6: Hysterese in empirischen Daten.

für die Existenz von phasenseparierten Zuständen, die dann zu metastabilen Hochflußzuständen und Hysterese führen, verständlich.

Die großen, relativ kompakten Staus werden auch als *wide jams* oder *wide moving jams* bezeichnet. Sie sind charakterisiert als Bereiche sehr hoher Dichte, aber mit vernachlässigbarem Fluß und Geschwindigkeit. Außerdem ist die Länge des Staus deutlich größer als die der Übergangsbereiche am Anfang und Ende. In diesen Übergangsbereichen ändert sich die Geschwindigkeit sehr schnell.

Staus werden durch sehr wenige Parameter charakterisiert, nämlich ihre Dichte ρ_{\max} und den Ausfluß J_{out} . Diese sind annähernd Konstanten, die unabhängig von Wetter, Straßenzustand, Fahrzeugtechnologie etc. sind.

In den letzten Jahren hat man durch sorgfältige Untersuchung der empirischen Daten festgestellt, daß das Fundamentaldiagramm noch komplexer ist. Tatsächlich hat es die in Abb. I.2.7 dargestellte Struktur. Statt eines wohldefinierten Astes gibt es eine ganze "Blase", d.h. es gibt eigentlich keinen funktionalen Zusammenhang $J = J(\rho)$ zwischen Fluß und Dichte mehr. Für größere Dichten kann da der Fluß zu einer Dichte unendlich viele Werte annehmen, was zur Verteilung in einem zweidimensionalen Gebiet führt. Die Zustände in dieser Blase⁷ bezeichnet man als *synchronisierten Verkehr* (Kerner und Rehborn, 1996).

Zunächst einmal kann man sagen, daß alle Zustände, die sich nicht als Freifluß oder *wide jams* klassifizieren lassen, zum synchronisierten Verkehr zu zählen sind. Eine gute Näherung des zu erwartenden Verhaltens ist der wohlbekannte "zähflüssige Verkehr".

Der synchronisierte Verkehr hat eine Reihe charakteristischer Eigenschaften:

- Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist deutlich kleiner als im Freifluß.

⁷Andeutungsweise erkennt man diese schon in Abb. I.2.3.

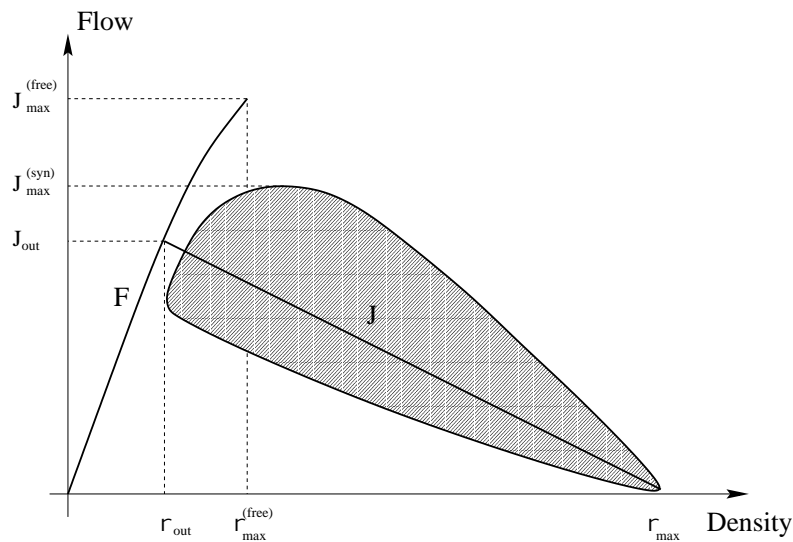


Abbildung I.2.7: Schematisches Fundamentaldiagramm mit synchronisiertem Verkehr.

- Der Fluß kann aber relativ groß werden.
- Die $J(\rho)$ Punkte überdecken einen zweidimensionalen Bereich.
- Die Zeitreihe $(\rho(t_n), J(t_n))$ ist “irregulär”. Damit ist gemeint, daß – im Gegensatz zum Verhalten auf dem Freifluß oder gestauten Ast – eine Erhöhung der Dichte sowohl zu einem höheren als auch zu einem niedrigerem Fluß führen kann.
- Bei Mehrspurverkehr sind die Geschwindigkeiten der Spuren stark korreliert (“synchronisiert”).

Der letzten Eigenschaft verdankt der Zustand seinen Namen. Heute glaubt man allerdings, daß sie eher eine Folge der dynamischen Eigenschaften von synchronisiertem Verkehr ist, die schon bei Einspurverkehr auftreten.

Bei synchronisiertem Verkehr lassen sich noch drei Unterarten unterscheiden. Wir werden später darauf zurückkommen.

Insgesamt unterscheidet man heute also drei verschiedene Phasen im Straßenverkehr:

- Freifluß
- synchronisierten Verkehr
- Staus (wide jams).

Die Phasenübergänge zwischen diesen Phasen sind von 1. Ordnung. Hierbei ändern sich also Größen (z.B. die Geschwindigkeit) unstetig.

Verteilung der Zeitabstände, Optimal-velocity-Kurven

Eine interessante Größe zur Charakterisierung des Verkehrszustandes ist die Verteilung der Zeitabstände Δt_n eines Fahrzeugs zu seinem Vordermann.

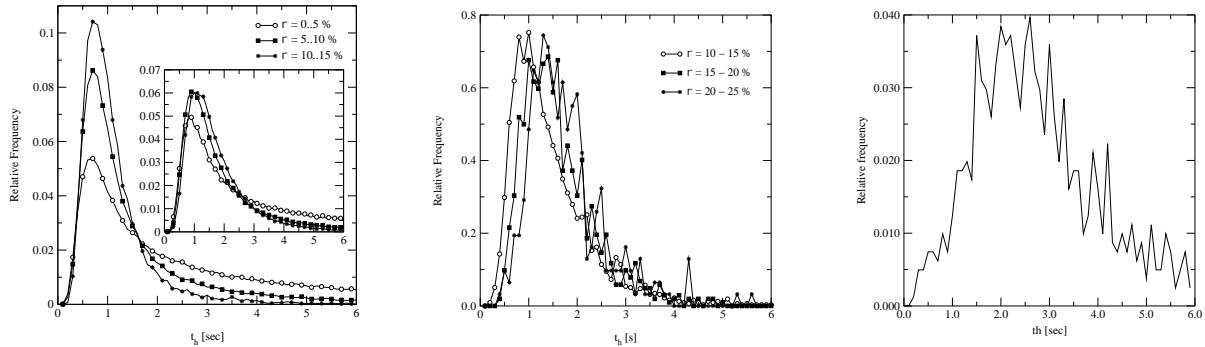


Abbildung I.2.8: Verteilung der Zeitabstände im Freifluß (für zwei verschiedene Autobahnen), synchronisierten Verkehr und im Stau.

In Abb. I.2.8 sind empirisch bestimmte Verteilungen der Zeitabstände in den verschiedenen Phasen gezeigt⁸. Im Freifluß oder synchronisiertem Verkehr erkennt man ein deutlich ausgeprägtes Maximum bei etwa 1 sec. Die Position dieses Maximums hängt nur wenig von der Dichte ab, im Gegensatz zur Form der Verteilung. Im synchronisierten Verkehr liegt das Maximum bei größeren Zeiten als im Freifluß und es gibt weniger kurze Zeitabstände. Im gestauten Bereich wird die Verteilung viel breiter und es gibt auch größere Zeitabstände, die durch Lücken im Stau zustandekommen.

Wichtige Aufschlüsse über das Fahrverhalten gibt auch die sog. *Optimal-Velocity-Kurve (OV-Kurve)*, die die Geschwindigkeit als Funktion des (räumlichen) Abstandes darstellt (siehe Abb. I.2.9). Später (in Abschnitt II.3.2) werden wir ein Modell kennenlernen, das im wesentlichen über die Optimal-Velocity-Kurve definiert ist. Für große Abstände wird die OV-Kurve annähernd konstant, entsprechend der Wunschgeschwindigkeit der Fahrer. Man beachte die Dichteabhängigkeit der Kurven, deren grundlegende Form allerdings relativ universell ist.

Korrelationsfunktionen

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel zur Charakterisierung von Zuständen sind *Korrelationsfunktionen*. Im folgenden seien $x(t)$ und $y(t)$ Zufallsvariablen. Wir können z.B. eine Messung der Geschwindigkeit oder der Dichte als Zufallsprozeß auffassen. Der Grad der Zufälligkeit läßt sich dann mit Hilfe von Korrelationsfunktionen quantifizieren.

⁸Beachte, daß Abb. 7 in dem Übersichtsartikel auf Grund eines Software-Fehlers in der Detektorelektronik nicht korrekt ist!

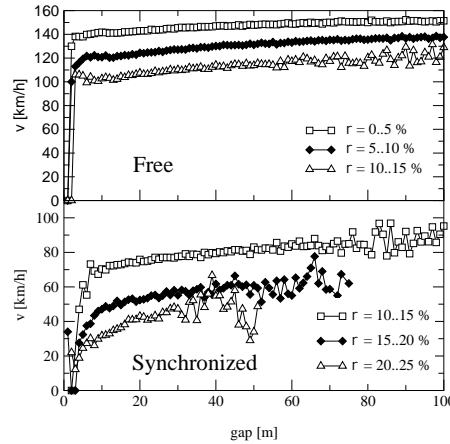


Abbildung I.2.9: Optimal-Velocity-Funktion im Freifluß und synchronisierten Verkehr.

Eine wichtige Korrelationsfunktion ist die sog. *Autokorrelation*

$$a_x(\tau) = \frac{\langle x(t)x(t+\tau) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t+\tau) \rangle}{\sqrt{\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2} \sqrt{\langle x^2(t+\tau) \rangle - \langle x(t+\tau) \rangle^2}}. \quad (\text{I.2.10})$$

Besteht keinerlei Korrelation zwischen den Werten $x(t)$ und $x(t+\tau)$ der Zufallsvariablen x , sind diese also statistisch unabhängig, so ist bekannterweise $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \langle x(t) \rangle \langle x(t+\tau) \rangle$ und somit $a_x(\tau) = 0$. Je stärker $a_x(\tau)$ von Null abweicht, umso größer ist die Korrelation zwischen den Werten.

Eine Verallgemeinerung der Autokorrelation ist die *Kreuzkorrelation*

$$cc_{x,y}(\tau) = \frac{\langle x(t)y(t+\tau) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle y(t+\tau) \rangle}{\sqrt{\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2} \sqrt{\langle y^2(t+\tau) \rangle - \langle y(t+\tau) \rangle^2}}. \quad (\text{I.2.11})$$

$cc_{x,y}(\tau)$ mißt, wie stark der Wert von y zur Zeit $t+\tau$ von dem Wert von x zur Zeit t abhängt. Die Kreuzkorrelation von Dichte ρ und Fluß J läßt sich z.B. sehr gut einsetzen, um die in Abschnitt I.2.3 erwähnte "Irregularität" der Zeitreihe $(\rho(t_n), J(t_n))$ im synchronisierten Verkehr zu quantifizieren. Dort gilt nämlich tatsächlich $cc_{\rho,J}(\tau) \approx 0$, während im Freiflußbereich $cc_{\rho,J}(\tau) \approx 1$ ist, d.h. hier ist der Fluß vollständig durch die Dichte bestimmt.

Kapitel II

Modellklassen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die sehr unterschiedlichen Modellklassen, die bisher zur Beschreibung von Straßenverkehr eingesetzt wurden, zu charakterisieren. Die gängigsten Unterscheidung sind:

Auflösung: mikroskopisch \longleftrightarrow makroskopisch

In mikroskopischen Modellen sind die einzelnen Fahrzeuge unterscheidbar, während in makroskopischen Modellen lediglich Dichten für die Zahl der Fahrzeuge, die Geschwindigkeit etc. betrachtet werden.

Variablen: diskret \longleftrightarrow kontinuierlich

Raum, Zeit und Zustandsvariable können jeweils diskret oder kontinuierlich sein. Dabei sind im Prinzip alle Kombinationen möglich.

Dynamik: deterministisch \longleftrightarrow stochastisch

Modelle mit einer stochastischen Dynamik enthalten Zufallselemente.

Detailgrad: high fidelity \longleftrightarrow low fidelity

Der Detailgrad bezieht sich auf den offensichtlichen Realismus des Modells. High fidelity Modelle versuchen z.B. das Verhalten des Fahrers möglichst realistisch nachzubilden, während low fidelity Modelle mehr darauf abzielen, gewisse Meßgrößen wie z.B. das Fundamentaldiagramm korrekt zu reproduzieren.

II.1 Hydrodynamische Modelle

Bei den hydrodynamischen Modellen handelt es sich um eine makroskopische Beschreibung mit kontinuierlichen Variablen, die meist deterministisch ist. Allgemein wird versucht, die Dynamik der Fahrzeugdichte $\rho(x, t)$, der Geschwindigkeitsdichte $v(x, t)$ und der Stromdichte $J(x, t)$ durch Gleichungen ähnlich der Hydrodynamik zu beschreiben. Man kann sich diese Dichten als Ergebnis einer sog. *coarse-graining* Prozedur vorstellen, bei der man von einer mikroskopischen Beschreibung durch Mittelung über relativ kleine (Zeit-, Raum-)Intervalle zu einer Beschreibung durch Dichten übergeht.

II.1.1 Lighthill-Whitham-Theorie

Ausgangspunkt der Lighthill-Whitham-Theorie ist die Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = 0.} \quad (\text{II.1.1})$$

Diese Gleichung hat die gleiche Struktur wie z.B. die Kontinuitätsgleichung in der Elektrodynamik und spiegelt die Erhaltung der Zahl der Fahrzeuge wieder (siehe Aufg. 2). Muß man zusätzlich Auf- und Abfahrten (an den Orten $x_{\text{auf}}^{(j)}$ bzw. $x_{\text{ab}}^{(j)}$) berücksichtigen, so ist (II.1.1) zu modifizieren

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = \sum_j \alpha_j(x_{\text{auf}}^{(j)}, t) - \sum_j \beta_j(x_{\text{ab}}^{(j)}, t), \quad (\text{II.1.2})$$

wobei α_j bzw. β_j die Raten sind, mit denen Fahrzeuge auf die betrachtete Straße auffahren bzw. sie verlassen.

Die Gleichung (II.1.1) enthält noch zwei unbekannte Funktionen, nämlich die Dichte $\rho(x, t)$ und den Strom $J(x, t)$ (bzw. die Geschwindigkeitsdichte $v(x, t)$, die über $J(x, t) = \rho(x, t)v(x, t)$ mit dem Strom zusammenhängt). Wir benötigen daher eine weitere Beziehung, die uns einen Zusammenhang zwischen diesen Größen liefert. Lighthill und Whitham haben deshalb angenommen, daß

$$J(x, t) = J(\rho(x, t)) \quad (\text{II.1.3})$$

ist. Anschaulich bedeutet dies, daß der Strom instantan auf Dichteänderungen reagiert. Seine Orts- und Zeitabhängigkeit kommt daher alleine durch die Orts- und Zeitabhängigkeit der Dichte zustande. Setzt man die Annahme (II.1.3) in die Kontinuitätsgleichung (II.1.1) ein, so erhält man die sog. *Lighthill-Whitham-Richards-Gleichung* (LWR-Gleichung)¹

$$\boxed{\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + v_g(\rho) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0} \quad (\text{II.1.4})$$

mit der Geschwindigkeit

$$v_g(\rho) = \frac{dJ}{d\rho} = v + \rho \frac{dv}{d\rho}. \quad (\text{II.1.5})$$

Man beachte, daß $v_g(\rho)$ i.a. verschieden von der mittleren Geschwindigkeit $v(x, t)$ am Ort x ist. Ein Problem der LWR-Theorie ist, daß das Fundamentaldiagramm nicht berechnet werden kann, sondern vorgegeben werden muß. Eine besonders einfache Struktur hat die sog. *Greenshields-Form*

$$J_G(\rho) = v_{\text{max}} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}} \right), \quad (\text{II.1.6})$$

die für kleine Dichten ein lineares Verhalten mit der Steigung v_{max} liefert und bei der maximalen Dichte ρ_{max} verschwindet. v_{max} entspricht dabei der Freiflußgeschwindigkeit der Fahrzeuge und ρ_{max} der Dichte in einem Stau.

¹Diese Gleichung wurde von Richards unabhängig von Lighthill und Whitham abgeleitet.

Man beachte, daß es sich bei der Lighthill-Whitham-Gleichung (II.1.4) um eine nichtlineare Wellengleichung handelt, denn i.a. ist v_g auch von der Dichte ρ abhängig. Wir betrachten aber zunächst den Fall, daß v_g konstant ist. Dann ist offensichtlich $\rho(x, t) = f(x - v_g t)$ mit einer beliebigen Funktion f . Die bedeutet, daß das Dichteprofil lediglich "starr" verschoben wird. Ist dagegen v_g auch dichteabhängig, so wird die Gleichung nichtlinear und Formänderungen des Dichteprofiles treten auf. Dieser Fall wird in Aufg. 5 diskutiert. Es stellt sich heraus, daß die allgemeine Lösung immer noch von der Form $\rho(x, t) = f(x - v_g(\rho)t)$ ist. Das Dichteprofil $\rho(x, t)$ zur Zeit t ergibt sich aus dem zur Zeit $t = 0$ durch eine *dichteabhängige* Verschiebung um $v_g(\rho)t$.

Die Lösungen der Lighthill-Whitham-Gleichung (II.1.4) entsprechen also *Dichtewellen*. Genauer spricht man hier von *kinematischen Wellen*, da sie lediglich die Folge eines Erhaltungssatzes sind. Im Gegensatz dazu sind *dynamische Wellen*, wie z.B. akustische oder elastische Wellen, Lösungen einer Bewegungsgleichung.

Im Straßenverkehr ist, wie wir schon gesehen haben, i.a. $\frac{dv}{d\rho} < 0$ und somit ist die Geschwindigkeit $v_g(\rho)$ der Dichtewelle kleiner als die lokale Geschwindigkeit v der Autos. Sie bewegt sich deshalb entgegengesetzt zur Fahrtrichtung bzw. rückwärts relativ zur Fahrbahn. Dies ist anders bei Flußströmungen, die ebenfalls von Lighthill and Whitham mit ihrer Theorie untersucht wurden. Hier ist i.a. $\frac{dv}{d\rho} > 0$ und somit $v_g(\rho) > v$.

Die Krümmung $\frac{d^2 J}{d\rho^2}$ des Fundamentaldiagramms bestimmt die Geschwindigkeit, mit der sich verschiedene Dichten ausbreiten. Ist $\frac{d^2 J}{d\rho^2} < 0$, so ist $\frac{dv_g}{d\rho} < 0$ und höhere Dichten bewegen sich langsamer, während es für $\frac{d^2 J}{d\rho^2} > 0$ genau umgekehrt ist.

I.a. bewegen sich also Bereiche unterschiedlicher Dichte mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Holt eine Welle mit großer Geschwindigkeit eine Welle mit kleinerer Geschwindigkeit ein, so entsteht ein Dichtesprung (*Schockwelle*). Ein *Schock* ist dabei definiert als ein Objekt, das Bereiche verschiedener Dichte voneinander trennt (siehe Abb. II.1.1). Ein Schock kann sich mit

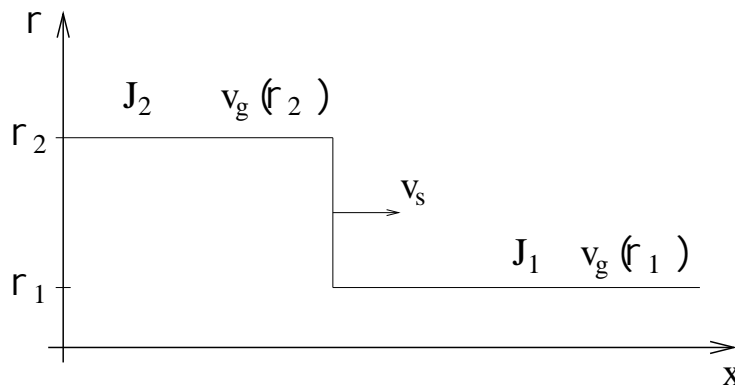


Abbildung II.1.1: Ein Schock trennt Bereiche verschiedener Dichte.

der Geschwindigkeit v_s bewegen. Man kann diese *Schockgeschwindigkeit* leicht aus der Kontinuitätsgleichung ableiten. An der Sprungstelle gilt nämlich $J_2 - J_1 = (\rho_2 - \rho_1)v_s$, woraus für

die Schockgeschwindigkeit folgt

$$v_s = \frac{J_2 - J_1}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (\text{II.1.7})$$

Da am Schock ein Dichtesprung stattfindet ist es naheliegend, die Schockgeschwindigkeit mit der Staugeschwindigkeit zu identifizieren. Dies ist jedoch nicht unproblematisch.

Insgesamt spielen also in der LWR-Theorie drei verschiedene Geschwindigkeiten eine Rolle: Die momentane Geschwindigkeit $v(x, t)$, die Geschwindigkeit $v_g(\rho)$ einer Dichtewelle² und die Schockgeschwindigkeit v_s . Alle drei sind direkt aus dem Fundamentaldiagramm ablesbar, als Steigung geeigneter Geraden (siehe Abb. II.1.2).

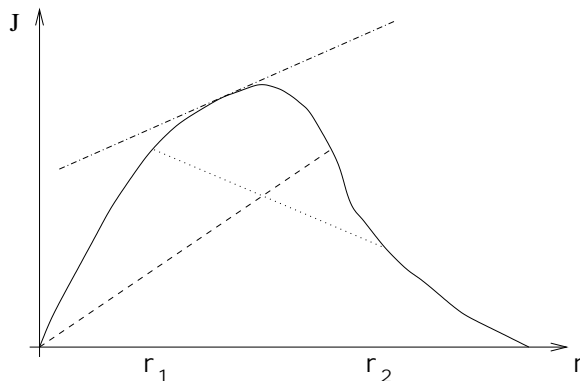


Abbildung II.1.2: Die drei zentralen Geschwindigkeiten der LWR-Theorie lassen sich als Steigungen geeigneter Geraden direkt aus dem Fundamentaldiagramm ablesen. $v(x, t)$ ist die Steigung der Sekante durch den Ursprung und den Punkt $(\rho, J(\rho))$, wobei ρ die lokale Dichte bei x ist. v_s ist die Steigung der Sekante durch $(\rho_1, J(\rho_1))$ und $(\rho_2, J(\rho_2))$, wobei ρ_j die Dichten auf beiden Seiten des Schocks bezeichnet. v_g schließlich ist die Steigung der Tangente im Punkt $(\rho, J(\rho))$.

Das LWR-Modell leidet unter zwei wesentlichen Problemen. Zum einen sind auf Grund der Beziehung $J = J(\rho)$ die Dichte und der Strom “im Gleichgewicht”. Das bedeutet, daß es keine spontane Staubildung gibt, da Schocks stabile Objekte sind. Für eine spontane Staubildung müßte es einen Bereich geben, in dem kleine Dichteschwankungen immer mehr anwachsen. Dies ist im LWR-Modell nicht möglich.

Zum anderen führen die Schockwellen zu numerischen Problemen (Singularitäten). Deshalb wird oft ein zusätzlicher Diffusionsterm berücksichtigt, der zu einer Glättung von Schocks führt. Statt der üblichen Beziehung $J = J(\rho)$ nimmt man nun an, daß

$$J = J_0(\rho) - D \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (\text{II.1.8})$$

gilt. Für ein festes Dichteprofil $\rho(x, t)$, und somit festes $J_0(\rho)$, bedeutet dies, daß $\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$ zu einem kleineren Fluß und $\frac{\partial \rho}{\partial x} < 0$ zu einem höheren Fluß führt. Dies läßt sich auch anschaulich

²Diese Geschwindigkeit wird auch als *kollektive Geschwindigkeit* bezeichnet.

motivieren. Fahrer verlangsamen (bzw. beschleunigen), wenn sie sich einem Bereich höherer (bzw. niedrigerer) Dichte nähern. Man reagiert also auch auf Dichteänderungen, nicht nur auf die Dichte selbst.

Setzt man den Ansatz (II.1.8) in die Kontinuitätsgleichung ein, so erhält man die *LWR-Gleichung mit Diffusion*

$$\boxed{\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + v_g(\rho) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (\text{II.1.9})}$$

mit $v_g(\rho) = \frac{dJ_0}{d\rho}$. Für $D = 0$ reduziert sich dies auf die LWR-Gleichung (II.1.4). Für $D \neq 0$ gibt es einen zusätzlichen ‘‘Quellterm’’, der dissipativ ist.

Der Diffusionsterm wird gerade dann wichtig, wenn die Krümmung $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ des Dichteprofiles groß ist. An einem Dichtemaximum ist die Krümmung negativ, was dann zu einer Abnahme der Dichte in der Zeit führt. Analog erhält man eine Dichtezunahme in der Nähe von Dichteminima. Dies zusammen bewirkt eine Glättung des Profils. Für $D \neq 0$ sind die Schocks daher nicht mehr ‘‘scharf’’, sondern erhalten eine endliche Breite.

II.1.2 Burgers-Gleichung

Für die weitere Entwicklung muß nun das Fundamentaldiagramm spezifiziert werden. Im folgenden betrachten wir die Greenshields-Form $J_G(\rho) = v_{\max} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$ (siehe Gleichung (II.1.6)), die dem einfachsten Fundamentaldiagramm mit einem eindeutigen Maximum entspricht. J_G ist symmetrisch um die Dichte $\frac{1}{2}\rho_{\max}$, denn $J_G(\rho_{\max} - \rho) = J_G(\rho)$. Der maximale Fluß ist dabei $J_G(\frac{1}{2}\rho_{\max}) = \frac{1}{4}\rho_{\max} v_{\max} =: J_{\max}$.

Wir setzen nun die Greenshields-Beziehung in die Lighthill-Whitham-Gleichung mit Diffusion ein. Mit

$$v_g(\rho) = \frac{dJ}{d\rho} = v_{\max} \left[1 - \frac{2\rho}{\rho_{\max}}\right] \quad (\text{II.1.10})$$

ergibt sich

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_{\max} \frac{\partial \rho}{\partial x} - 2 \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (\text{II.1.11})$$

Diese Gleichung hat eine sehr ähnliche Struktur wie die (*deterministische*) *Burgers-Gleichung*

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \lambda \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}. \quad (\text{II.1.12})$$

Bei der Burgers-Gleichung handelt es sich um eine nichtlineare Diffusions-Gleichung, die zahlreiche Anwendungen hat, z.B. im Bereich des Oberflächenwachstums, der Turbulenz oder der Grenzflächendynamik. Der Parameter λ in (II.1.12) steuert die Stärke der Nichtlinearität und ν ist die Viskosität. Die eindimensionale Variante von (II.1.12) ist

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda v \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (\text{II.1.13})$$

Um Gleichung (II.1.11) auf die Form (II.1.12) zu bringen, führen wir eine lineare Koordinatentransformation $x = v_{\max}t - x'$ und $t = t'$ auf die neuen Koordinaten (x', t') durch. Dann ergibt sich die *deterministische Burgers-Gleichung*

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t'} + 2 \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \rho \frac{\partial \rho}{\partial x'} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2}. \quad (\text{II.1.14})}$$

Die Koordinatentransformation besteht aus zwei Teilen. Im ersten Schritt wird auf ein Koordinatensystem transformiert, das sich mit gleichförmig mit der Geschwindigkeit v_{\max} bewegt. Das bedeutet, daß in diesem System Fahrzeuge, die sich mit der Geschwindigkeit v_{\max} bewegen, stillzustehen scheinen, während alle anderen Autos rückwärts fahren. In einem zweiten Schritt wird dann eine Spiegelung vorgenommen, die zu einer Umkehrung der Bewegungsrichtung führt, damit sich die Autos wieder vorwärts bewegen. Dies ändert lediglich das Vorzeichen des nichtlinearen Terms, damit die Gleichung (II.1.14) exakt die Standardform (II.1.13) der Burgers-Gleichung hat.

Die deterministische Burgers-Gleichung ist die einfachste nichtlineare Diffusionsgleichung und deshalb sehr gut untersucht. Eine offensichtliche stationäre³ Lösung ist $\rho(x, t) = \text{const.}$. Bei einer kleiner Störung dieses Zustandes entwickelt sich eine dreieckige Struktur mit Amplitude $\propto t^{-1/2}$ und Breite $\propto t^{1/2}$, die sich dann nach rechts biegt und schließlich unstetig wird. Die Störung breitet sich dabei mit der Geschwindigkeit $2 \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \rho$ aus.

Für die Interpretation als Verkehrsmodell ist die Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten notwendig. Staus können sich in beide Richtungen bewegen, mit Geschwindigkeiten zwischen $-v_{\max}$ und v_{\max} . Die oben beschriebene Unstetigkeit entsteht dabei immer am hinteren Ende des Staus.

Im folgenden soll demonstriert werden, wie man die allgemeine Lösung der Burgers-Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (\text{II.1.15})$$

ableiten kann, wobei wir die Reskalierung $2 \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \rightarrow 1$ gegenüber (II.1.14) vorgenommen haben. Zunächst definieren eine neue Funktion $\psi'(x, t)$ durch

$$\rho(x, t) =: \frac{\partial \psi'(x, t)}{\partial x}, \quad (\text{II.1.16})$$

die wir dann in die Burgers-Gleichung einsetzen. Unter Berücksichtigung von

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} \quad (\text{II.1.17})$$

folgt dann

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = D \frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^3} \quad (\text{II.1.18})$$

³d.h. $\frac{\partial \rho}{\partial t'} = 0$

und nach Integration über x

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 = D \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}. \quad (\text{II.1.19})$$

In einem zweiten Schritt transformieren wir nun mittels

$$\psi'(x, t) =: -2D \ln \psi(x, t) \quad (\text{II.1.20})$$

auf eine neue Funktion $\psi(x, t)$. Unter Beachtung von

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = -2D \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = -2D \left[\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{\psi^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (\text{II.1.21})$$

ergibt sich schließlich

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (\text{II.1.22})$$

Die Gesamttransformation

$$\rho(x, t) = -\frac{2D}{\psi(x, t)} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \quad (\text{II.1.23})$$

heißt auch *Cole-Hopf-Transformation*. Sie überführt die Burgers-Gleichung in die bekannte *Wärmeleitungs-gleichung* (II.1.22). Deren allgemeine Lösung ist wohlbekannt:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x', 0) e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}}. \quad (\text{II.1.24})$$

Hieraus folgt dann mittels (II.1.23) die Lösung der Burgers-Gleichung unter der Anfangsbedingung

$$\psi(x, 0) = e^{-\frac{1}{2D} \int_0^x dx' \rho(x', 0)}. \quad (\text{II.1.25})$$

Die Burgers-Gleichung löst zwar das Schockwellenproblem, kann aber die spontane Stautenstehung nicht erklären. Deshalb sind diverse Verallgemeinerungen vorgeschlagen worden, z.B die sog. *verrauschte Burgers-Gleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + 2 \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \rho \frac{\partial \rho}{\partial x'} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2} + \eta, \quad (\text{II.1.26})$$

wobei η ein Gaußsches Rauschen ist, d.h. ein Zufallsprozeß mit

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \eta_0 \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (\text{II.1.27})$$

Diese Modifikation bewirkt, daß der homogene Zustand $\rho(x, t) = \text{const.}$ nicht mehr stationär ist.

Weiterhin hat man *verallgemeinerte Burgers-Gleichungen*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{\beta} b_{\beta} \frac{\partial \rho^{\beta}}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (\text{II.1.28})$$

mit komplizierteren Nichtlinearitäten untersucht. Offensichtlich liefert der Term mit $\beta = 2$ die zuvor betrachtete Nichtlinearität.

Schließlich sei noch auf eine verwandte Gleichung hingewiesen, die in der Physik eine wichtige Rolle spielt, speziell bei Oberflächen- und Wachstumsproblemen. Es handelt sich um die sog. *KPZ-Gleichung*⁴

$$\frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = \nu \vec{\nabla}^2 h + \frac{\lambda}{2} (\vec{\nabla} h)^2 + \eta(\vec{x}, t). \quad (\text{II.1.29})$$

Dabei kann z.B. $h(\vec{x}, t)$ das Höhenprofil einer Oberfläche sein. Man beachte, daß die KPZ-Gleichung auch nichtlinear ist und einen Rauschterm $\eta(\vec{x}, t)$ enthält.

II.1.3 Impulsgleichung und Fluktuationen

Wir haben nun gesehen, daß eine Beschreibung alleine mit der Kontinuitätsgleichung nicht ausreichend ist. Es ist deshalb notwendig, eine geeignete Variante der sog. *Impulsgleichung*

$$\frac{dv}{dt} := \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{F}{m} \quad (\text{II.1.30})$$

hinzu zu nehmen, die beschreibt, wie das der Impuls eines Partikels nur durch die Wirkung einer Kraft geändert werden kann. Im Falle des Straßenverkehrs modelliert F die Fahrzeugdynamik und das Fahrverhalten. Der Term $v \frac{\partial v}{\partial x}$ wird dabei als *Transport- oder Konvektionsterm* bezeichnet. Er beschreibt die zeitliche Geschwindigkeitsänderung, die durch die Fortbewegung der Fahrzeuge zustande kommt.

Wir wollen zunächst einige allgemeine Überlegungen anstellen. In hydrodynamischen Beschreibungen wird angenommen, daß die relevanten Größen ρ und v statistisch um Mittelwerte $\langle \rho \rangle$ und $\langle v \rangle$ fluktuieren, die durch eine geeignete coarse-graining Prozedur definiert sind:

$$\rho = \langle \rho \rangle + \rho' \quad \text{mit} \quad \langle \rho' \rangle = 0, \quad (\text{II.1.31})$$

$$v = \langle v \rangle + v' \quad \text{mit} \quad \langle v' \rangle = 0, \quad (\text{II.1.32})$$

wobei $\langle \rho \rangle$ und $\langle v \rangle$ nur langsam in Raum und Zeit veränderlich sind. Dies setzt man in die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichung ein und mittelt dann. Unter Beachtung von z.B.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x} [\langle \rho \rangle + \rho'] [\langle v \rangle + v'] \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x} [\langle \rho \rangle \langle v \rangle + \rho' \langle v \rangle + v' \langle \rho \rangle + \rho' v'] \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\langle \rho \rangle \langle v \rangle) + \frac{\partial}{\partial x} (\langle \rho' \rangle \langle v \rangle) + \frac{\partial}{\partial x} (\langle v' \rangle \langle \rho \rangle) + \frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' v' \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\langle \rho \rangle \langle v \rangle) + \frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' v' \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.1.33})$$

⁴KPZ steht dabei für die Namen der Physiker, die diese Gleichung zuerst vorgeschlagen und untersucht haben: Kardar, Parisi und Zhang.

da die Mittelwert über die Schwankungen verschwinden. Insgesamt ergibt sich dann aus der Kontinuitätsgleichung und der Impulsgleichung

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \rho' v' \rangle}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.1.34})$$

$$\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial x} = \left\langle \frac{F}{m} \right\rangle. \quad (\text{II.1.35})$$

Man parametrisiert nun die gemittelten Fluktuationen durch Gradienten gemäß

$$\langle v' A' \rangle \approx -\alpha \frac{\partial \langle A' \rangle}{\partial x}. \quad (\text{II.1.36})$$

Eine anschauliche Begründung für diese Identifikation ist folgende: Ist $A > \langle A \rangle$, d.h. $A' = A - \langle A \rangle > 0$ an einer Stelle und $A < \langle A \rangle$ an einer benachbarten Stelle, dann versuchen die Geschwindigkeitsfluktuationen (d.h. v') diesen Unterschied auszugleichen. In erster Ordnung wird dies durch den Gradienten beschrieben.

Wir erhalten dann schließlich⁵

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (\text{II.1.37})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{F}{m}. \quad (\text{II.1.38})$$

Die erste Gleichung ist dabei die wohlbekannte Lighthill-Whitham-Gleichung mit Diffusion. Die Impulsgleichung hat folgende Bedeutung: Im realen Verkehr kann man weder instantan auf die Wunschgeschwindigkeit beschleunigen, noch ohne Verzögerung abbremesen. Dies impliziert die Existenz einer gewissen "Trägheit", d.h. die Impulsgleichung ist tatsächlich notwendig. Beschleunigung und Verzögerung werden durch den Kraftterm $\frac{F}{m}$ beschrieben, der üblicherweise zwei Bestandteile hat, nämlich einen *Relaxationsterm* und einen *Wechselwirkungsterm*. Details werden wir in den folgenden Abschnitten diskutieren.

II.1.4 Payne-Modell und Varianten

Wir gehen aus von der Annahme, daß eine "sichere" Geschwindigkeit $V(\rho)$ existiert, die nur von der Dichte ρ abhängt. Die Fahrer sollen ihre Geschwindigkeit so anpassen, daß die mittlere Geschwindigkeit v auf einer Zeitskala τ gegen $V(\rho)$ relaxiert:

$$v(x + v\tau, t + \tau) = V(\rho(x + \Delta x)), \quad (\text{II.1.39})$$

wobei Δx der mittlere Fahrzeugabstand ist. Eine Taylor-Entwicklung 1. Ordnung ergibt:

$$v(x, t) + v\tau \frac{\partial v}{\partial x} + \tau \frac{\partial v}{\partial t} = V(\rho) + \frac{dV}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x + O((\Delta x)^2). \quad (\text{II.1.40})$$

⁵Wobei wir nun die Klammern zur Kennzeichnung der Mittelung weglassen.

Mit $\Delta x = 1/\rho$ folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V(\rho) - v}{\tau} + \frac{1}{\rho\tau} \frac{dV}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (\text{II.1.41})$$

Mit der Abkürzung $c_0^2 := -\frac{1}{\tau} \frac{dV}{d\rho} \geq 0$, wobei wir $\frac{dV}{d\rho} \leq 0$ ausgenutzt haben, erhalten wir dann die *Payne-Gleichung* (1971)

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V(\rho) - v}{\tau} - \frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}} \quad (\text{II.1.42})$$

Der *Relaxationsterm* $\frac{V(\rho)-v}{\tau}$ beschreibt eine exponentielle Relaxation gegen die Wunschgeschwindigkeit $V(\rho)$. Er hat eine "rücktreibende" Wirkung, denn für $v > V(\rho)$ (bzw. $v < V(\rho)$) ist $\frac{V(\rho)-v}{\tau} < 0$ (bzw. > 0), d.h. er führt zu einer Verringerung (bzw. Vergrößerung) der Geschwindigkeit.

Der Wechselwirkungsterm $\frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ reduziert (erhöht) die Geschwindigkeit, wenn die Dichte größer (kleiner) wird. Er hat damit eine antizipierende (vorausschauende) Wirkung. c_0 hat die Bedeutung einer Schallgeschwindigkeit, mit der sich Störungen längs des kompressiblen Fahrzeugstromes ausbreiten.

Payne konnte zeigen, daß in einem bestimmten Dichtebereich kleine Dichteschwankungen immer mehr anwachsen. Man sagt, daß Modell ist dort *instabil*. Damit lassen sich die empirisch beobachteten *stop-and-go Wellen* erklären. Allerdings können sich, wie in der Lighthill-Whitham-Theorie auch Schockwellen ausbilden. Diese sind zum einen empirisch fragwürdig und führen zum anderen zu numerischen Schwierigkeiten.

Ein verwandtes Modell wurde 1977 von Phillips vorgeschlagen. Seine Impulsgleichung lautet:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{V(\rho) - v}{\tau(\rho)}} \quad (\text{II.1.43})$$

Neben einer dichteabhängigen Relaxationszeit $\tau(\rho)$ enthält diese Gleichung den sog. *Verkehrsdruck* $P(x, t)$, der über

$$P(x, t) := \rho(x, t) \Theta(x, t) \quad (\text{II.1.44})$$

mit dem Geschwindigkeitsvarianz $\Theta(x, t) = \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle$ zusammenhängt⁶. Phillips hat dabei angenommen, daß $\Theta(x, t) = \Theta(\rho(x, t))$ ist mit

$$\Theta(\rho) = \Theta_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \geq 0. \quad (\text{II.1.45})$$

Die Varianz nimmt also mit wachsender Dichte ab und verschwindet – wie die Geschwindigkeit – bei ρ_{\max} .

Die Eigenschaften des Phillips-Modells ähneln denen des Payne-Modells, d.h. es existieren stop-and-go Wellen, aber auch Schockwellen.

⁶Dabei ist $\langle v \rangle = \frac{1}{\Delta T} \int_t^{t+\Delta T} v(x, t') dt'$.

Eine Lösung des Schockwellenproblems liefert das Modell von Kühne, Kerner und Konhäuser (K^3 -Modell), und zwar durch einen zusätzlichen *Viskositätsterm* (Kühne 1984)

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (\text{II.1.46})$$

Dieser Term bewirkt für $\nu > 0$ eine Glättung des Geschwindigkeitsprofils, ganz analog zum Diffusionsterm zur Glättung des Dichteprofiles. Damit lassen sich Dichte- und Geschwindigkeits-sprünge vermeiden, unter gleichzeitiger Erhaltung der Instabilität gegen Stautenstehung.

Kerner und Konhäuser (1993) haben für den Viskositätskoeffizienten die Form

$$\nu(\rho) = \frac{\eta_0}{\rho} \quad (\text{II.1.47})$$

vorgeschlagen. Dabei haben sie sich von der Analogie zur Navier-Stokes-Gleichung für gewöhnliche kompressible Flüssigkeiten leiten lassen. Außerdem benutzen sie eine Wunschgeschwindigkeit in Form einer Fermi-Dirac-Verteilung

$$V(\rho) = v_0 \left[\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} - \alpha_1\right) / \alpha_2} - \alpha_3 \right] \quad (\text{II.1.48})$$

mit den anzupassenden Parametern α_j . Die Impulsgleichung des K^3 -Modells lautet daher

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{V(\rho) - v}{\tau(\rho)} + \frac{\eta_0}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (\text{II.1.49})$$

Aus numerischen Untersuchungen weiß man, daß das K^3 -Modell ein echt realistisches Verhalten zeigt, z.B. die Entstehung von Dichtecustern (Staus). Diese Cluster können zu größeren verschmelzen, wenn ihre Geschwindigkeit unterschiedlich ist. Große Cluster bewegen sich dann alle mit der gleichen Geschwindigkeit. Interessant ist auch die Existenz von Bereichen *subkritischer Instabilität*. Hier zeigt sich die Instabilität nur, wenn die Störung eine gewisse Größe überschreitet. Schließlich läßt sich auch die Entstehung von Stau-Kaskaden beobachten, die man als stop-and-go Verkehr interpretieren kann. All dies wird ausführlicher im Abschnitt II.1.6 diskutiert.

II.1.5 Allgemeine Struktur hydrodynamischer Modelle

In diesem Abschnitt wollen wir noch einmal die gemeinsame Struktur der verschiedenen hydrodynamischen Modelle betrachten. Im allgemeinen bestehen sie aus einer *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (\text{II.1.50})$$

wobei wir einen Diffusionsterm $D \neq 0$ zur Glättung des Dichteprofiles zulassen wollen. I.a. wird jedoch $D = 0$ gesetzt.

Die zweite Gleichung ist eine *Impuls- oder Geschwindigkeitsgleichung* der allgemeinen Form

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu(\rho) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{V(\rho) - v}{\tau(\rho)}} \quad (\text{II.1.51})$$

Diese Gleichung ist von zweiter Ordnung. Wir haben es insgesamt also mit einem System zweier gekoppelter partieller Differentialgleichungen zu tun.

Die verschiedenen Modelle unterscheiden sich nun in der Spezifikation des Verkehrsdruckes $P(\rho)$, der Relaxationszeit $\tau(\rho)$, der Viskosität $\nu(\rho)$ und der Wunschgeschwindigkeit $V(\rho)$. Im einzelnen hat man:

$$1) \text{ Lighthill-Whitham-Modell: } \quad \tau \rightarrow 0 \quad (\text{II.1.52})$$

$$2) \text{ Payne-Modell: } \quad \nu(\rho) = 0, \quad P(\rho) = -\frac{V(\rho)}{\tau}, \quad (\text{II.1.53})$$

$$3) \text{ Burgers-Gleichung: } \quad \text{Grenzfall } \tau \rightarrow 0 \text{ im Payne-Modell,} \quad (\text{II.1.54})$$

$$4) \text{ Phillips-Modell: } \quad \nu(\rho) = 0, \quad P(\rho) = \rho\Theta_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right), \quad (\text{II.1.55})$$

$$5) \text{ } K^3\text{-Modell } \quad \tau(\rho) = \text{konstant}, \quad P(\rho) = \rho\Theta_0, \quad (\text{II.1.56})$$

$$\nu(\rho) = \text{konstant (Kühne-Modell) bzw.} \quad (\text{II.1.57})$$

$$\nu(\rho) = \frac{\eta_0}{\rho} \text{ (Kerner-Konhäuser-Modell).} \quad (\text{II.1.58})$$

Dabei ist Θ_0 eine konstante Geschwindigkeitsvarianz.

Die Tatsache, daß das Lighthill-Whitham-Modell dem Grenzfall $\tau \rightarrow 0$ entspricht, folgt, da in diesem Limes $v(x, t) = V(\rho)$ sein muß, damit die Geschwindigkeitsgleichung erfüllt ist. Schließlich sei noch angemerkt, daß (gerade beim Kerner-Konhäuser-Modell) der Viskositätsterm oft wie in der Hydrodynamik in den Verkehrsdruck hineingezogen wird:

$$\tilde{P}(\rho) = P(\rho) - \eta_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \rho\Theta_0 - \eta_0 \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{II.1.59})$$

Abschließend seien noch einige prinzipielle Verallgemeinerungen von hydrodynamischen Modellen angeführt. So kann man die Geschwindigkeitsvarianz Θ als zusätzliche dynamische Größe betrachten, die durch eine *Varianzgleichung* der Form (Helbing 1995)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + v \frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{2P}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(\rho) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + \frac{1}{\tau} \left[\frac{V(\rho)}{V_{\max}} \Theta_0 - \Theta \right] \quad (\text{II.1.60})$$

beschrieben wird. Näheres dazu werden wir in Abschnitt II.2 diskutieren.

Weiterhin kann man Effekte des endlichen Platzbedarfs der Fahrzeuge berücksichtigen (Helbing 1995). In diesem Fall ergeben sich folgende Modifikationen

$$P_{\text{ges}} = \frac{\rho\Theta}{1 - \rho S(v)} - \eta \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{mit } \eta(\rho) = \frac{\eta_0}{1 - \rho S(v)} \quad \text{und } S(v) := \frac{1}{\rho_{\max}} + T_r v, \quad (\text{II.1.61})$$

wobei T_r die Reaktionszeit der Fahrer ist.

Vergleichen wir die hydrodynamischen Verkehrsgleichungen mit denen der klassischen Hydrodynamik so fällt auf, daß diese strukturell sehr ähnlich sind. Der wichtigste Unterschied besteht in dem Relaxationsterm $\frac{V(\rho)-v}{\tau}$. Dieser führt zu einer Abnahme der Geschwindigkeit mit der zunehmender Dichte. Somit fließt der Verkehr an Engstellen langsamer, während bei den üblichen Flüssigkeiten genau das Gegenteil der Fall ist.

II.1.6 Instabilität und Stautentstehung

In diesem Abschnitt wollen wir die allgemeinen Prinzipien der Stautentstehung in hydrodynamischen Modellen untersuchen. Ausgangspunkt ist die Kontinuitätsgleichung (II.1.50) mit $D = 0$ und die Geschwindigkeitsgleichung (II.1.51). Wir nehmen dabei nur an, daß der Verkehrsdruck P proportional zur Geschwindigkeitsvarianz Θ ist: $P \propto \Theta$. Diese beiden Gleichungen haben die stationäre und räumlich homogene Lösung

$$\rho(x, t) = \rho_0 \quad \text{und} \quad v(x, t) = V(\rho_0). \quad (\text{II.1.62})$$

In diesem Fall verschwindet also die Varianz Θ und somit auch der Druck P .

Wir wollen nun im Rahmen einer linearen Stabilitätsanalyse die Stabilität dieser Lösung gegen eine kleine Störung $\delta\rho(x, t)$ und $\delta v(x, t)$ untersuchen. Sei daher

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \delta\rho(x, t) \quad \text{mit} \quad \delta\rho(x, t) \ll \rho_0, \quad (\text{II.1.63})$$

$$v(x, t) = v_0 + \delta v(x, t) \quad \text{mit} \quad \delta v(x, t) \ll v_0, \quad (\text{II.1.64})$$

wobei wir die Abkürzung $v_0 := V(\rho_0)$ eingeführt haben. Wenn wir diesen Ansatz in die Gleichungen (II.1.50) und (II.1.51) und anschließend linearisieren, so folgt:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0, \quad (\text{II.1.65})$$

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dP(\rho_0)}{d\rho} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} + \nu(\rho_0) \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau(\rho_0)} \left[\frac{dV(\rho_0)}{d\rho} \delta \rho - \delta v \right]. \quad (\text{II.1.66})$$

Das weitere Vorgehen entspricht dem bei der Lösung gewöhnlicher linearer DGL. Wir machen daher den Ansatz

$$\delta \rho(x, t) = \bar{\rho} e^{ikx + (\lambda - i\omega)t}, \quad (\text{II.1.67})$$

$$\delta v(x, t) = \bar{v} e^{ikx + (\lambda - i\omega)t}, \quad (\text{II.1.68})$$

mit der Wellenzahl k , der Frequenz ω und der Wachstumsrate λ . Für $\lambda > 0$ wächst die Schwingungsamplitude mit der Zeit t an. Physikalisch bedeutet dies die Instabilität der homogenen Lösung und die Entstehung von Stop-and-Go-Wellen. Für $\lambda < 0$ geht die Schwingungsamplitude gegen Null, d.h. die Störung wird gedämpft und die homogene Lösung ist stabil.

Die allgemeine Lösung für beliebige Anfangsbedingungen hat die Form

$$\delta \rho(x, t) = \sum_{l=1}^2 \int dk \bar{\rho}_l(k) e^{ikx + (\lambda_l(\rho, k) - i\omega_l(\rho, k))t} \quad (\text{II.1.69})$$

(und analog für $\delta v(x, t)$), denn wir werden gleich sehen, daß es zwei Lösungen für ω gibt. Dazu setzen wir den Ansatz (II.1.67), (II.1.68) in die linearisierten Gleichungen (II.1.65) und (II.1.66) ein. Das sich ergebende Gleichungssystem läßt sich dann schreiben als

$$\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.70})$$

mit der Matrix

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - i(\omega - kv_0) & -ik\rho_0 \\ -\frac{ik}{\rho_0} \frac{dP}{d\rho} + \frac{1}{\tau(\rho_0)} \frac{dV}{d\rho} & -\lambda + i(\omega - kv_0) - \nu(\rho_0)k^2 - \frac{1}{\tau(\rho_0)} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.71})$$

Es ist sinnvoll, die Abkürzung $\tilde{\lambda} := \lambda - i(\omega - kv_0)$ einzuführen. Gleichung (II.1.70) ist nur für bestimmte $\tilde{\lambda}_l = \tilde{\lambda}_l(\rho_0, k)$ und $\omega_l(\rho_0, k)$ erfüllt (Eigenwerte):

$$\det \mathbf{M} = 0, \quad (\text{II.1.72})$$

woraus explizit folgt

$$\tilde{\lambda}_l(\rho_0, k) = -\frac{1}{2T^*} \pm \sqrt{\frac{1}{4T^{*2}} - (C_r + iC_i)}, \quad (\text{II.1.73})$$

wobei

$$\frac{1}{T^*} := \nu(\rho_0)k^2 + \frac{1}{\tau(\rho_0)} \geq 0, \quad (\text{II.1.74})$$

$$C_r := k^2 \frac{dP}{d\rho} \stackrel{!}{\geq} 0, \quad (\text{II.1.75})$$

$$C_i := \frac{k\rho_0}{\tau(\rho_0)} \frac{dV}{d\rho} \leq 0. \quad (\text{II.1.76})$$

Ein Phasenübergang vom stabilem zum instabilen Verhalten erfolgt nur für einen der beiden Eigenwerte ($l = 1$) unter der Bedingung

$$\lambda_1(\rho_0, k) = 0 \quad (\text{II.1.77})$$

was gleichbedeutend mit

$$C_i = -\frac{\sqrt{C_r}}{T^*} \quad (\text{II.1.78})$$

ist. Daraus ergibt sich, daß die homogene Lösung instabil ist unter der Bedingung

$$\boxed{\rho_0 \left| \frac{dV}{d\rho} \right| > \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} [1 + \tau(\rho_0)\nu(\rho_0)k^2]}. \quad (\text{II.1.79})$$

Für kleine Dichten ($\rho_0 \rightarrow 0$) geht die linke Seite gegen 0 und die Ungleichung ist (i.a.) nicht erfüllt, d.h. für kleine Dichten ist die homogene Lösung stabil gegen Störungen. Nimmt aber $\frac{dV}{d\rho}$ mit wachsendem ρ_0 schnell genug ab, so wird die homogene Lösung instabil für große Dichten.

Anschaulich funktioniert der Instabilitätsmechanismus typischerweise so: Mit wachsender Dichte sinkt die mittlere Geschwindigkeit $v \approx V(\rho_0)$. Auf Grund der Kontinuitätsgleichung kommt es dann zu einer weiteren Verdichtung, wenn der Glättungseffekt⁷ der Viskosität und die Ausgleichstendenz durch den Druckzuwachs zu schwach sind.

Für die einzelnen Modelle gilt speziell:

$$\text{Payne-Modell: } \rho_0 \left| \frac{dV}{d\rho} \right| > \frac{1}{2\rho_0\tau} \quad (\text{II.1.80})$$

$$\text{Phillips-, K}^3\text{-Modell: } \rho_0 \left| \frac{dV}{d\rho} \right| > \sqrt{\Theta(\rho)} [1 + \tau(\rho_0)\nu(\rho_0)k^2]. \quad (\text{II.1.81})$$

Der Instabilitätsbereich ist dann die Menge aller Wertepaare (ρ_0, k) , die der Instabilitätsbedingung genügen. Abb. II.1.3 zeigt den Instabilitätsbereich für das Kühne-Kerner-Konhäuser-Modell.

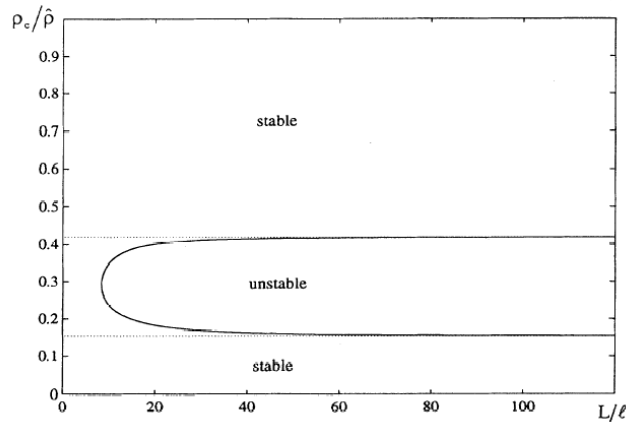


Abbildung II.1.3: Instabilitätsbereich des Kühne-Kerner-Konhäuser-Modells. L ist die Systemgröße und $l := \sqrt{\frac{\nu\tau}{\rho_{\max}}}$.

Wir wollen nun noch die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen bestimmen. Allgemein ist die Gruppengeschwindigkeit gegeben durch

$$\tilde{c}_l(\rho_0, k) := \frac{\partial \omega_l(\rho_0, k)}{\partial k}. \quad (\text{II.1.82})$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit relativ zur mittleren Geschwindigkeit $V(\rho_0)$ ist daher

$$c_l(\rho_0, k) := \tilde{c}_l(\rho_0, k) - V(\rho_0). \quad (\text{II.1.83})$$

⁷Wegdämpfen von Schwingungen kleiner Wellenlänge

Speziell am Phasenübergang ergibt sich

$$c_l(\rho_0, k) = \dots = \pm \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}, \quad (\text{II.1.84})$$

wobei das Vorzeichen ‘+’ der stabilen Lösung ($l = 2$) entspricht und das Vorzeichen ‘-’ der instabilen ($l = 1$). Letzteres bedeutet dann, daß sich Stop-and-Go-Wellen rückwärts bewegen, wie es auch sein sollte.

Ein allgemeines Problem obiger Betrachtungen ist, daß bei einer starken Nichtlinearität eine lineare Stabilitätsanalyse nur wenig aussagekräftig ist. Ein Effekt der Nichtlinearität ist z.B., daß die entstehenden Wellen nicht periodisch sind. Geht man von einer (ausgedehnten) sinusförmigen Störung aus, so kann diese ihre Form ändern und schließlich in eine lokalisierte “Störung” übergehen. Dies bezeichnet man als *lokalen Zusammenbruch* oder *local breakdown effect* (Kerner, Konhäuser 1994). Schließlich kann sogar ein Stau (englisch: *wide jam*) entstehen, d.h. ein Bereich stehender Fahrzeuge, umgeben von homogenen Zuständen. Dies bezeichnen Kerner und Konhäuser als den *local cluster effect*. Es bildet sich also eine Art Phasenseparation mit einem “kondensierten” und einem “gasförmigen” Bereich. Der Stau absorbiert dabei genau so viele Autos, daß im Rest des Systems Freifluß realisiert werden kann.

Abb. II.1.4 faßt die Ergebnisse einer genauer Stabilitätsanalyse von Kerner, Konhäuser und Schilke (1995,1996) zusammen. Man kann 5 Bereiche unterscheiden:

$\rho < \rho_{c_1}$: jede Störung verschwindet

$\rho_{c_1} < \rho < \rho_{c_2}$: ist die Störung groß genug, so entsteht ein *wide jam*, d.h. die kritische Amplitude ist endlich

$\rho_{c_2} < \rho < \rho_{c_3}$: es entsteht eine Abfolge von Staus (Stop-and-Go)

$\rho_{c_3} < \rho < \rho_{c_4}$: ist die Störung groß genug, so entsteht eine *Dipolschicht* (Anticluster)

$\rho_{c_4} < \rho$: jede Störung verschwindet

Dabei sind die kritischen Dichten ρ_{c_j} abhängig von der Druckfunktion P , der Relaxationszeit τ und der Wunschgeschwindigkeit $V(\rho)$.

Abschließend wollen wir noch die Bewegung der Staus genauer untersuchen. Sie bewegen sich bekanntlich mit der Geschwindigkeit v_s entgegen der Fahrtrichtung, d.h. $v_s < 0$. Somit gilt für die Dichte und den Fluß

$$\rho(x, t) = \rho(x - v_s t, 0) \quad \text{und} \quad J(x, t) = J(x - v_s t, 0). \quad (\text{II.1.85})$$

Setzt man dies in die Kontinuitätsgleichung ein, so ergibt sich

$$0 = \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = -v_s \frac{\partial \rho(\tilde{x}, 0)}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial J(\tilde{x}, 0)}{\partial \tilde{x}} \quad (\text{II.1.86})$$

mit $\tilde{x} := x - v_s t$. Die Lösung dieser Gleichung ist

$$J(\tilde{x}, 0) = J_0 + v_s \rho(\tilde{x}, 0) =: J_s(\rho(\tilde{x}, 0)). \quad (\text{II.1.87})$$

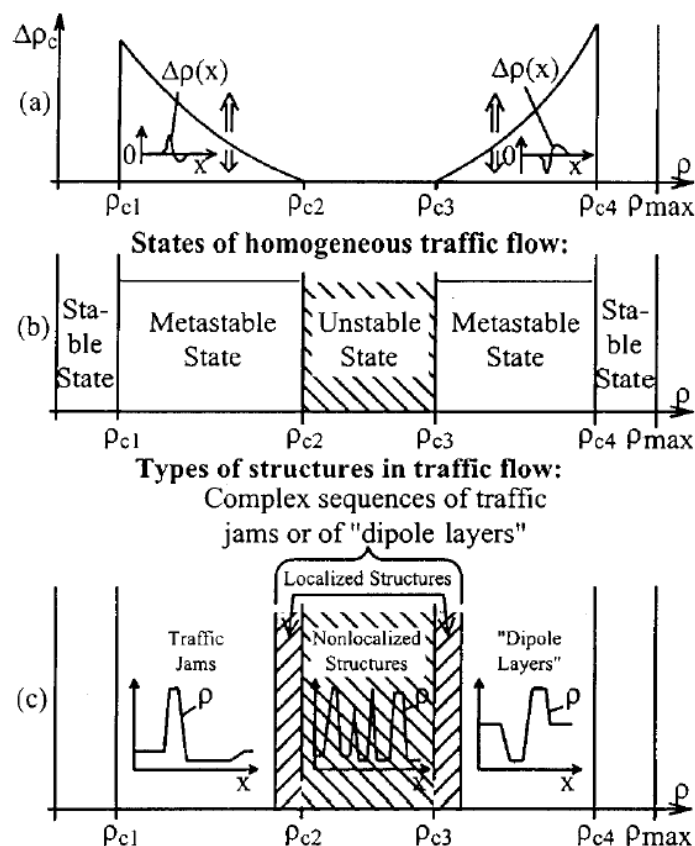


Abbildung II.1.4: Staubildung in hydrodynamischen Modellen nach Kerner, Konhäuser und Schilke (1995,1996): Gezeigt sind (a) die minimalen Amplituden für einen Zusammenbruch, (b) die Stabilität der homogenen Zustände und (c) die typische Form der sich ausbildenden Strukturen.

Es ergibt sich also eine lineare Fluß-Dichte-Beziehung mit negativer Steigung, die der Linie J in Abb. I.2.7 entspricht⁸.

Die oben beschriebenen Charakteristika und Mechanismen der Staubildung scheinen typisch zu sein für alle Modelle mit einem deterministischen Instabilitätsmechanismus. Viele stochastische Modelle haben einen etwas anderen Instabilitätsmechanismus, zeigen aber eine ähnliche Phasenseparation zwischen freiem und gestautem Verkehr.

II.2 Gaskinetische Modelle

Ein wichtiges Ziel der kinetischen Gastheorie ist die mikroskopische Begründung von hydrodynamischen Modellen. Dieses Vorgehen läßt sich mit leichten Modifikationen auch auf Verkehrsmodelle übertragen. Eigentlich handelt es sich bei den hier vorgestellten Theorien um *mesoskopische Modelle*. Einzelne Fahrzeuge werden zwar nicht unterschieden, aber ihr Verhalten wird

⁸Bei lokalen Messungen können i.a. nur die Endpunkte dieser Geraden bestimmt werden.

doch in gewisser Weise berücksichtigt, z.B. in Form von Wahrscheinlichkeiten.

Bevor wir zu den gaskinetischen Verkehrsmodellen kommen, wollen wir noch einmal kurz an die wesentlichen Aspekte der Theorie für klassische Gase erinnern. Die zentrale Größe ist die die *Phasenraumdichte* $f(\vec{r}, \vec{p}; t)$ mit

$$f(\vec{r}, \vec{p}; t) d^3r d^3p = \text{Zahl der Moleküle, die sich zur Zeit } t \text{ im Volumen } d^3r \text{ um } \vec{r} \\ \text{befinden und einen Impuls im Volumen } d^3p \text{ um } \vec{p} \text{ haben.} \quad (\text{II.2.1})$$

Die Zeitentwicklung dieser Verteilungsfunktion wird durch die Boltzmann-Gleichung

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_r + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_p \right] f(\vec{r}, \vec{p}; t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} \quad (\text{II.2.2})$$

beschrieben⁹. $\vec{\nabla}_r$ und $\vec{\nabla}_p$ bezeichnen dabei den Gradienten bzgl. \vec{r} bzw. \vec{p} und \vec{F} ist eine äußere Kraft. Der Term $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$ repräsentiert die Änderung von f , die durch die Kollision der Moleküle zustande kommt.

II.2.1 Prigogine-Herman-Modell

Wir wollen nun den oben beschriebenen Zugang auf Verkehrsmodelle übertragen. Dieser Zugang geht auf den Chemie-Nobelpreisträger I. Prigogine und R. Herman zurück. Die Rolle der Moleküle wird dabei von den Autos übernommen. Zunächst ergibt sich eine gewisse Vereinfachung, da wir es mit einem eindimensionalen Problem zu tun haben. Es ist

$$f(x, v; t) dx dv = \text{Zahl der Autos zur Zeit } t, \text{ die sich zwischen } x \text{ und } x + dx \\ \text{befinden und eine momentane Geschwindigkeit zwischen} \\ v \text{ und } v + dv \text{ haben.} \quad (\text{II.2.3})$$

Außerdem wird angenommen, daß eine *Wunschverteilung* $f_W(x, v)$ existiert, die die Fahrer *gemeinsam* erreichen wollen. Analog zur Boltzmann-Gleichung (II.2.2) erhält man dann

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{f - f_W}{\tau} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{WW}} \quad (\text{II.2.4})$$

wobei der Wechselwirkungsterm $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{WW}$ die Wechselwirkung der Fahrzeuge untereinander beschreibt und τ die Relaxationszeit (bei verschwindender Wechselwirkung) ist.

Um an die Dichte $\rho(x, t)$ und die momentane Geschwindigkeit $\bar{v}(x, t)$ zu gelangen, müssen wir über die Verteilungsfunktion integrieren:

$$\rho(x, t) = \int_0^\infty dv f(x, v, t), \quad (\text{II.2.5})$$

$$\bar{v}(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_0^\infty dv v f(x, v, t). \quad (\text{II.2.6})$$

⁹Diese Gleichung wird in Aufg. 6 abgeleitet.

Wir müssen nun noch den Wechselwirkungsterm spezifizieren. Dabei wird angenommen, daß die Wechselwirkung durch geglückte und mißglückte Überholvorgänge zustande kommt. Fahrzeuge mit einer Geschwindigkeit v , die größer ist als die des Vordermannes v' , können mit der Wahrscheinlichkeit p nicht überholen und bremsen deshalb auf die Geschwindigkeit v' ab. Damit ergibt sich für den Wechselwirkungsterm

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ww}(x, v; t) &= \int_v^\infty dv'(1-p)(v'-v)f(x, v'; t)f(x, v; t) \\ &- \int_0^v dv'(1-p)(v-v')f(x, v; t)f(x, v'; t). \end{aligned} \quad (\text{II.2.7})$$

p ist dabei die Wahrscheinlichkeit, mit der ein langsames Auto überholt werden kann. I.a. hängt p von der Dichte ab: $p = p(\rho)$.

Die beiden Terme in (II.2.7) kann man folgendermaßen interpretieren: $f(x, v; t)$ nimmt zu durch Prozesse, bei den ein Fahrzeug mit Geschwindigkeit v' nicht überholen kann und auf die Geschwindigkeit $v < v'$ abbremst. Die Auftretshäufigkeit solcher Situationen ist proportional zu $1-p$, zur Dichte der Fahrzeuge mit Geschwindigkeit v' , zur Dichte der Fahrzeuge mit Geschwindigkeit v und zur Geschwindigkeitsdifferenz $v'-v$. Analog beschreibt der zweite Term Situationen, in den Fahrzeuge mit der Geschwindigkeit v auf v' abbremsen muß. Dies führt zu einer Verminderung von $f(x, v; t)$.

Mit Hilfe der Beziehungen (II.2.5) und (II.2.6) läßt sich der Ausdruck (II.2.7) vereinfachen zu

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ww}(x, v; t) = [1-p(\rho)]f(x, v; t)[\bar{v}(x, t) - v]\rho(x, t). \quad (\text{II.2.8})$$

Insgesamt sehen wir, daß in der Prigogine-Herman-Theorie die Verteilungsfunktion $f(x, v; t)$ durch drei Prozesse geändert werden kann:

1. Konvektion: Fahrzeuge bewegen sich in das Intervall $[x, x+dx[$ hinein bzw. aus ihm heraus. Dies wird durch den Term $v\frac{\partial f}{\partial x}$ beschrieben.
2. Relaxation: Beschleunigung zur Wunschgeschwindigkeit (bzw. -verteilung). Hierfür ist der Term $-\frac{f-f_w}{\tau}$ verantwortlich.
3. Wechselwirkung mit anderen Fahrzeugen: Abbremsen bei mißlungenen Überholmanövern, siehe (II.2.7).

Bei der Begründung des Wechselwirkungsterms ist eine grundlegende Annahme gemacht worden, die des *vehicular chaos*. Dies geschieht in vollkommener Analogie zur kinetischen Gastheorie, wo die Annahme des *molekularen Chaos* zugrunde gelegt wird. Eigentlich sollte in (II.2.7) in den Integralen jeweils stehen

$$\int dv'|v-v'|f_2(x, v; x, v'; t), \quad (\text{II.2.9})$$

mit der Zweipunktfunktion $f_2(x, v; x', v'; t)$, die die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür angibt, zur Zeit t ein Auto mit Geschwindigkeit v am Ort x und gleichzeitig eines mit Geschwindigkeit v'

am Ort x' zu finden. Bei Molekülen nimmt man nun an, daß die Stöße zu molekularem Chaos führen, d.h. es gibt keine Korrelationen zwischen den Teilchen bei x und x' . Dann ist

$$f_2(x, v; x, v'; t) \approx f(x, v; t) f(x, v'; t). \quad (\text{II.2.10})$$

Dies entspricht einer mean-field-Näherung. Im Prigogine-Herman-Modell macht man auch diese Annahme, die allerdings auf Grund des mehr oder weniger intelligenten Verhaltens der Fahrer problematischer ist als in der Gastheorie. Allgemein unterschätzt die Approximation (II.2.10) die Anzahl der Wechselwirkungen.

Aus der gaskinetischen Gleichung (II.2.4) kann man die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.2.11})$$

und die Geschwindigkeitsgleichung

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{V_w - \bar{v}}{\tau(\rho)} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - [1 - p(\rho)] \rho \Theta \quad (\text{II.2.12})$$

ableiten mit

$$V_w := \frac{1}{\rho} \int dv f_w(v) \quad (\text{mittlere Wunschgeschwindigkeit}), \quad (\text{II.2.13})$$

$$P(x, t) := \rho(x, t) \Theta(x, t) \quad (\text{Verkehrsdruck}), \quad (\text{II.2.14})$$

$$\Theta(x, t) := \int dv [v - \bar{v}(x, t)]^2 f(x, v; t) \quad (\text{Geschwindigkeitsvarianz}). \quad (\text{II.2.15})$$

Dies werden wir ausführlich in Abschnitt II.2.3 diskutieren.

Das Prigogine-Herman-Modell besitzt einen Phasenübergang von Freifluß zu gestautem Verkehr. Dieser ist sehr ähnlich dem Übergang gasförmig \rightarrow flüssig. In der gestauten Phase hat die Geschwindigkeitsverteilung ein zweites Maximum bei $v = 0$, d.h. ein Teil der Fahrzeuge steht.

Es gibt aber auch eine Reihe von Schwierigkeiten in dem Modell. So ist nicht verständlich, warum die Wunschgeschwindigkeitsverteilung eine kollektive Größe sein sollte. Im Prigogine-Herman-Modell ist diese Verteilung also eher eine Eigenschaft der Straße, nicht der Fahrer! Weiterhin kann der Relaxationsterm zu diskontinuierlichen Geschwindigkeitsänderungen führen. Schließlich ist die Annahme des "vehicular chaos" gerade in Fahrzeugkolonnen nicht gerechtfertigt. Hier gibt es starke Korrelationen zwischen den Fahrzeugen.

II.2.2 Paveri-Fontana-Modell

Einige der gerade beschriebenen Probleme versucht das Modell von Paveri-Fontana¹⁰ zu lösen. Zunächst einmal wird die kollektive Relaxation durch eine individuelle Relaxation ersetzt. Jeder Fahrer hat dann seine eigene Wunschgeschwindigkeit. Dies ist natürlich bei Gasmolekülen nicht

¹⁰Hierbei handelt es sich um eine Person (mit einem Doppelnamen).

der Fall. Die Theorie von Pavari-Fontana entfernt sich daher weiter von dem gaskinetischen Vorbild.

Um die individuelle *Wunschgeschwindigkeit* v_w in die Theorie einzubauen, wird sie als neue Koordinate im Phasenraum eingeführt. Dann ist

$$g(x, v, v_w; t) dx dv dv_w = \text{Zahl der Autos zur Zeit } t, \text{ die sich in } [x, x + dx] \text{ befinden, eine momentane Geschwindigkeit zwischen } v \text{ und } v + dv \text{ und eine Wunschgeschwindigkeit im Intervall } [v_w, v_w + dv_w] \text{ haben.} \quad (\text{II.2.16})$$

Die Verteilungsfunktion (II.2.3) aus dem vorigen Abschnitt II.2.1 ergibt sich dann durch Ausintegrieren der neuen Koordinate:

$$f(x, v; t) = \int g(x, v, v_w; t) dv_w, \quad (\text{II.2.17})$$

weshalb Dichte und Durchschnittsgeschwindigkeit nun durch

$$\rho(x, t) = \int dv_w \int dv g(x, v, v_w; t), \quad (\text{II.2.18})$$

$$\bar{v}(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \int dv_w \int dv v g(x, v, v_w; t) \quad (\text{II.2.19})$$

gegeben sind. Der Fluß wird wie immer durch die hydrodynamische Relation $J = \rho \bar{v}$ bestimmt. Wir nehmen nun an, daß die Wunschgeschwindigkeit zeitunabhängig ist, d.h. $\frac{dv_w}{dt} = 0$. Ohne Wechselwirkung mit anderen Fahrzeugen soll die Geschwindigkeit exponentiell gegen die Wunschgeschwindigkeit relaxieren:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_w - v}{\tau}. \quad (\text{II.2.20})$$

Bei Berücksichtigung der Wechselwirkungen wird man dann auf eine Boltzmann-artige Gleichung für die Verteilungsfunktion g geführt:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right] g + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{v_w - v}{\tau} g \right] = \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{ww} \quad (\text{II.2.21})$$

Der Wechselwirkungsterm berücksichtigt wie im Prigogine-Herman-Modell, daß langsamere Fahrzeuge schnellere behindern und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ zum Abbremsen auf die Geschwindigkeit des Vordermannes zwingen. p ist also wieder die Überholwahrscheinlichkeit. Bei der Herleitung des Wechselwirkungsterms sind eine Reihe von vereinfachenden Annahmen gemacht worden:

- Die Geschwindigkeit des überholenden und des überholten Fahrzeuges ändern sich während des Überholvorganges nicht.
- Das Abbremsen, falls nicht überholt werden kann, geschieht instantan.

- Es werden nur Wechselwirkungen zwischen zwei Autos berücksichtigt, 3-Teilchen-Prozesse (und höhere) werden vernachlässigt.
- Schließlich wird wieder *vehicular chaos* angenommen:

$$g_2(x, v, v_w; x, v', v'_w; t) \approx g(x, v, v_w; t)g(x, v', v'_w; t). \quad (\text{II.2.22})$$

Der Wechselwirkungsterm hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ww} &= f(x, v; t) \int_v^\infty dv' (1-p)(v' - v)g(x, v', v_w; t) \\ &\quad - g(x, v, v_w; t) \int_0^v dv' (1-p)(v - v')f(x, v'; t), \end{aligned} \quad (\text{II.2.23})$$

mit einer analogen Interpretation der Terme wie beim Prigogine-Herman-Modell.

Als erstes interessiert man sich wie immer für die homogene stationäre Lösung $g(x, v, v_w; t) \rightarrow g(v, v_w)$, die unabhängig von x und t ist. Leider ist diese selbst in den einfachsten Fällen bisher nicht bekannt! Es sind daher numerische Untersuchungen notwendig.

Unter Benutzung von (II.2.17) kann man durch Ausintegrieren von v_w aus (II.2.21) die *reduzierte Pavari-Fontana-Gleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{V_w - v}{\tau(\rho)} f \right] = (1-p)\rho(x, t) [\bar{v}(x, t) - v] f(x, v, t) \quad (\text{II.2.24})$$

ableiten, wobei

$$V_w(x, v, t) := \frac{1}{f(x, v, t)} \int v_w g(x, v, v_w; t) dv_w \quad (\text{II.2.25})$$

die mittlere Wunschgeschwindigkeit der Fahrzeuge mit Geschwindigkeit v ist.

II.2.3 Gaskinetische Herleitung makroskopischer Gleichungen

Wie bei den klassischen Gasen stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der hydrodynamischen und statistischen Beschreibung. Dort kann man zeigen, daß sich die hydrodynamischen Gleichungen durch den gaskinetischen Zugang (Boltzmann) begründen lassen. Während die hydrodynamischen Gleichungen rein makroskopisch sind, enthält der gaskinetische Zugang gewisse mikroskopische Elemente. Er unterscheidet zwar auch nicht zwischen einzelnen Molekülen oder Fahrzeugen, aber das Verhalten der einzelnen Einheiten wird teilweise (z.B. über Wahrscheinlichkeiten) berücksichtigt. Manchmal bezeichnet man die kinetische Gastheorie auch als einen *mesoskopischen* Zugang.

Das Problem bei der Herleitung von hydrodynamischen aus gaskinetischen Gleichungen ist, daß man i.a. keine geschlossene Hierarchie von Gleichungen erhält. Die Gleichung für die Dichte ρ enthält die Geschwindigkeit v , die für die Geschwindigkeit die Varianz Θ usw. Man muß diese Hierarchie daher irgendwo abschneiden, um ein geschlossenes System zu erhalten. Dies liefert z.B. die *Chapman-Enskog-Methode*.

In 0. Ordnung geht man einer (zeitunabhängigen, homogenen) Gleichgewichtsverteilung aus. In 1. Ordnung nimmt man an, daß im zeitabhängigen Fall zumindest *lokal* eine Gleichgewichtsverteilung vorliegt. Dies führt dann auf die *Euler-Gleichung*. In 2. Ordnung werden Abweichung von der Geschwindigkeitsverteilung im Gleichgewicht berücksichtigt. Damit entstehen *Transportterme*, die eine Konsequenz der endlichen Relaxationszeiten sind. Dies führt dann auf die *Navier-Stokes-Gleichung*.

Bei der Untersuchung von Verkehrsmodellen geht man nun analog zu dem oben beschriebenen Vorgehen bei klassischen Gasen vor. Ein wichtiger Unterschied ist aber, daß man bei den Verkehrsmodellen die Gleichgewichtsverteilung nicht explizit kennt (siehe Abschnitt II.2.2). Man benutzt daher die sog. *Gradsche Momentenmethode*. Ausgangspunkt ist die Annahme, daß die Geschwindigkeiten normalverteilt sind. Dies ist empirisch recht gut bestätigt. Dies führt dann auf Euler-artige Gleichungen mit zwei zusätzlichen Termen: einem Relaxationsterm, der die Wunschgeschwindigkeit berücksichtigt, und einen Wechselwirkungsterm, der die Bremsmanöver berücksichtigt. Man beachte, daß bei gewöhnlichen Gasen und Flüssigkeiten der Wechselwirkungsterm auf Grund der Energie- und Impulserhaltung verschwindet. Zusätzlich erhält man eine Varianzgleichung, die berücksichtigt, daß Fahrzeuge mit unterschiedlicher Wunschgeschwindigkeit v_w auch unterschiedliche Geschwindigkeitsverteilungen besitzen.

Im Gegensatz zu Theorie gewöhnlicher Flüssigkeiten gibt es aber auf Grund der Eindimensionalität der Modelle keinen Viskositätsterm. Diesen erhält man aber, wenn man den endlichen Platzbedarf der Fahrzeuge berücksichtigt.

Wir definieren nun *aggregierte Größen* durch

$$\langle \psi \rangle := \int dv \int dv_w \psi(v, v_w) \frac{g(x, v, v_w, t)}{\rho(x, t)}, \quad (\text{II.2.26})$$

wobei $\psi(v, v_w)$ eine beliebige Funktion der Geschwindigkeit v und der Wunschgeschwindigkeit v_w ist. Multiplikation der reduzierten Pavari-Fontana-Gleichung (II.2.24) mit v^k und anschließender Integration ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \langle v^k \rangle) &+ \frac{\partial}{\partial x} (\rho \langle v^{k+1} \rangle) + \int dv v^k \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v_w - v}{\tau} f \right) \\ &= (1 - p) \rho^2 (\bar{v} \langle v^k \rangle - \langle v^{k+1} \rangle) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \langle v^k \rangle) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \langle v^{k+1} \rangle) - \frac{k \rho}{\tau} (\langle v^{k-1} v_w \rangle - \langle v^k \rangle), \end{aligned} \quad (\text{II.2.27})$$

wobei die letzte Zeile aus der ersten durch partielle Integration folgt. Wie man sieht, bildet (II.2.27) eine nicht geschlossene Hierarchie von Gleichungen, denn $\langle v^k \rangle$ hängt von den höheren Momenten $\langle v^{k+1} \rangle$ ab.

Für $k = 0$ ergibt sich die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{v}) = 0, \quad (\text{II.2.28})$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß wegen Gleichung (II.2.6) $\bar{v} = \langle v \rangle$ ist. Für $k = 1$ folgt mit

$$\langle v^2 \rangle = \langle [\bar{v} + (v - \bar{v})]^2 \rangle = \bar{v}^2 + \langle (v - \bar{v})^2 \rangle = \bar{v}^2 + \Theta \quad (\text{II.2.29})$$

die Geschwindigkeitsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho (\bar{v}^2 + \Theta)] = \frac{\rho}{\tau} (\bar{v}_w - \bar{v}) + (1-p)\rho^2 (\bar{v}^2 - \langle v^2 \rangle) \quad (\text{II.2.30})$$

mit $\bar{v}_w(x, t) := \langle v_w \rangle$. Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung ergibt sich dann

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho}{\tau} (\bar{v}_w - \bar{v}) - (1-p)\rho^2 \Theta, \quad (\text{II.2.31})$$

mit dem Verkehrsdruck $P := \rho(x, t)\Theta(x, t)$.

Die Gleichung, die sich für $k = 2$ ergibt, ist neu, im Vergleich zu den früher betrachteten hydrodynamischen Theorien. Es handelt sich hierbei um eine Gleichung für die Geschwindigkeitsvarianz Θ :

$$\rho \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) = -2P \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{2\rho}{\tau} (C - \Theta) - (1-p)\rho F \quad (\text{II.2.32})$$

wobei wir die Abkürzungen

$$F(x, t) := \rho(x, t) \langle [v - \bar{v}]^3 \rangle, \quad (\text{II.2.33})$$

$$C(x, t) := \langle [v - \bar{v}][v_w - \bar{v}_w] \rangle, \quad (\text{II.2.34})$$

eingeführt haben. F ist eine Größe analog zur Wärmestromdichte und C wird als Kovarianz bezeichnet.

Es stellt sich die Frage, wie man dieses hierarchische Gleichungssystem sinnvoll schließen kann, z.B. durch eine geeignete Näherung. In der kinetischen Theorie klassischer Gase wird nach der Varianzgleichung geschlossen, da $\langle v^k \rangle$ mit $k > 2$ auf sehr viel kürzeren Zeitskalen gegen das Gleichgewicht strebt als $k = 1$. Für den Fall des Straßenverkehrs relaxiert $\langle v^k \rangle$ allerdings auf der Skala $\frac{\tau}{k}$, so daß diese Annahme nicht gerechtfertigt wäre. Man nimmt daher an, daß die Geschwindigkeit einer Normalverteilung

$$\tilde{P}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Theta}} e^{-(v-\bar{v})^2/2\Theta} \quad (\text{II.2.35})$$

folgt, was empirisch gut bestätigt ist. Damit lassen sich dann die aggregierten Größen explizit ausrechnen. Man erhält, neben der Kontinuitätsgleichung (II.2.28), die *Geschwindigkeitsgleichung*

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{V_0 - \bar{v}}{\tau}, \quad (\text{II.2.36})$$

mit

$$V_0(\rho, \Theta) := \bar{v}_w - \tau(\rho)(1-p)\rho\Theta, \quad (\text{II.2.37})$$

die *Varianzgleichung*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{2P}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{2}{\tau} (\Theta_0 - \Theta), \quad (\text{II.2.38})$$

mit¹¹

$$\Theta_0(\rho, F, C) := C - \frac{\tau(\rho)}{2}(1-p)F, \quad (\text{II.2.39})$$

und der Kovarianzgleichung

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial C}{\partial x} = -C \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{P}{\rho} \frac{\partial \bar{v}_w}{\partial x} + \frac{1}{\tau} [C_0 - C], \quad (\text{II.2.40})$$

mit

$$C_0(\rho, \Theta, C) := \langle (v_w - \bar{v}_w)^2 \rangle - 2\tau(\rho)(1-p)\rho C \sqrt{\frac{\Theta}{\pi}}. \quad (\text{II.2.41})$$

II.3 Fahrzeugfolge-Modelle

Fahrzeugfolgemodelle gehören zur Klasse der mikroskopischen Modelle, mit denen wir uns in den folgenden Abschnitten ausschließlich beschäftigen wollen. Mikroskopische Modelle betrachten Autos als wechselwirkende klassische Teilchen. Bei den Fahrzeugfolgemodelle wird daher für jedes Auto eine *Bewegungsgleichung* angegeben, deren allgemeine Struktur durch

$$\text{Aktion} = \text{Sensitivität} \cdot \text{Stimulus} \quad (\text{II.3.1})$$

gegeben ist. *Aktion* beschreibt dabei die Reaktion des Fahrers, i.a. eine Geschwindigkeitsänderung, auf einen äußeren Stimulus. Die Modelle unterscheiden sich vor allem darin, welcher Stimulus als wichtig angesehen wird. Es können dies Geschwindigkeiten, Geschwindigkeitsdifferenzen oder Abstände sein. Die Sensitivität kontrolliert dabei die Stärke des Einflusses und berücksichtigt z.B. verschiedene Fahrertypen (vorsichtig, aggressiv etc.).

II.3.1 Follow-the-Leader-Modelle

Beim *Follow-the-Leader-Modell* (Reuschel 1950, Pipes 1953) wird angenommen, daß der Stimulus die Geschwindigkeitsdifferenz zum Vordermann ist. Damit ergibt sich für das n -te Fahrzeug die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{1}{\tau} [\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)], \quad (\text{II.3.2})$$

wobei τ ein Maß für die Sensitivität ist und die Zeitskala der Relaxation bestimmt. Die Bewegungsgleichung (II.3.2) folgt durch Differenzieren aus der Gleichung

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = (\Delta x)_{\text{safe}} + \tau \dot{x}_n(t), \quad (\text{II.3.3})$$

die ausdrückt, daß (a) der Abstand $\Delta x_n = x_{n+1}(t) - x_n(t)$ umso größer ist, je höher die Geschwindigkeit ist, und (b) das es einen Sicherheitsabstand $(\Delta x)_{\text{safe}}$ zur Vermeidung von Unfällen gibt.

¹¹I.a. ist $\Theta_0(\rho, F, C) \approx C$.

Das Hauptproblem des Follow-the-Leader-Modells ist, daß es auf Grund der Linearität der Gleichungen die empirisch gefundenen Dichtewellen nicht reproduzieren kann. Deshalb sind verschiedene Verallgemeinerungen vorgeschlagen worden. Z.B. muß die Reaktionszeit T der Fahrer berücksichtigt werden, was auf Gleichungen der Form

$$\ddot{x}_n(t+T) = S \cdot [\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)] \quad (\text{II.3.4})$$

führt, mit dem konstanten Sensitivitätskoeffizienten S . (II.3.4) ist eine sogenannte *Delay-DGL*, die oft ein instabiles Verhalten zeigen. Für (II.3.4) kann man zeigen, daß sich für

$$S \cdot T > \frac{1}{2} \quad (\text{II.3.5})$$

Variationen der individuellen Fahrzeuggeschwindigkeiten immer weiter aufschaukeln. Dies führt dann dazu, daß weit entfernt vom Ursprungsort der Störung "Unfälle" entstehen.

Weitere Probleme, die in den Follow-the-Leader-Modell auftreten, sind:

- Mitzieh-Effekt: Langsame Fahrzeuge beschleunigen, wenn das Fahrzeug vor ihnen schnell fährt.
- Die mittlere Geschwindigkeit divergiert im Fall verschwindender Dichte $\rho \rightarrow 0$.
- Fahrzeuge, die keinen Vordermann in Sichtweite haben, sollten auf eine persönliche Wunschgeschwindigkeit beschleunigen, nicht auf die Geschwindigkeit eines sehr weit entfernten Vordermannes.

Man hat dann versucht, diese Probleme durch Einführung einer nichtkonstanten Sensitivität S zu lösen. Die allgemeine Form, die dabei betrachtet wurde, ist

$$S_n = \frac{\kappa_0 [v_n(t+\tau)]^m}{[x_{n+1}(t) - x_n(t)]^l} \quad (\text{II.3.6})$$

mit empirisch zu bestimmenden Konstanten m und l . Messungen zeigen, daß $m \approx 0.8$ und $l \approx 2.8$ ist. In Tunneln hat man dagegen $m \approx 0.6$ und $l \approx 2.1$ gemessen. Für die Reaktionszeit liefert $T \approx 1.5$ sec die besten Ergebnisse.

Die Bewegungsgleichungen

$$\dot{v}_n(t+T) = \frac{\kappa_0 [v_n(t+\tau)]^m}{(\Delta x_n(t))^l} [v_{n+1}(t) - v_n(t)] \quad (\text{II.3.7})$$

des Follow-the-Leader-Modells (II.3.4) mit (II.3.6) (und $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$) können durch Trennung exakt gelöst werden:

$$\frac{\frac{dv_n}{dt}(t+T)}{[v_n(t+\tau)]^m} = \kappa_0 \frac{\frac{d}{dt} \Delta x_n(t)}{[\Delta x_n(t)]^l}, \quad (\text{II.3.8})$$

woraus sich nach Integration die Beziehung

$$f_m(v_n(t+T)) = c_0 + c_1 f_l(\Delta x_n(t)) \quad (\text{II.3.9})$$

ergibt, mit den (Integrations-)Konstanten c_0 und c_1 und der Funktion

$$f_k(x) := \begin{cases} \ln x & \text{für } k = 1, \\ x^{1-k} & \text{für } k \neq 1. \end{cases} \quad (\text{II.3.10})$$

Speziell für die Fälle¹² $m \neq 1$ und $l \neq 1$ ergibt sich

$$[v_n(t+T)]^{1-m} - v_0^{1-m} = \frac{\kappa_0(1-m)}{1-l} [\Delta x_n(t)]^{1-l}, \quad (\text{II.3.11})$$

mit der Integrationskonstanten v_0 . Im stationären Fall sind v_n und Δx_n zeitunabhängig und unabhängig von n :

$$v_n = \bar{v}, \quad \Delta x_n = \frac{1}{\rho}, \quad (\text{II.3.12})$$

woraus sich dann

$$\bar{v} = v_0 \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^{l-1} \right]^{1/(1-m)} \quad (\text{II.3.13})$$

mit der maximalen Dichte

$$\rho_{\max} := \left[\frac{(l-1)v_0^{1-m}}{(1-m)\kappa_0} \right]^{1/(1-l)}. \quad (\text{II.3.14})$$

Offensichtlich gilt

$$\bar{v}(\rho = 0) = v_0 \quad \text{und} \quad \bar{v}(\rho = \rho_{\max}) = 0, \quad (\text{II.3.15})$$

was die Interpretation von v_0 als freie (unbehinderte) Geschwindigkeit nahe legt.

Die Fahrzeugfolgemodelle leiden unter einer Reihe von Problemen, die i.a. bis heute nicht befriedigend gelöst sind:

- Das Überholen von langsamen Fahrzeugen auf mehrspurigen Straßen wird vernachlässigt.
- Das Verhalten “freier” Fahrzeuge ($\Delta x \rightarrow \infty$) wird falsch beschrieben.
- Es tritt ein Mitzieheffekt auf.
- Beschleunigungs- und Bremsdauer sind gleich groß.

II.3.2 Optimal-Velocity-Modell

Die allgemeine mathematische Struktur der Bewegungsgleichung von Fahrzeugfolge-Modellen ist

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{1}{\tau} \left[V_{\text{Wunsch}}^{(n)}(t) - v_n(t) \right] \quad (\text{II.3.16})$$

wobei $V_{\text{Wunsch}}^{(n)}(t)$ die Wunschgeschwindigkeit des n -ten Fahrers zur Zeit t ist. Diese Wunschgeschwindigkeit hängt in der Regel von anderen Größen ab. In den Follow-the-Leader-Modellen

¹²Die anderen Fälle werden in Aufgabe 11 der Übungen behandelt.

aus Abschnitt II.3.1 z.B. versuchen die Fahrer einen Sicherheitsabstand zum Vordermann einzuhalten, indem sie ihre Geschwindigkeit der des Vordermannes anpassen, d.h. $V_{\text{Wunsch}}^{(n)}(t) = \dot{x}_{n+1}$. Es gibt aber auch andere Möglichkeiten, $V_{\text{Wunsch}}^{(n)}(t)$ zu wählen. Naheliegender ist die Vermutung, daß die Wunschgeschwindigkeit vom Abstand zum Vordermann abhängt, d.h.

$$V_{\text{Wunsch}}^{(n)}(t) = V_{\text{opt}}^{(n)}(\Delta x_n(t)) \quad (\text{II.3.17})$$

mit $\Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$. I.a. nimmt man an, daß $V_{\text{opt}}^{(n)}$ für alle Fahrzeuge gleich ist. Die Funktion $V_{\text{opt}}(\Delta x)$ bezeichnet man auch als *Optimal-Velocity-Funktion* oder kurz als *OV-Funktion*.

Als Bewegungsgleichung erhält man dann (Bando et al. 1994)

$$\dot{v}_n(t) = \frac{1}{\tau} [V_{\text{opt}}(\Delta x_n(t)) - v_n(t)]. \quad (\text{II.3.18})$$

Man beachte, daß es sich dabei um ein System von DGL 2. Ordnung handelt, denn neben \dot{v}_n und v_n tritt über Δx_n auch x_n auf. Die Sensitivität wird durch τ kontrolliert und reskaliert die Zeitskala.

Die Dynamik des OV-Modells besteht dann aus 4 einfachen Schritten:

1. Bestimme den Abstand Δx_n zum Vordermann.
2. Berechne die Wunschgeschwindigkeit $V_{\text{opt}}(\Delta x_n)$.
3. Vergleiche diese mit der aktuellen Geschwindigkeit v_n .
4. Beschleunige bzw. verzögere gemäß (II.3.18).

Über die Form der OV-Funktion $V_{\text{opt}}(\Delta x)$ lassen sich einige allgemeine Aussagen treffen. Allgemein sollte $V_{\text{opt}}(\Delta x)$ eine monoton wachsende Funktion sein, d.h. die Wunschgeschwindigkeit wächst i.a. mit dem Abstand zum Vordermann. Außerdem sollte gelten:

$$\begin{aligned} \text{Für } \Delta x \rightarrow 0 : & \quad V_{\text{opt}}(\Delta x) \rightarrow 0 \\ \text{Für } \Delta x \rightarrow \infty : & \quad V_{\text{opt}}(\Delta x) \rightarrow v_{\text{max}} \end{aligned} \quad (\text{II.3.19})$$

wobei v_{max} die Maximalgeschwindigkeit, die z.B. durch eine Geschwindigkeitsbeschränkung gegeben sein kann, ist. Wie man sieht, treten hier nicht die Probleme bei der Beschreibung "freier Fahrzeuge" auf, die wir bei den Follow-the-Leader-Modellen beobachtet haben.

Die typische Form der OV-Kurve wird z.B. durch

$$V_{\text{opt}}(\Delta x) = v_0 \tanh[m(\Delta x - b_f)] - \tanh[m(b_c - b_f)]. \quad (\text{II.3.20})$$

wiedergegeben (siehe Fig. II.3.1). Dabei ist b_c die effektive Fahrzeuglänge (mit $V_{\text{opt}}(b_c) = 0$), b_f bestimmt die Lage des Wendepunktes der OV-Kurve (wobei $V_{\text{opt}}(b_f) = v_{\text{max}} - v_0$). v_0 hängt mit der Maximalgeschwindigkeit v_{max} über

$$v_{\text{max}} = v_0 (1 - \tanh[m(b_c - b_f)]) \quad (\text{II.3.21})$$

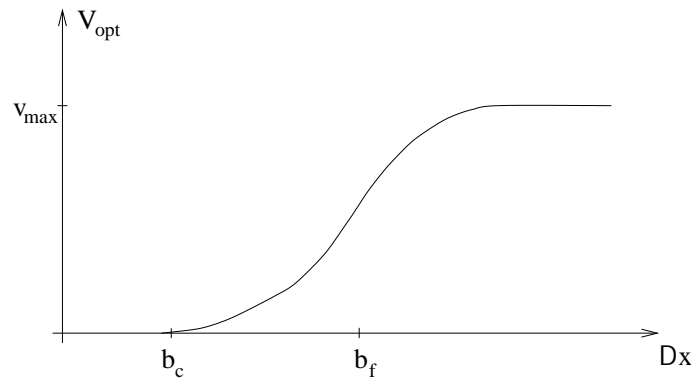


Abbildung II.3.1: Typische Form der OV-Funktion. Unterhalb von b_c verschwindet die Wunschgeschwindigkeit und b_f bezeichnet die Position des Wendepunktes.

zusammen.

Die Form (II.3.20) der OV-Funktion ist empirisch gut bestätigt und die auftretenden Parameter sind experimentell bestimmbar. Dabei ist aber festzustellen, daß die Werte der Parameter vom Verkehrszustand abhängen können, d.h. empirisch erhält man verschiedene Werte in den unterschiedlichen Phasen (Freifluß, Stau, synchronisierter Verkehr).

Um ein grundsätzliches Verständnis für das Verhalten des Modells zu bekommen, benutzt man in Rechnungen und Simulationen häufig eine vereinfachte Form von (II.3.20). Man setzt $b_c = 0$, $b_f = 2$ und $m = 1$. Außerdem kann man $v_0 = 1$ wählen, da es im wesentlichen nur die Zeit reskaliert. Man erhält daher

$$V_{\text{opt}}(\Delta x) = \tanh(\Delta x - 2) + \tanh 2. \quad (\text{II.3.22})$$

Wie bei den bisher betrachteten Modellen interessiert man sich für die Frage nach der Existenz und Stabilität von homogenen stationären Lösungen der Form¹³

$$x_n^{(0)}(t) = bn + ct, \quad (\text{II.3.23})$$

wobei $b = L/N$ der (mittlere) Abstand zwischen den Fahrzeugen ist und c eine konstante Geschwindigkeit. N ist dabei die Zahl der Autos und L die Länge des periodischen Systems.

Offensichtlich ist (II.3.23) eine Lösung der Bewegungsgleichungen (II.3.18): Da gilt $\ddot{x}_n^{(0)} = 0$ und $\Delta x_n^{(0)} = \frac{L}{N} = \text{konstant}$ ergibt sich mit (II.3.18)

$$v_n^{(0)} = V_{\text{opt}}(\Delta x_n^{(0)}) = V_{\text{opt}}\left(\frac{L}{N}\right) \quad (\text{II.3.24})$$

und somit wegen $v_n^{(0)} = \dot{x}_n^{(0)} = c$ auch $V_{\text{opt}}(L/N) = V_{\text{opt}}(1/\rho)$.

Um die lineare Stabilität der homogenen Lösung zu untersuchen, betrachten wir wieder eine kleine Störung

$$x_n(t) = x_n^{(0)} + y_n(t) \quad \text{mit} \quad |y_n(t)| \ll 1. \quad (\text{II.3.25})$$

¹³Die Autos werden hier als punktförmig angenommen.

Setzt man dies in die Bewegungsgleichung ein und linearisiert, so folgt linearisierte OV-Gleichung

$$\ddot{y}_n(t) = \frac{1}{\tau} [f \Delta y_n - \dot{y}_n(t)]. \quad (\text{II.3.26})$$

mit

$$f := V'_{\text{opt}} \left(\frac{L}{N} \right) = \left. \frac{\partial V_{\text{opt}}(\Delta x)}{\partial \Delta x} \right|_{\Delta x = \frac{L}{N}}. \quad (\text{II.3.27})$$

Als Ansatz zur Lösung der linearisierten Gleichungen wählen wir ebene Wellen in der Fahrzeug-Verteilung, d.h. die Fourier-Entwicklung

$$y_n = e^{i\alpha n + (u+iv)t} \quad (\text{II.3.28})$$

mit

$$\alpha = \frac{2\pi}{N} k \quad (k = 0, 1, \dots, N-1). \quad (\text{II.3.29})$$

Dabei folgt die Form der erlaubten α -Werte aus den periodischen Randbedingungen $y_n(t) = y_{n+N}(t)$.

Mit den Abkürzungen $a := \frac{1}{\tau}$ und $z := u + iv$ folgt dann

$$z^2 + az - af(e^{i\alpha} - 1) = 0. \quad (\text{II.3.30})$$

Existiert eine Lösung mit $u > 0$ für mindestens eines der erlaubten α aus (II.3.29), so bedeutet dies wegen (II.3.28), daß die zugehörige Mode im Laufe der Zeit anwächst und die homogene Lösung somit instabil ist. Stabilität liegt also dann vor, wenn für alle α_k das zugehörige $u_k \leq 0$ ist.

Allgemein kann man sich überlegen, daß für alle α die zugehörigen Lösungen für u auf einem Kreis mit Radius f liegen (siehe Abb. II.3.2), wobei f in (II.3.27) definiert wurde. Die Bedingung $u(\alpha, f) = 0$ führt dann auf

$$f = \frac{a}{2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}. \quad (\text{II.3.31})$$

Existiert ein Schnittpunkt des Kreises vom Radius f mit der kritischen Linie (II.3.31) für irgendein α , so ist die homogene Lösung instabil. Damit ergeben sich drei Fälle:

$f < \frac{a}{2}$: homogene Lösung stabil für alle Moden α

$f = \frac{a}{2}$: kritischer Fall ($u \leq 0$, aber mindestens eine Mode mit $u = 0$)

$f > \frac{a}{2}$: homogene Lösung instabil (Mode mit $u > 0$ existiert).

Zusammenfassend kann man also feststellen: Für

$$\left. \frac{\partial V_{\text{opt}}}{\partial \Delta x} \right|_{\Delta x = \frac{L}{N}} > \frac{1}{2\tau} \quad (\text{II.3.32})$$

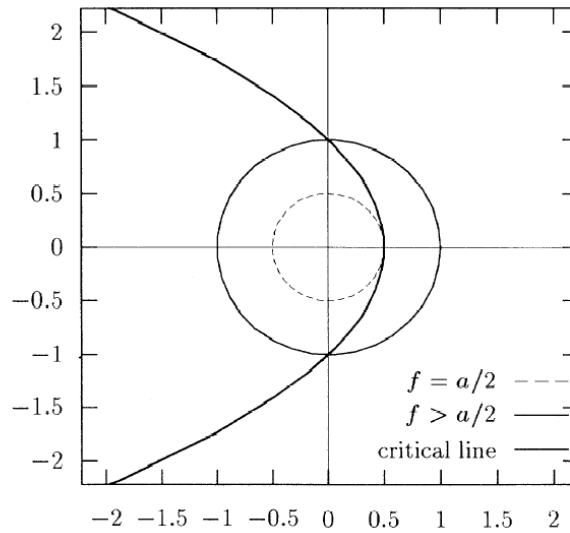


Abbildung II.3.2: Zur Bestimmung der Stabilität der homogenen Lösung im OV-Modell (siehe Text). In Polarkoordinaten (f, α) ist die kritische Linie $u(\alpha, f) = 0$ dargestellt, die den Bereich mit $u > 0$ von $u < 0$ trennt.

ist die homogene Lösung instabil. In Abb. II.3.3 sind diese Bereiche an Hand der OV-Kurve dargestellt. Für die OV-Funktion (II.3.22) liegen die Grenzen der Bereiche bei $\Delta x_1^{(c)} \approx 1.1$ und $\Delta x_2^{(c)} \approx 2.9$.

Abb. II.3.4 zeigt das Stabilitätsdiagramm als Funktion der Modellparameter τ und $\Delta x = \frac{L}{N}$ (bzw. ρ). (a_c, \bar{b}_c) entspricht dem kritischen Punkt $\frac{\partial^2 V_{\text{opt}}}{\partial \Delta x^2} \Big|_{\Delta x = \frac{L}{N}} = 0$, in dessen Nähe sog. *Solitonenlösungen* der Bewegungsgleichungen existieren.

Im instabilen Bereich entstehen Staus, die relativ kompakt sind. Die Situation ist ähnlich wie bei Modellen mit Phasenseparation. Die makroskopischen Eigenschaften des OV-Modells haben insgesamt sehr viele Gemeinsamkeiten mit denen des hydrodynamischen Modells von Kerner und Konhäuser.

Wir wollen nun die Dynamik im instabilen Bereich etwas genauer analysieren. Abb. II.3.5 zeigt die Phasenraum-Trajektorie eines Fahrzeugs in diesem Bereich. Sie hat die Form einer *Hystereseschleife*. Ein Fahrzeug, das sich im Stau befindet, entspricht dabei dem unteren Schnittpunkt der Kurve. Beschleunigt das Fahrzeug aus dem Stau heraus, so folgt es der unteren Kurven bis zum oberen Schnittpunkt, der dem Freiflußpunkt entspricht. Wenn es auf Grund der periodischen Randbedingungen wieder den Stau erreicht und abbremst, so folgt es der oberen Kurven bis hin zum Staupunkt.

Wir gehen aus von der Existenz eines Staus mit N_J Fahrzeugen. Ist Δx_F der mittlere Abstand im Freiflußbereich und Δx_J der mittlere Abstand im Stau, so gilt

$$\frac{N_J}{N - N_J} \approx -\frac{\frac{L}{N} - \Delta x_F}{\frac{L}{N} - \Delta x_J}, \quad (\text{II.3.33})$$

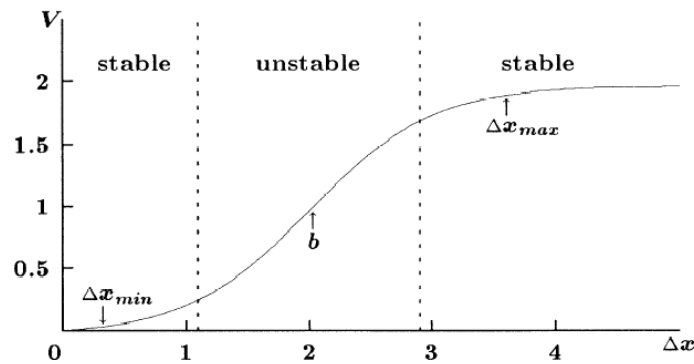
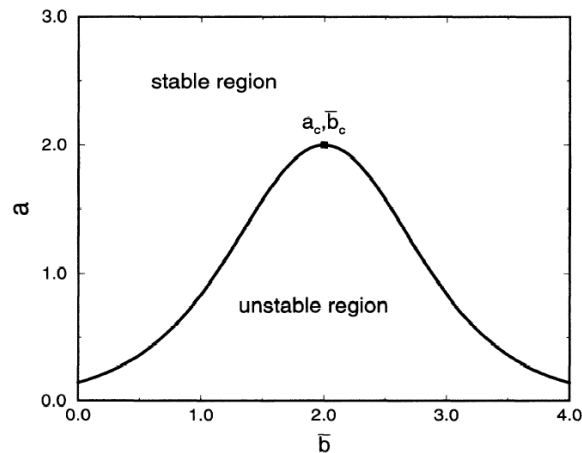


Abbildung II.3.3: Stabilitätsbereiche des OV-Modells (siehe Text).

Abbildung II.3.4: Stabilität der homogenen Lösung des OV-Modells als Funktion der Modellparameter. $a = \frac{1}{\tau}$ ist die Sensitivität und $\bar{b} = \Delta x$ der mittlere Abstand der Fahrzeuge.

da $N_J \Delta x_J + (N - N_J) \Delta x_F = L = \frac{L}{N} (N_J + (N - N_J))$ ist, wobei $N_J \Delta x_J$ die Länge des Staus und $(N - N_J) \Delta x_F$ die Länge des Freiflußbereichs ist¹⁴.

Der Stau bewegt sich rückwärts mit der Geschwindigkeit v_S . Aus der Bedingung, daß im stationären Zustand Stauausfluß und Stau einfluß gleich sein müssen, folgt $\rho_F (v_F + v_S) = \rho_J (v_J + v_S)$ (mit $v_{F/J} := V_{\text{opt}}(\Delta x_{F/J})$) und hieraus

$$v_S = \frac{\Delta x_J V_{\text{opt}}(\Delta x_F) - \Delta x_F V_{\text{opt}}(\Delta x_J)}{\Delta x_F - \Delta x_J}. \quad (\text{II.3.34})$$

Zur Bestimmung des Fundamentaldiagramms müssen wir den Fluß bestimmen. Diesen definiert man zweckmässigerweise durch $J := \frac{N}{T}$, wobei N die Zahl der Autos ist und T die mittlere Zeit, die ein Auto für eine Umrundung¹⁵ benötigt.

¹⁴Dabei wird angenommen, daß die Länge der Übergangsbereiche vernachlässigbar ist.

¹⁵Wir betrachten natürlich wieder periodische Randbedingungen!

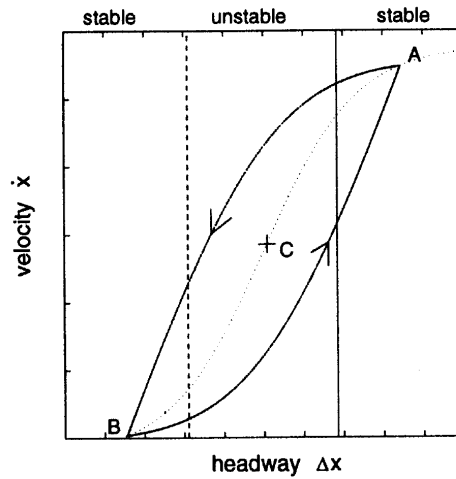


Abbildung II.3.5: Hysteresekurve für die Bewegung eines Fahrzeugs gestauten Bereich des OV-Modells. Punkt B entspricht dem Stau und A dem Freifluß.

In der gestauten Phase sei T_0 die Zeit, die ein Fahrzeug braucht, um alle Staus und Freiflußbereiche zu durchfahren. Dann ist

$$T_0 = T_F + T_J = \frac{\Delta x_F (N - N_J)}{V_{\text{opt}}(\Delta x_F) + v_S} + \frac{\Delta x_J N_J}{V_{\text{opt}}(\Delta x_J) + v_S}, \quad (\text{II.3.35})$$

wobei im Zähler jeweils die Gesamtlänge der Freifluß- und Staubereiche steht und im Nenner die Geschwindigkeit relativ zur Staufront. Da sich der Stau mit der Geschwindigkeit v_S rückwärts bewegt, wird er schneller durchquert als ein ortsfester Cluster gleicher Länge!

Die Rückwärtsbewegung der Staus macht eine Korrektur von T_0 nötig, denn bei einer Umrundung müssen so Teile des Staus quasi zweimal durchfahren werden. In der zur Umrundung benötigten Zeit T bewegt sich ein Stau um die Strecke $v_S T$ weiter. Deshalb ist

$$T = \left(1 + \frac{v_S T}{L}\right) T_0. \quad (\text{II.3.36})$$

Aus dieser Gleichung kann T leicht bestimmt werden.

Für den Fluß im gestauten Bereich ergibt sich dann

$$J_S = \frac{N}{T} \approx \frac{V_{\text{opt}}(\Delta x_F) - V_{\text{opt}}(\Delta x_J)}{\Delta x_F - \Delta x_J} - \rho v_S. \quad (\text{II.3.37})$$

In der homogenen Phase ist dagegen

$$T = \frac{L}{V_{\text{opt}}\left(\frac{L}{N}\right)}, \quad (\text{II.3.38})$$

womit sich für den Fluß ergibt

$$J_h = \rho V_{\text{opt}}\left(\frac{L}{N}\right) = \rho V_{\text{opt}}\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (\text{II.3.39})$$

Im Fundamentaldiagramm kann man 5 verschiedene Bereiche nach der Stabilität der mikroskopischen Zustände unterscheiden (siehe Abb. II.3.6).

Bereiche I,V: homogene Lösung stabil (durchgezogene Linie in Abb. II.3.6)

Bereich III: Staulösung stabil (gepunktete Linie in Abb. II.3.6)

Bereiche II,IV: beide Lösungen stabil

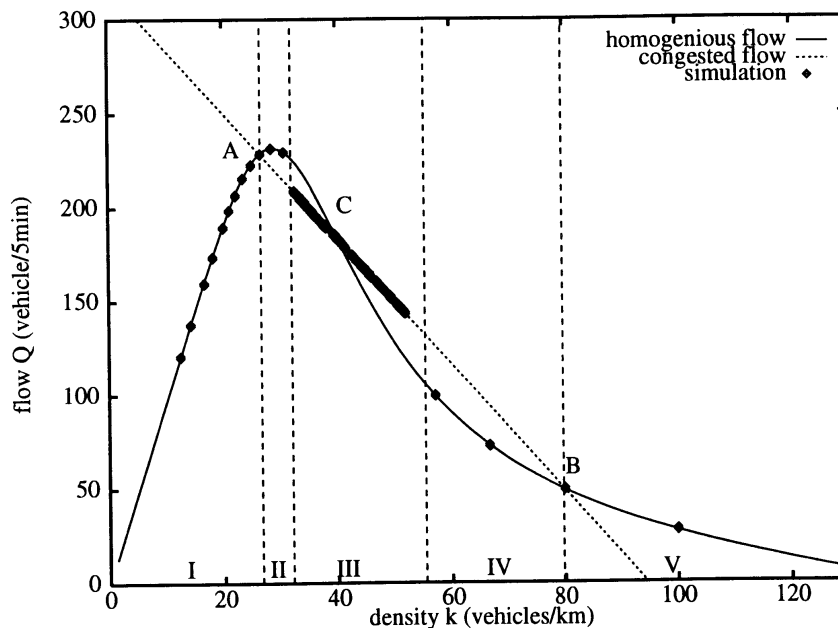


Abbildung II.3.6: Fundamentaldiagramm des OV-Modells. Die durchgezogene Linie zeigt die OV-Funktion und die Punkte Simulationsdaten. Je nach Stabilität können fünf verschiedene Bereiche unterschieden werden.

In Fig. II.3.6 sind außerdem weitere charakteristische Punkte gekennzeichnet. A und B sind der Freifluß- bzw. Staupunkt in der Hysterese-Kurve Abb. II.3.5. C bezeichnet den Wendepunkt der OV-Kurve.

Ein Problem beim OV-Modell ist, daß es nicht automatisch unfallfrei ist. Außerdem kann es im Prinzip passieren, daß Autos rückwärts fahren. Diese Probleme treten z.B. dann auf, wenn sich ein Fahrzeug sehr schnell einem Stauende nähert, spielen aber im stationären Zustand für realistische Parameterwerte keine Rolle. Man kann sie auch durch Einführung einer modifizierten OV-Funktion

$$\tilde{V}_{\text{opt}}(\Delta x) = \frac{f(\Delta x)}{f(\infty)} \quad (\text{II.3.40})$$

mit

$$f(\Delta x) = \tanh(\Delta x - \varphi) + \tanh \varphi + \alpha \left(\frac{1}{(\Delta x)^{n_1}} - \frac{1}{(\Delta x)^{n_2}} \right) \quad (\text{II.3.41})$$

vermeiden. Dabei sind α , φ , n_1 und n_2 positive Konstanten¹⁶.

Der Zusatzterm¹⁷ proportional zu α dominiert für kleine Abstände $\Delta x \rightarrow 0$ und verhindert Kollisionen. Für Abstände $\Delta x > 1$ ist dagegen $\tilde{V}_{\text{opt}}(\Delta x) \approx V_{\text{opt}}(\Delta x)$. Abb. II.3.7 zeigt das Ergebnis einer linearen Stabilitätsanalyse in dem modifizierten Modell.

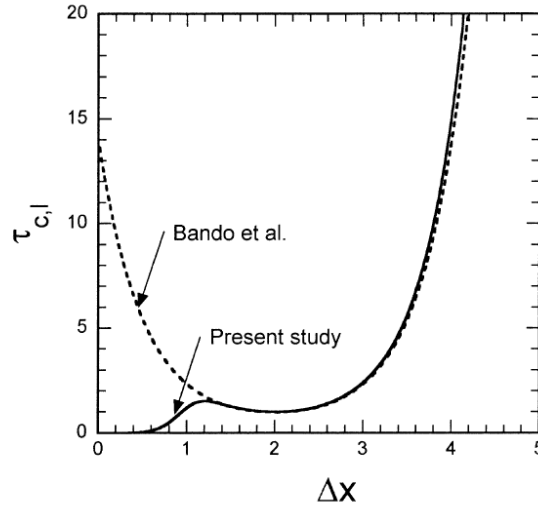


Abbildung II.3.7: Stabilitätsbereiche im gemäß (II.3.40) modifizierten OV-Modell (durchgezogene Linie) im Vergleich mit dem normalen OV-Modell (gestrichelten Linie).

Es sind darüber hinaus weitere Modifikationen des OV-Modells vorgeschlagen worden. Zunächst kann man wieder die Reaktionszeit T der Fahrer explizit berücksichtigen, was auf die Bewegungsgleichungen

$$\dot{v}_n(t + T) = \frac{1}{\tau} [V_{\text{opt}}(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] \quad (\text{II.3.42})$$

führt. Weiterhin sind psychologische Effekte berücksichtigt worden, indem auch der Abstand zum hinteren Fahrzeug bei der Ermittlung der Wunschgeschwindigkeit betrachtet wird:

$$\dot{v}_n(t + T) = \frac{1}{\tau} [V_{\text{opt}}(\Delta x_n(t)) U_{\text{opt}}(\Delta x_{n-1}(t)) - v_n(t)] \quad (\text{II.3.43})$$

mit der zugehörigen monoton fallenden Funktion

$$U_{\text{opt}}(\Delta x) = 1 + f_0(1 - \tanh(\Delta x - 2)). \quad (\text{II.3.44})$$

Dieses Modell erlaubt auch Anwendung auf den Fluß von granularen Materialien.

¹⁶Typische Werte sind $\alpha = 0.1$, $\varphi = 2$, $n_1 = 2$ und $n_2 = 4$.

¹⁷Man beachte, daß dessen Form an das Lennard-Jones-Potential erinnert.

II.3.3 Intelligent-Driver-Modell

Die Bewegungsgleichung des OV-Modells enthält nicht die Relativgeschwindigkeit $\Delta v_n = v_{n+1} - v_n$ zum Vordermann. Dies führt dazu, daß das Verhalten sehr stark von der Wahl von $V_{\text{opt}}(\Delta x)$ abhängt. Um Probleme durch mögliche Unfälle zu minimieren, muß die Sensitivität τ sehr klein gewählt werden. Dies führt dann allerdings dazu, daß die auftretenden Beschleunigungen unrealistisch groß sind¹⁸. Außerdem halten Fahrer für große Geschwindigkeitsunterschiede Δv_n einen größeren Sicherheitsabstand und verzögern eher.

Diese Effekte versucht das *Intelligent-Driver-Modell (IDM)* zu berücksichtigen (Helbing/Treiber, 1999). Das IDM ist wie das OV-Modell ein kontinuierliches deterministisches Modell, bei dem aber die Beschleunigung von Geschwindigkeit v_n , Abstand s_n und Geschwindigkeitsdifferenz Δv_n zum Vordermann abhängt. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\dot{v}_n = a \left[1 - \left(\frac{v_n}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{s^*}{s_n} \right)^2 \right] \quad (\text{II.3.45})$$

mit der Wunschgeschwindigkeit v_0 , der Lücke $s_n = x_{n+1} - x_n - l_{n+1} = \Delta x_n - l_{n+1}$ zum Vordermann und der Fahrzeuglänge l_n . s^* ist die (Mindest-)Wunschlücke

$$s^*(v_n, \Delta v_n) = s'_n + s''_n \sqrt{\frac{v_n}{v_0}} + T v_n + \frac{v_n \Delta v_n}{2\sqrt{ab}}, \quad (\text{II.3.46})$$

wobei a die Maximalbeschleunigung und b eine komfortable Bremsverzögerung ist. T ist ein sicherer Zeitabstand und s' , s'' hängen mit den Lücken in Staus zusammen, wobei i.a. $s'' = 0$ gesetzt wird.

Die rechte Seite von Gleichung (II.3.45) ist eine Überlagerung zweier Terme, der Beschleunigung $a \left[1 - \left(\frac{v_n}{v_0} \right)^\delta \right]$ auf freier Straße, mit $-a \left(\frac{s^*}{s_n} \right)^2$, der die Verzögerung durch die Wechselwirkung mit anderen Autos beschreibt. Speziell für $\delta = 1$ führt der Wechselwirkungsbeitrag zu einer exponentiellen Relaxation $\frac{v_0 - v_n}{v_0}$, die wir schon bei vielen anderen Modellen kennengelernt haben. Der Fall $\delta \rightarrow \infty$ entspricht einer konstante Beschleunigung auf die Wunschgeschwindigkeit v_0 .

Wegen $s^*(v_n = 0, \Delta v_n) = s'_n$ ist s'_n in (II.3.46) als Abstand der Fahrzeuge in einem Stau zu interpretieren. $T v_n$ ist die in der Zeit T zurückgelegte Strecke. Sie hat die Bedeutung eines Sicherheitsabstandes. Weiterhin ist $s^*(v_n, \Delta v_n = 0) = s'_n + T v_n + s''_n \sqrt{\frac{v_n}{v_0}}$, d.h. s''_n steuert den Abstand beim Kolonnenfahren ($\Delta v_n = 0$).

Der Term $\frac{v_n \Delta v_n}{2\sqrt{ab}}$ beschreibt intelligentes Fahrverhalten. Normales Abbremsen geschieht mit der Verzögerung b . In Notsituation ist zur Unfallvermeidung aber eine höhere Verzögerung $\frac{(\Delta v_n)^2}{2s_n}$ notwendig, die i.a. größer als b ist. Nähert man sich z.B. einem stehenden Hindernis (d.h. $\Delta v_n = v_n$), so wird ein Unfall vermieden bei einer Verzögerung $b_n := \frac{v_n^2}{2s_n}$. Wir definieren nun $\beta := \frac{b_n}{b}$. Für $\beta \leq 1$ handelt es sich um eine normale Situation, bei ein Abbremsen mit b ausreichend ist.

¹⁸In realem Verkehr ist die Beschleunigungszeit typischerweise 5-10 mal so groß wie die Bremszeit.

Parameter	Typischer Wert
Wunschgeschwindigkeit v_0	120 km/h
zeitlicher Sicherheitsabstand T	1.6 s
Maximalbeschleunigung a	0.73 m/s ²
Wunschbremsverzögerung b	1.67 m/s ²
Beschleunigungsexponent δ	4
Abstand im Stau s'	2 m
Abstand in Kolonnen s''	0 m
Fahrzeuglänge $l = 1/\rho_{\max}$	5 m

Tabelle II.1: Modellparameter des IDM.

Ist dagegen $\beta > 1$, so ist eine Notbremsung notwendig. Dies wird gerade durch den Wechselwirkungsanteil in s^* gewährleistet:

$$\left(\frac{s^*}{s_n}\right)_{WW}^2 = \frac{b_n^2}{b} = \beta^2 b \quad \begin{cases} \leq b & \text{in normalen Situationen} \\ > b & \text{in Notsituationen} \end{cases} \quad (\text{II.3.47})$$

Typische Werte für die Parameter in (II.3.45) und (II.3.46) sind in Tabelle II.1 zusammengestellt. Die Beschleunigung a entspricht dabei einer Zeit von 38 sec für eine Beschleunigung von 0 auf 100 km/h. Die maximale Bremsverzögerung ist mit etwa 4.5 m/s², d.h. der halben Erdbeschleunigung, deutlich größer als b .

Zur Bestimmung des Fundamentaldiagramms betrachten wir wieder den stationären Zustand mit $\dot{v}_n = 0$ und $\Delta v_n = 0$. Dann ist

$$s_0^*(v) := s^*(v, 0) = s' + s'' \sqrt{\frac{v}{v_0}} + Tv, \quad (\text{II.3.48})$$

woraus mit $\dot{v}_n = 0$ und (II.3.45)

$$s_0(v) = s_0^*(v) \left[1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^\delta \right]^{-1/2} \quad (\text{II.3.49})$$

folgt. Auflösen dieser Gleichung nach v ist nur für $s' = 0$ und $\delta = 1$, $\delta = 2$ oder $\delta = \infty$ einfach. Speziell für $s' = s'' = 0$ und $\delta = 1$ ergibt sich

$$v(s) = \frac{s^2}{2v_0 T^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4T^2 v_0^2}{s^2}} - 1 \right), \quad (\text{II.3.50})$$

woraus man mit $s = \Delta x - l = \frac{1}{\rho} - l = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\max}}$ das Fundamentaldiagramm $J(\rho) = \rho v(\rho)$ erhält.

Der Exponent δ beeinflusst vor allem den Übergangsbereich zwischen Freifluß und gestautem Verkehr. Für $\delta \rightarrow \infty$ und $s'' = 0$ ist z.B.

$$J(\rho) = \min \left(\rho v_0, \frac{1 - (l + s')\rho}{T} \right). \quad (\text{II.3.51})$$

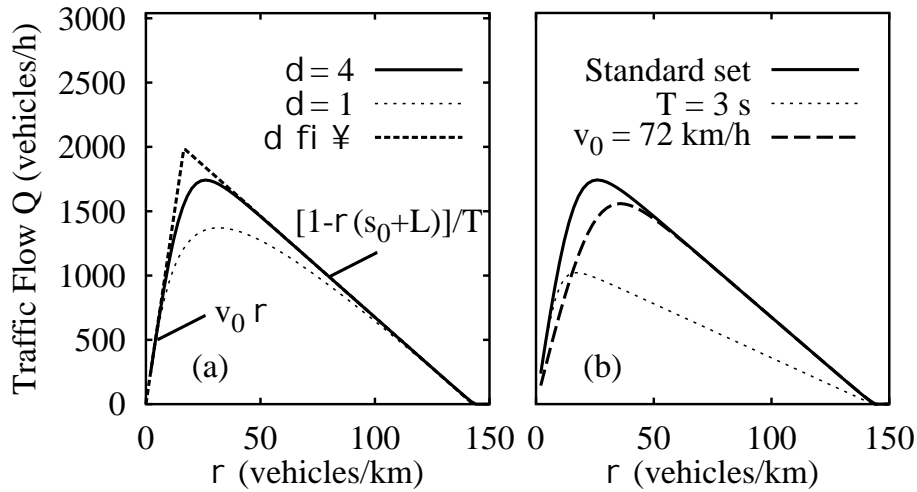


Abbildung II.3.8: Fundamentaldiagramm des Intelligent-Driver-Modells für verschiedene Werte von δ (links) und andere Variationen der Standardparameter aus Tabelle II.1.

Die Kalibrierung des Modells mit empirischen Daten kann folgendermassen vorgenommen werden. v_0 wird aus dem Verhalten bei kleinen Dichten bestimmt, z.B. der Steigung des Freiflußastes. δ folgt aus dem Verhalten in der Übergangsregion von Freifluß zu gestautem Verkehr. Der Sicherheitsabstand T läßt sich aus dem Verhalten bei hohen Dichten bestimmen und die Parameter s' und s'' aus dem gestauten Bereich.

Die Stabilität der homogenen Lösung wird kontrolliert von den Parametern a , b und T . Sie wird instabiler für kleinere a und T (kleiner Sicherheitsabstand) und größerem b (weniger Antizipation). Bei der numerischen Untersuchung des Modells treten keine Probleme auf und Diskretisierungen von $\Delta t \leq 0.4$ sec führen zu verlässlichen Ergebnissen.

II.4 Coupled-Map-Modelle

Bei den sogenannten *Coupled-Map-Modellen* ist die Zeit t eine diskrete Variable und die dynamischen Gleichungen sind durch diskrete Abbildungen ("maps") gegeben. Die typische Struktur ist dabei

$$x_n(t + \Delta t) = v_n(t) + x_n(t)\Delta t, \quad (\text{II.4.1})$$

$$v_n(t + \Delta t) = \text{map}_n(\Delta x_n(t), v_n(t), v_w), \quad (\text{II.4.2})$$

wobei v_w eine noch zu spezifizierende Wunschgeschwindigkeit ist. Im folgenden werden wir die wichtigsten Coupled-Map-Modelle kurz vorstellen. Sie unterscheiden sich durch die Wahl der diskreten Abbildungen map_n . Der diskrete Zeitschritt wird dabei i.a. als $\Delta t = 1$ gewählt.

II.4.1 Yukawa-Kikuchi-Modell

Im Modell von Yukawa und Kikuchi (1995) wird die Bewegung einzelner freier Fahrzeuge, die nicht mit anderen wechselwirken, durch folgende Geschwindigkeitsabbildung beschrieben:

$$v(t+1) = F(v(t)) := \gamma v(t) + \beta \tanh\left(\frac{v_w - v(t)}{\gamma}\right) + \epsilon. \quad (\text{II.4.3})$$

Dabei sind β , γ , δ und ϵ freie Parameter. Abb. II.4.1 zeigt den Verlauf der Funktion $F(v)$. Daraus lassen sich sofort die möglichen Verhaltensmuster ablesen.

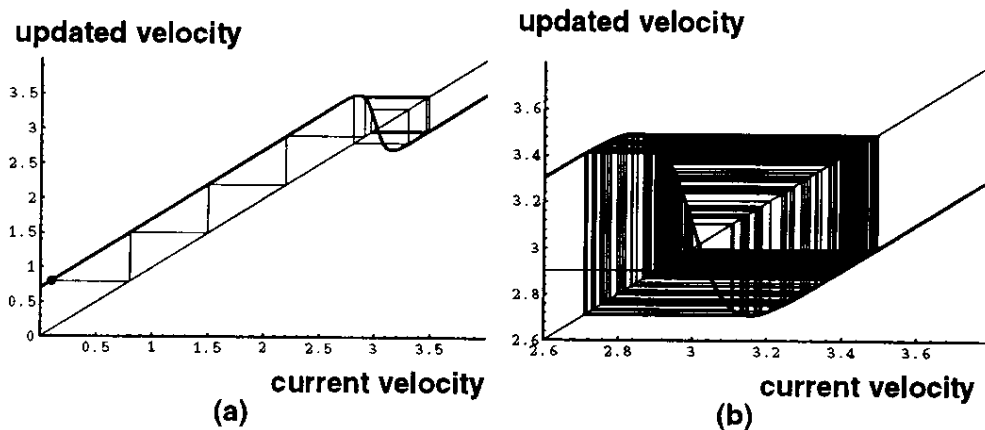


Abbildung II.4.1: Freiflußabbildung $F(v)$ des Coupled-Map-Modells von Yukawa und Kikuchi für $\beta = 0.6$, $\delta = 0.1$, $\epsilon = 0.1$ und $v_w = 3$. Die x -Achse ist $v(t)$ und die y -Achse $v(t+1)$. (a) zeigt den Fall $\gamma = 1$ mit einer periodischen Bewegung nahe v_w und (b) den Fall $\gamma = 1.001$. Hier wird die Bewegung nahe v_w chaotisch.

Für $\gamma = 1$ wird das Verhalten nahe der Wunschgeschwindigkeit v_w periodisch. Für $\gamma \gtrsim 1$ dagegen beobachtet man chaotisches Verhalten. Die dabei auftretenden Beschleunigungen sind aber ungefähr konstant. Obwohl das Modell rein deterministisch ist, sind durch das Auftreten von deterministischem Chaos Schwankungen im Fahrverhalten möglich.

Haben wir es mit einem System aus mehreren Fahrzeugen zu tun, so muß die Abbildung (II.4.3) durch eine zusätzliche Bremsabbildung zur Unfallvermeidung ergänzt werden.

Im sog. Modell A ist diese Bremsabbildung sehr einfach:

$$B(\Delta x_n(t)) = \Delta x_n(t) - l \quad \text{falls } \Delta x_n(t) \leq v_n(t). \quad (\text{II.4.4})$$

Dabei ist l die Fahrzeuglänge. Ein Fahrzeug, dessen Geschwindigkeit grösser ist als der Abstand $\Delta x_n(t)$ zum Vordermann¹⁹, bremst dabei auf die sichere Geschwindigkeit $\Delta x_n(t) - l$ ab, um eine Kollision zu vermeiden.

Modell B ist durch eine zusätzliche Bremsabbildung definiert, die zwischen der Freiflußmap (II.4.3) und der Bremsmap (II.4.4) interpoliert:

$$v_n(t+1) = G(\Delta x_n(t), v_n(t)) := v_n(t) + \frac{F(v_n(t)) - v_n(t)}{(\alpha - 1)v_n(t)} [\Delta x_n(t) - l - v_n(t)]$$

(für $v_n(t) \leq \Delta x_n(t) - l \leq \alpha v_n(t)$).

(II.4.5)

Die Abbildung G ist dabei anzuwenden, falls $v_n(t) \leq \Delta x_n(t) \leq \alpha v_n(t)$ ist. Offensichtlich ist also $G(\Delta x, v = \Delta x - l) = \Delta x - l$ und $G(\Delta x, v = \frac{\Delta x - l}{\alpha}) = F(\frac{\Delta x - l}{\alpha})$.

Insgesamt ist die Geschwindigkeitsabbildung von Modell B gegeben durch

$$\text{map}_n(v_n(t), \Delta x_n(t)) = \begin{cases} F(v_n(t), v_w^{(n)}) & \text{für } \alpha v_n(t) \leq \Delta x_n(t), \\ G(\Delta x_n(t), v_n(t)) & \text{für } v_n(t) \leq \Delta x_n(t) \leq \alpha v_n(t), \\ B(\Delta x_n(t)) & \text{für } \Delta x_n(t) \leq v_n(t). \end{cases} \quad (\text{II.4.6})$$

Abbildung II.4.2 zeigt die Fundamentaldiagramme für Modell A und Modell B, die mit Hilfe von Computersimulationen bestimmt wurden. Bei lokalen Messungen kann zusätzlich noch ein metastabiler Hochflußast beobachtet werden. Für die Ausbildung von Staus in dem Modell sind

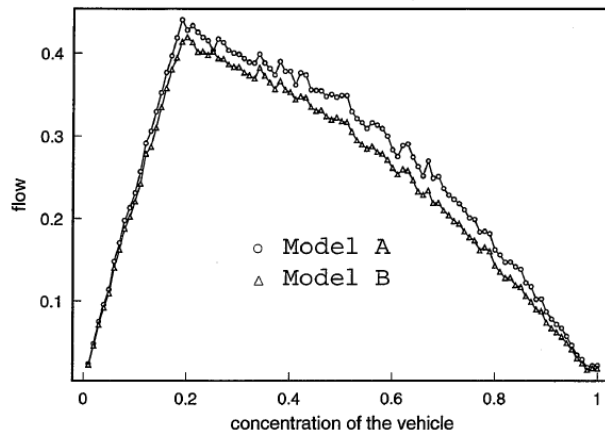


Abbildung II.4.2: Fundamentaldiagramm des Coupled-Map-Modells von Yukawa und Kikuchi.

aber unterschiedliche Wunschgeschwindigkeiten wichtig, die dann zur Bildung von Kolonnen hinter relativ langsamen Fahrzeugen führen. Je nach Anfangsbedingung bewegen sich Staus mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten v_s rückwärts. Staus mit $v_s \neq -\frac{1}{2}$ sind dabei metastabil, d.h. unter dem Einfluß einer kleinen Störung gehen sie in Staus mit der Geschwindigkeit $v_s = -\frac{1}{2}$ über.

¹⁹Man beachte, daß wir $\Delta t = 1$ gesetzt haben!

II.4.2 Coupled-Map-OV-Modell

Von Tadaki, Kikuchi, Sugiyama und Yukawa wurde 1998 eine Coupled-Map Variante des Optimal-Velocity-Modells aus Abschnitt II.3.2 vorgeschlagen. Neben der Abbildung (II.4.1) zur Aktualisierung der Position besteht es aus der Geschwindigkeitsabbildung

$$v(t+1) = [v(t) + \alpha (V_{\text{opt}}(\Delta x) - v(t))] (1 + f\xi). \quad (\text{II.4.7})$$

Der letzte Term entspricht dabei einem multiplikativen Rauschen mit einer im Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gleichverteilten Zufallszahl ξ und der Stärke f .

Die zusätzliche Regel

$$x(t+1) = x(t) \quad \text{und} \quad v(t+1) = 0 \quad (\text{falls } \Delta x < \Delta x_{\text{min}}) \quad (\text{II.4.8})$$

verhindert Unfälle und rückwärtsfahrende Autos.

Der Vorteil des Coupled-Map-OV-Modell gegenüber dem ursprünglichen OV-Modell liegt vor allem darin, daß auf Grund der diskreten Zeit leichter offene Randbedingungen und Mehrspurmodelle untersucht werden können, d.h. Situationen, in denen sich die Reihenfolge oder Zahl der Fahrzeuge ändert. Ansonsten ähneln die Eigenschaften des Modells sehr stark denen des ursprünglichen OV-Modells.

II.4.3 Nagel-Herrmann-Modell

Das Coupled-Map-Modell von Nagel und Herrmann (1993) ist durch Betrachtung des Kontinuumslimites des Zellularautomatenmodells von Nagel und Schreckenberg (siehe Kapitel III.1) entstanden. Die Fahrzeuge sind dabei durch ihre Maximalgeschwindigkeit v_{max} und den Sicherheitsabstand α charakterisiert. Die Geschwindigkeitsabbildung ist dann

$$v_n(t + \Delta t) = \begin{cases} \max(\Delta x_n(t) - \delta, 0) & \text{falls } v_n(t) > \Delta x_n(t) - \alpha, \\ \min(v_n(t) + a, v_{\text{max}}) & \text{falls } v_n(t) < \Delta x_n(t) - \beta, \\ v_n(t) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{II.4.9})$$

Anschaulich beinhaltet die Abbildung (II.4.9) folgendes: Autos mit einem Abstand, der kleiner als der Sicherheitsabstand ist, bremsen ab. Der Parameter δ bestimmt dabei den Abstand nach dem Abbremsen. Autos mit einem großem Abstand zum Vordermann beschleunigen, wobei die Beschleunigung durch den Parameter

$$a = a_{\text{max}} \max \left[1, \frac{\Delta x_n(t)}{\gamma} \right] \quad (\text{II.4.10})$$

bestimmt wird.

Die Dynamik ist deterministisch, zeigt aber eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Für äquidistante Anfangsbedingungen findet man ein Fundamentaldiagramm mit zwei linearen Ästen (siehe Abb. II.4.3, links). Für zufällige Anfangsbedingungen ist das Fundamentaldiagramm etwas komplexer (siehe Abb. II.4.3, rechts).

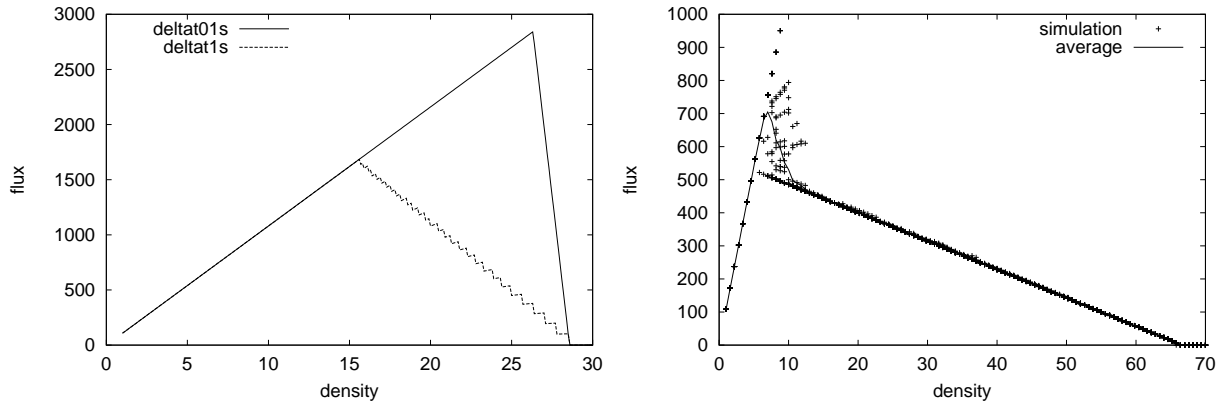


Abbildung II.4.3: Fundamentaldiagramm des Nagel-Herrmann-Modells für äquidistante Anfangsbedingungen und zwei verschiedene Zeitdiskretisierungen Δt (links) und für zufällige Anfangsbedingungen (rechts). Die Parameterwerte sind jeweils $\alpha = \delta = 15$, $\beta = 35$, $\gamma = 10$, $a_{\max} = 1$ und $v_{\max} = 30$.

II.4.4 Krauß-Modell

In dem 1997 von Krauß, Wagner und Gawron vorgeschlagenen Modell²⁰ werden die Fahrzeuge neben der Maximalgeschwindigkeit v_{\max} und der Länge l durch ihr Beschleunigungs- und Bremsvermögen $a(v)$ bzw. $b(v)$ charakterisiert. Die Dynamik genügt daher der Bedingung

$$-b \leq \dot{v} \leq a \quad (\text{II.4.11})$$

mit $a, b > 0$. Zusätzlich soll bei der Dynamik die Vermeidung von Unfällen berücksichtigt werden. Allgemein gilt dann für die Geschwindigkeit

$$v(t + \Delta t) \leq \min [v_{\max}, v(t) + a\Delta t, v_{\text{safe}}], \quad (\text{II.4.12})$$

da die neue Geschwindigkeit die Maximalgeschwindigkeit v_{\max} nicht überschreiten darf und die Geschwindigkeitsänderung durch das Beschleunigungsvermögen a beschränkt ist. v_{safe} schließlich ist eine sichere Geschwindigkeit, die Unfälle vermeidet. Sie ist dabei so zu bestimmen, daß das maximale Bremsvermögen b berücksichtigt wird, d.h.

$$v(t + \Delta t) \geq v(t) - b\Delta t. \quad (\text{II.4.13})$$

Zur Modellierung der Wechselwirkung betrachten wir konkret ein Fahrzeug am Ort x_n und ein vorausfahrendes bei x_{n+1} . Die Lücke zwischen den beiden Autos ist also $s_n = x_{n+1} - x_n - l$. Dann ist Unfallfreiheit garantiert, wenn

$$v_n(t + \Delta t) \leq v_{n+1}(t) + \frac{s_n(t) - v_{n+1}(t)\tau}{\tau_w(t)} \quad (\text{II.4.14})$$

²⁰Das i. a. als Krauß-Modell oder SK-Modell bezeichnet wird.

mit der ‘‘Wunschrelaxationszeit’’ τ_w , die z.B. von der Wunschverzögerung abhängt und aus zwei Beiträgen besteht:

$$\tau_w = \tau_b + \tau \quad \text{mit} \quad \tau_b = \frac{\bar{v}}{b} \quad \text{und} \quad \bar{v} = \frac{1}{2}(v_n + v_{n+1}) \quad (\text{II.4.15})$$

wobei τ die Reaktionszeit des Fahrers ist. \bar{v} ist die mittlere Geschwindigkeit der beiden Fahrzeuge. Die Beziehung (II.4.14) wird in Aufgabe 14 der Übungen hergeleitet. Dabei ist zu sagen, daß diese Bedingung einer Art ‘‘dynamischen Unfallfreiheit’’ entspricht. Sie garantiert nicht, daß das System unfallfrei ist, wenn man z.B. irgendwo im System Autos hinzufügt. Dies führt daher zu Problemen, wenn man offene Randbedingungen oder Mehrspurverkehr betrachtet.

Die vollständige Dynamik des Krauß-Modells, das im Übrigen eng verwandt ist mit dem Modell von Gipps (1981), ist dann gegeben durch die sichere Geschwindigkeit

$$v_{\text{safe}}^{(n)}(t) = v_{n+1}(t) + \frac{s_n(t) - v_{n+1}(t)\tau}{\tau_b + \tau}, \quad (\text{II.4.16})$$

d.h. es wird vom günstigsten Fall der Gleichheit in der allgemeinen Bedingung (II.4.14) ausgegangen und die Wunschgeschwindigkeit

$$v_w^{(n)}(t) = \min \left(v_{\max}, v_n(t) + a(v)\Delta t, v_{\text{safe}}^{(n)}(t) \right). \quad (\text{II.4.17})$$

Die neue Geschwindigkeit und Position zur Zeit $t + \Delta t$ sind dann

$$x_n(t + \Delta t) = x_n(t) + v_n(t)\Delta t, \quad (\text{II.4.18})$$

$$v_n(t + \Delta t) = \max(0, v_w^{(n)}(t) - \eta). \quad (\text{II.4.19})$$

Dabei sind die Nebenbedingungen (siehe Übungen) $\Delta t \leq \tau$ und $s_w \geq v_{n+1}\Delta t$ zu beachten. η ist eine Zufallsschwankung, die Abweichungen vom idealen Fahrverhalten beschreibt.

Speziell für $\Delta t = \tau$, $s_w = v_{n+1}\Delta t$ und konstantem a und b ergibt sich mit der Wahl (o.B.d.A.) $\Delta t = 1$

$$v_w = \min(v_{\max}, v_n + a, v_{\text{safe}}), \quad (\text{II.4.20})$$

$$v_{\text{safe}} = v_{n+1}(t) + \frac{s_n - v_{n+1}}{1 + \frac{v_n + v_{n+1}}{2b}}, \quad (\text{II.4.21})$$

$$v_n(t + 1) = \max(0, \text{rand}[v_w - \epsilon a, v_w]) \quad (\text{II.4.22})$$

wobei $\text{rand}[x_1, x_2]$ eine Zufallszahl aus dem Intervall $[x_1, x_2]$ ist. Dieser Beitrag entspricht einem zufälligen Abbremsen und modelliert z.B. Schwankungen im Fahrverhalten²¹.

Die Verhaltensmuster, die in dem Modell für verschiedene Parameterwerte a und b auftreten können, lassen sich in drei verschiedene Klassen einteilen (siehe Abb. II.4.4).

²¹Wir werden darauf in Kapitel III.1 zurück kommen.

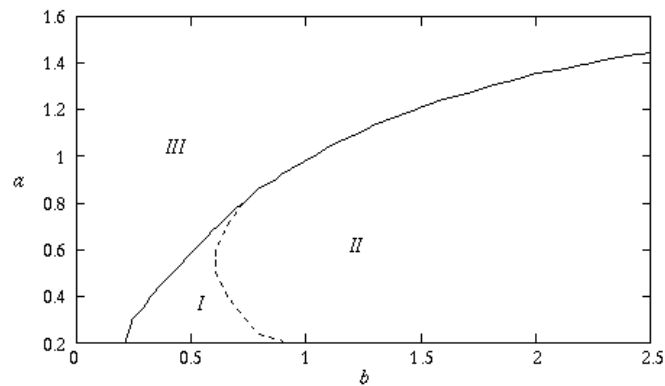


Abbildung II.4.4: Einteilung des Krauß-Modells in drei Modellklassen mit qualitativ unterschiedlichem Verhalten.

Klasse I (kleine Verzögerung und Beschleunigung)

Die Modelle der Klasse I haben relativ kleine Verzögerungen b und Beschleunigungen a . Sie zeigen eine Phasenseparation in Staus und Freiflußbereiche und die Existenz von metastabilen Hochflußzuständen. Der Übergang vom Freifluß in den gestauten Bereich ist ein Phasenübergang 1. Ordnung. Weitere Modelle, die zu dieser Klasse gehören, sind das Kerner-Konhäuser- und das Optimal-Velocity-Modell.

Klasse II (große Verzögerung und kleine Beschleunigung)

Die Modelle in dieser Klasse sind durch eine große Verzögerung aber kleine Beschleunigungen charakterisiert. Sie zeigen spontane Staubildung, die Staus wachsen dabei aber nicht beliebig an. Es gibt keinen echten Phasenübergang, der Freifluß und gestauten Bereich voneinander trennt. Der typische Vertreter dieser Klasse ist das Nagel-Schreckenberg-Modell (siehe Kap. III.1).

Klasse III (große Beschleunigung)

In dieser Klasse, in der sich die Modelle mit einer großen Beschleunigungskonstante a befinden, tritt keine Strukturbildung auf durch spontane Staumentstehung auf. Die Zustände sind makroskopisch homogen. Wegen der fehlenden spontane Staubildung sind die Modelle dieser Klasse als Verkehrsmodelle ungeeignet.

Die Klassifikation zeigt die Rolle von Beschleunigungs- und Bremsverhalten bei der Entstehung der mikroskopischen Struktur der Verkehrszustände.

Die Fundamentaldiagramme der drei Klassen unterscheiden sich qualitativ durch die Anordnung von drei charakteristischen Dichten²²:

- Die Dichte ρ_{out} des Ausflusses aus einem Stau

²²Die Vorstellung dabei ist immer, daß man es mit einem fiktiven, perfekt homogenen Strom zu tun hat.

- Die Dichte ρ_{stau} in einem Stau
- Die Dichte ρ_c , bei der der homogene Fluß instabil wird und Staus entstehen²³

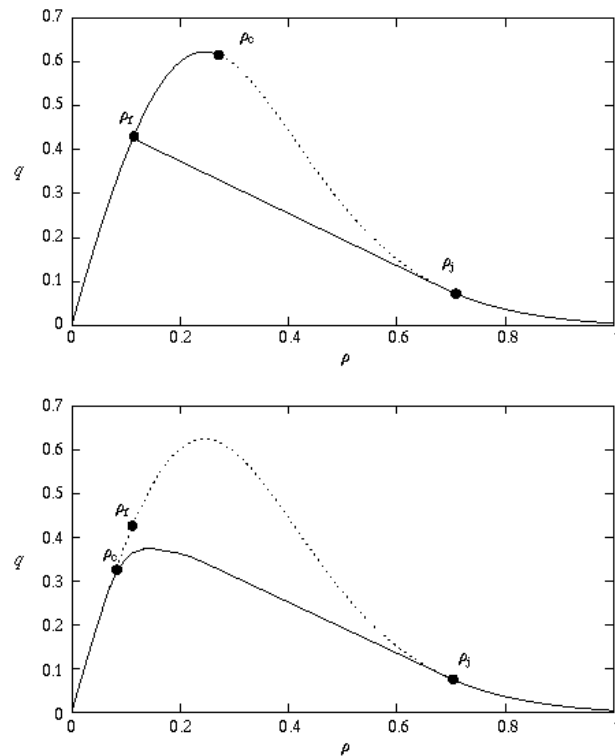


Abbildung II.4.5: Struktur des Fundamentaldiagramms in den drei Klassen des Krauß-Modells. $\rho_j = \rho_{\text{stau}}$ ist die Dichte im Stau und $\rho_f = \rho_{\text{out}}$ die Dichte des Stauausflusses. Oben: $\rho_{\text{out}} < \rho_{\text{stau}}$ (Klasse I); unten: $\rho_c \leq \rho_{\text{out}} < \rho_{\text{stau}}$ (Klasse II, III). Die gestrichelte Linie entspricht einem fiktiven homogenen Zustand, der allerdings instabil ist.

Natürlich gilt allgemein $\rho_{\text{out}} < \rho_{\text{stau}}$ und $\rho_c < \rho_{\text{stau}}$. Es bleiben daher zwei Möglichkeiten (siehe Abb. II.4.5):

- $\rho_{\text{out}} < \rho_c < \rho_{\text{stau}}$: Dies ist gerade die Bedingung für Phasenseparation, die wir schon in Abschnitt I.2.3 kennengelernt haben. In diesem Fall ist der Stauausfluß stabil. Diese Bedingung ist in Klasse I erfüllt.
- $\rho_c \leq \rho_{\text{out}} < \rho_{\text{stau}}$: In diesem Fall ist der Stauausfluß instabil, es treten keine metastabilen Zustände oder Phasenseparation auf. Dies entspricht der Situation in Klasse II (und Klasse I, wo aber keine spontane Stauentstehung auftritt).

²³I.a. liegt ρ_c nahe dem Maximum des Fundamentaldiagramms.

Kapitel III

Zellularautomaten-Modelle

Zellularautomaten sind Modelle, die diskret in Raum, Zeit und Zustandsvariablen sind. I.a. handelt es sich um mikroskopische Modelle mit einer stochastischen Dynamik.

Die numerische Untersuchung kontinuierlicher Modelle, die z.B. durch partielle Differentialgleichungen definiert sind, erfordert eine Diskretisierung der kontinuierlichen Variablen: $x \rightarrow \Delta x$, $t \rightarrow \Delta t$. Dies führt a) zu Problemen mit der numerischen Stabilität, gerade bei nichtlinearen Gleichungen, und b) sind verlässliche Resultate nur im Limes $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta t \rightarrow 0$ zu erwarten, was den numerischen Aufwand deutlich erhöht. Diese Probleme treten bei diskreten Modellen nicht auf, da in der Definition der Dynamik bereits die Endlichkeit von Δx und Δt berücksichtigt wird.

Wir werden im folgenden erst einfache Modelle diskutieren und diese später weiterentwickeln, um eine genauere Beschreibung der mikroskopischen Verkehrszustände, wie sie empirisch beobachtet werden, zu erhalten.

III.1 Nagel-Schreckenberg-Modell

Der Prototyp aller Zellularautomaten-Modelle für den Straßenverkehr wurde 1992 von Kai Nagel und Michael Schreckenberg in Köln entwickelt. Sie gingen von der Idee aus, die Straße in einzelne Zellen zu unterteilen, die höchstens ein Auto enthalten können. Daher kann man die Länge einer Zelle mit dem typischen Platzbedarf eines Autos im dichtesten Stau identifizieren. Üblicherweise wählt man als Zellenlänge 7.5 m, was etwa der Fahrzeuglänge plus dem mittleren Abstand zum Vordermann im Stau entspricht.

Abb. III.1.1 zeigt eine typische Konfiguration. Die Zahl rechts oben in den besetzten Zellen gibt dabei die momentane Geschwindigkeit v_n des Fahrzeugs n an. Die Geschwindigkeit ist dabei auch diskret. Wir nehmen im folgenden zunächst an, daß alle Fahrzeuge die Geschwindigkeitswerte $v = 0, 1, \dots, v_{\max}$ annehmen können. Die Maximalgeschwindigkeit v_{\max} ist dabei für alle Autos gleich. Man kann sich vorstellen, daß dies einer Geschwindigkeitsbeschränkung entspricht. v_{\max} ist also i.a. nicht die maximale Geschwindigkeit, die das Fahrzeug erreichen kann.

Nachdem wir nun den Zustand der Straße zu einer Zeit t charakterisiert haben, müssen wir

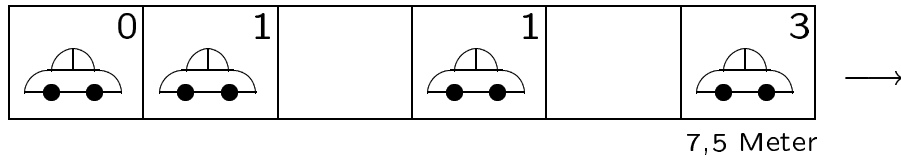


Abbildung III.1.1: Typische Konfiguration im Nagel-Schreckenberg-Modell.

die zeitliche Entwicklung dieses Zustandes definieren. Die Zeit sei auch diskretisiert, d.h. wir müssen nun angeben, wie wir den Zustand zur Zeit $t + 1$ zu bestimmen haben. Nach Nagel und Schreckenberg besteht der Zeitschritt $t \rightarrow t + 1$ aus 4 einfachen Teilschritten, die auf jedes Fahrzeug n anzuwenden sind:

- *Schritt 1: Beschleunigung*

Ist $v_n < v_{\max}$, so wird die Geschwindigkeit des n -ten Autos um eine Einheit erhöht:

$$v_n \rightarrow v'_n := \min(v_n + 1, v_{\max}) \quad (\text{R1}).$$

- *Schritt 2: Abbremsen durch andere Autos*

Ist die Zahl d_n leerer Zellen vor Fahrzeug n kleiner als die aktuelle Geschwindigkeit v'_n , so wird auf die Geschwindigkeit d_n abgebremst:

$$v'_n \rightarrow v''_n := \min(v'_n, d_n) \quad (\text{R2}).$$

- *Schritt 3: "Trödeln"*

Ist $v''_n > 0$, so wird die Geschwindigkeit des n -ten Fahrzeugs zufällig mit Wahrscheinlichkeit p um eine Einheit vermindert:

$$v''_n \rightarrow v'''_n := \begin{cases} \max(v''_n - 1, 0) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ v''_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases} \quad (\text{R3}).$$

- *Schritt 4: Fahren*

Das Fahrzeug bewegt sich mit der neuen Geschwindigkeit $v_n(t + 1) = v'''_n$ um $v_n(t + 1)$ Zellen weiter:

$$x_n(t + 1) = x_n(t) + v_n(t + 1) \quad (\text{R4}).$$

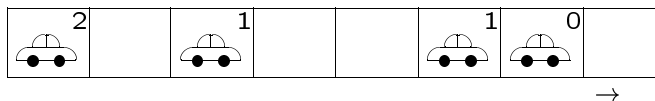
Jeder Schritt ist dabei gleichzeitig auf alle Fahrzeuge anzuwenden. Insbesondere wird also nicht berücksichtigt, daß sich vorausfahrende Fahrzeuge im gleichen Zeitschritt auch bewegen können. Diese sog. *parallele Dynamik*¹ ist entscheidend für ein realistisches Verhalten.

¹Manchmal auch als *synchrone Dynamik* bezeichnet.

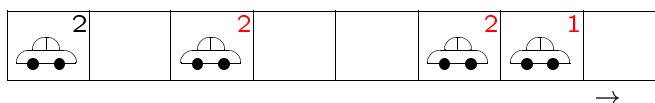
Man beachte, daß nur der 2. Schritt (R2) eine Wechselwirkung der Fahrzeuge enthält. Schritt 3, der Trödelschritt, macht die Dynamik stochastisch. Das *Nagel-Schreckenberg-Modell* (*NaSch-Modell*) ist daher ein *stochastischer Zellularautomat*.

Abb. III.1.2 zeigt Schritt für Schritt die Anwendung der Regeln (R1) bis (R4) auf eine Beispielfigur. Man beachte, daß es vor dem Trödelschritt drei Kandidaten mit $v_n > 0$ gibt, von denen aber nur einer tatsächlich trödelt².

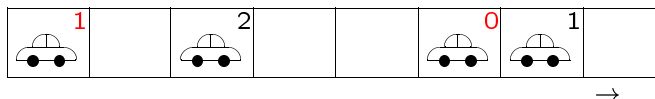
Konfiguration zur Zeit t :



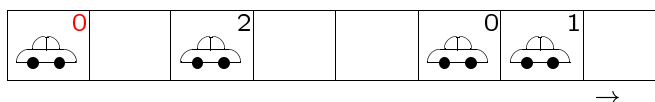
R1) Beschleunigen ($v_{\max} = 2$):



R2) Bremsen:



R3) Trödeln ($p = 1/3$):



R4) Fahren (= Konfiguration zur Zeit $t + 1$):

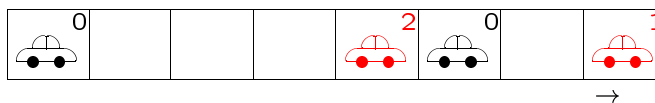


Abbildung III.1.2: Schritt-für-Schritt-Beispiel zu den Nagel-Schreckenberg-Regeln. Es wird dabei $v_{\max} = 2$ und $p = 1/3$ angenommen. Alle Änderungen zum vorherigen Teilschritt sind rot gekennzeichnet.

Wir wollen nun die Bedeutung der einzelnen Schritte diskutieren.

²Wie man es im Mittel wegen $p = 1/3$ auch erwartet.

1. Der Beschleunigungsschritt modelliert den Vorwärtsdrang der Fahrer, die so schnell wie möglich bzw. erlaubt fahren wollen.
2. Der Bremsschritt dient der Vermeidung von Unfällen. Wie schon erwähnt wird dabei nicht berücksichtigt, daß sich der Vordermann evtl. im gleichen Zeitschritt auch bewegt.
3. Der Trödelschritt berücksichtigt viele verschiedene Effekte. Er modelliert z.B. natürliche Schwankungen im Fahrverhalten. Selbst ein einzelnes Fahrzeug auf der Straße fährt nicht mit absolut konstanter Geschwindigkeit, sondern schwankt zwischen v_{\max} und $v_{\max} - 1$. Wichtiger ist aber, daß dieser Schritt zu einer gewissen Asymmetrie von Bremsen und Beschleunigen führt. Genauer ist es so, daß die Beschleunigung verzögert wird, da u.U. zwischendurch durch das Trödeln die Geschwindigkeit konstant bleibt. Im Gegensatz dazu wird das Abbremsen verstärkt, da der sichere Abstand nach Schritt 2 durch zusätzliches Trödeln nochmals vergrößert wird. Diese Art der Überreaktion, d.h. Abbremsen stärker als es zur Unfallvermeidung eigentlich notwendig ist, ist wesentlich für die spontane Stauentstehung. In gewissen Dichtebereichen kann es zu einer Lawine von Überreaktionen kommen, bei der Fahrzeuge auf Grund eines nichtidealen Bremsmanövers des Vordermannes selbst abbremsen müssen und so nachfolgende Fahrzeuge ebenfalls zum Bremsen zwingen. Ist die (lokale) Dichte groß genug, kann dies schließlich zu einem stehenden Fahrzeug, und damit einem Stau, führen.
4. Dieser Schritt entspricht offensichtlich der Fortbewegung der Fahrzeuge gemäß der in den Schritten 1-3 bestimmten neuen Geschwindigkeit.

Das NaSch-Modell ist ein minimales Modell in dem Sinne, daß alle vier Regeln notwendig sind, um realistisches Verhalten zu erzielen. Dies sieht man deutlich in Abb. III.1.3. Im Fall $p = 0$, was dem Vernachlässigen von R3 entspricht, gibt es keine spontane Stauentstehung. Außerdem ist die Reihenfolge wichtig. Vertauscht man z.B. R2 und R3, so gibt es keine Überreaktionen und damit keine spontane Staubildung mehr.

Wir haben schon die Längenskala des Systems identifiziert: Eine Zelle entspricht 7.5 m. Im folgenden wollen wir die Zeitskala bestimmen, d.h. welcher realen Zeit entspricht ein Zeitschritt $t \rightarrow t + 1$. Dazu überlegen wir uns zunächst, daß sich ein einzelnes (freies) Auto mit der Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v_{\text{safe}} = (1 - p)v_{\max} + p(v_{\max} - 1) = v_{\max} - p \quad (\text{III.1.1})$$

bewegt, da es mit der Wahrscheinlichkeit p trödelt und dann nur mit der $v_{\max} - 1$ fährt. Diese Geschwindigkeit wollen wir mit 120 km/h identifizieren. Für ein Modell mit $v_{\max} = 5$ und $p = 0.5$ ergibt sich dann

$$\frac{7.5 \text{ m}}{\text{Zelle}} \times \frac{4.5 \text{ Zellen}}{\text{Zeitschritt}} \times \frac{3.6 \text{ sec}}{120 \text{ m}} \approx 1 \frac{\text{sec}}{\text{Zeitschritt}} \quad (\text{III.1.2})$$

d.h. ein Zeitschritt in dem Modell³ entspricht etwa 1 sec in der Realität. Es gibt noch andere Möglichkeiten⁴ die Zeitskala abzuschätzen, die wir in Aufgabe 18 der Übungen diskutieren.

³Bei dem die 4 Regeln einmal auf alle Fahrzeuge angewendet wurden.

⁴Über die Dichte am Flußmaximum, den maximalen Fluß oder die Staugeschwindigkeit.

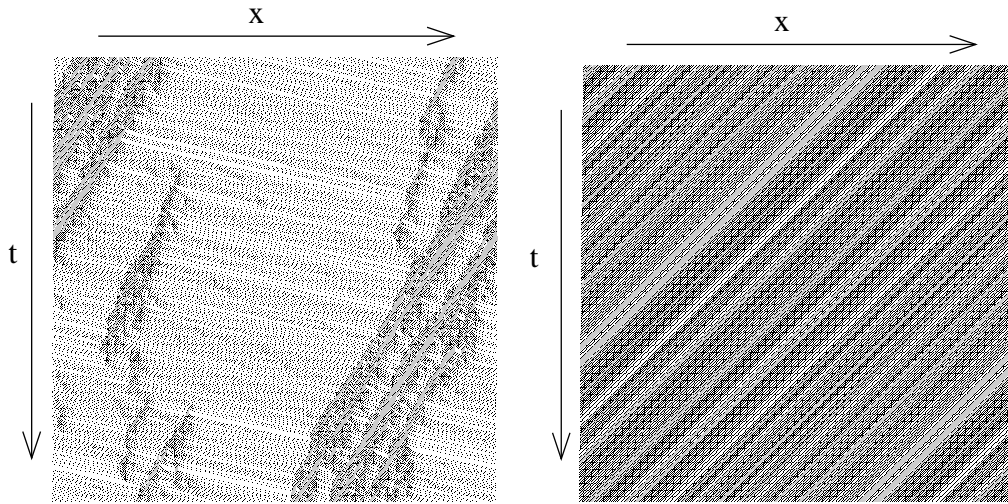


Abbildung III.1.3: Fahrzeugtrajektorien im Nagel-Schreckenberg-Modell. Links ist $p = 0.25$ und $\rho = 0.2$, rechts $p = 0$ und $\rho = 0.5$. Man erkennt deutlich, daß es für $p = 0$ keine spontane Stautenstehung gibt.

Alle führen allerdings auf eine ähnliche Größenordnung. Diese Zeitskala ist sinnvoll, denn sie entspricht in etwa der kleinsten relevanten Zeitskala im Verkehr, der Reaktionszeit der Fahrer.

III.1.1 Fundamentaldiagramm

Im Folgenden wollen wir zunächst die grundlegenden Eigenschaften des Fundamentaldiagramms des NaSch-Modells diskutieren. Wir beginnen mit dem Fall $p = 0$. In diesem Spezialfall ist die Dynamik vollständig deterministisch. Die Regeln (R1)–(R4) lassen sich dann kompakt schreiben als

$$v_n(t+1) = \min(v_{\max}, v_n(t) + 1, d_n(t)). \quad (\text{III.1.3})$$

Der stationäre Zustand läßt sich leicht bestimmen. Für Dichten $\rho \leq \rho_c$ mit

$$\rho_c = \frac{1}{v_{\max} + 1} \quad (\text{III.1.4})$$

können sich die Fahrzeuge so anordnen, daß jedes mindestens v_{\max} freie Zellen vor sich hat. Dann ist jeder Zustand mit $v_n = v_{\max}$ für alle Autos n offensichtlich stationär denn wegen (III.1.3) ist immer $v_n(t+1) = v_{\max}$. Der Fluß ist dann $J = \rho v_{\max}$.

Ist $\rho > \rho_c$, so gibt es mindestens ein Fahrzeug mit $d_n < v_{\max}$. In diesem Fall ist dann nach (III.1.3) im stationären Zustand $v_n(t) = d_n(t)$. Da der mittlere Abstand bei Dichte ρ gerade $\frac{1}{\rho} - 1$ ist, folgt für die mittlere Geschwindigkeit $v = \frac{1}{\rho} - 1$ und somit für den Fluß $J = \rho v = 1 - \rho$. Das Fundamentaldiagramm im deterministischen Fall $p = 0$ ist also kompakt durch

$$J(p = 0) = \min(\rho v_{\max}, 1 - \rho) \quad (\text{III.1.5})$$

gegeben. Es besteht also aus zwei Geraden mit den Steigungen v_{\max} (Freifluß) bzw. -1 (gestauter Bereich), die sich im Punkt $(\rho_c, \frac{v_{\max}}{v_{\max}+1})$ schneiden (siehe Abb. III.1.5).

Ein weiterer interessanter Spezialfall ist der Fall $p = 1$. Auch hier ist die Dynamik vollständig deterministisch, da immer getrödelt wird. Man könnte nun annehmen, daß ein Modell mit v_{\max} und $p = 1$ das gleiche Verhalten zeigt wie eines mit $v_{\max} - 1$ und $p = 0$. Dem ist aber nicht so. Das sieht man z.B. daran, daß für $p = 1$ ein stehendes Auto niemals wieder losfahren kann. So verschwindet im Fall $v_{\max} = 1$ der Strom J für alle Dichten ρ . Der Fall $v_{\max} > 1$ wird in den Übungen diskutiert. Hier hängt der Fluß im stationären Zustand sehr stark von der Anfangsbedingung ab. Für $\rho < \rho_c$ ist der günstigste Zustand der, bei der die Fahrzeuge immer mindestens eine Lücke von v_{\max} Zellen haben und mit der Geschwindigkeit $v_{\max} - 1$ fahren.

Im generischen Fall $0 < p < 1$ müssen wir die Fälle $v_{\max} = 1$ und $v_{\max} > 1$ unterscheiden. Überhaupt wird uns diese Unterscheidung später immer wieder begegnen. Für $v_{\max} = 1$ gibt es im Prinzip keine spontane Stauentstehung, da die oben beschriebene Kettenreaktion überhaupt nicht eintreten kann. Außerdem gibt es eine Symmetrie im Fall $v_{\max} = 1$, die sog. *Teilchen-Loch-Symmetrie*⁵

$$J(\rho) = J(1 - \rho). \quad (\text{III.1.6})$$

Dies kann man verstehen, wenn man sich klarmacht, daß sich die Dynamik im Fall v_{\max} auch folgendermaßen einfacher formulieren läßt: Ein Teilchen bewegt sich mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ um einen Platz nach rechts, wenn dieser unbesetzt ist. v_{\max} taucht gar nicht mehr explizit auf, da nach dem Schritt R1 alle Autos die Geschwindigkeit 1 haben. Mit dieser Interpretation der Dynamik sieht man, daß immer dann, wenn ein Teilchen nach rechts springt, ein ‐Loch‐, also ein unbesetzter Platz, nach links springt.

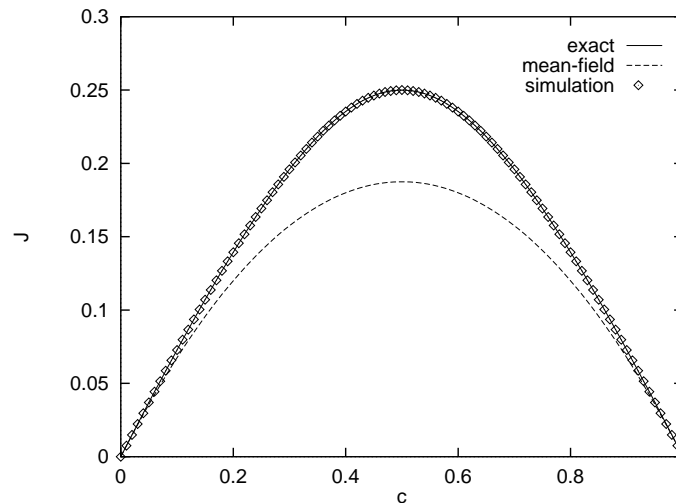


Abbildung III.1.4: Fundamentaldiagramm des Nagel-Schreckenberg-Modells für $v_{\max} = 1$ und $p = 0.25$ im Vergleich mit der Vorhersage der Mean-Field-Theorie.

⁵Diese Bezeichnung ist der Festkörperphysik entlehnt.

Abb. III.1.4 zeigt das Fundamentaldiagramm für $v_{\max} = 1$ im Vergleich mit dem Strom $J_{MF} = (1 - p)\rho(1 - \rho)$ einer Mean-Field-Rechnung (siehe Kap. III.1.2). Diese nimmt an, daß eine zufällige Verteilung der Autos vorliegt. Der Vergleich mit Computersimulationen und der exakten Lösung (siehe später)

$$J(\rho) = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - 4(1 - p)\rho(1 - \rho)} \right] \quad (\text{III.1.7})$$

zeigt, daß diese Annahme einer zufälligen Verteilung den Fluß deutlich unterschätzt: $J_{MF} < J$. Im stationären Zustand gibt es daher Korrelationen, die zu einer Flußerhöhung gegenüber einer rein zufälligen Verteilung führen. Diese Korrelationen bezeichnet man auch als *Teilchen-Loch-Anziehung*, denn sie führen dazu, daß die Wahrscheinlichkeit, daß] der Platz vor einem besetzten Platz leer ist, gegenüber einer rein zufälligen Verteilung erhöht ist. Bei letzterer ist diese Wahrscheinlichkeit gerade $1 - \rho$.

Für Geschwindigkeiten $v_{\max} > 1$ gibt es keine Teilchen-Loch-Symmetrie mehr (siehe Abb. III.1.4). Auch ist dieser Fall im Gegensatz zu $v_{\max} = 1$ nicht mehr exakt lösbar, so daß die analytische Form des Fundamentaldiagramms (außer im Fall $p = 0$) nicht bekannt ist. Man weiß aber etwas über die Grenzfälle kleiner bzw. großer Dichten. Dort ist

$$\text{für } \rho \ll 1 : \quad J \simeq \rho(v_{\max} - p), \quad (\text{III.1.8})$$

$$\text{für } \rho \ll 1 - \rho : \quad J \simeq (1 - p)(1 - \rho). \quad (\text{III.1.9})$$

Der Fluß für kleine Dichten folgt sofort aus der Freiflußgeschwindigkeit v_{safe} , siehe (III.1.1). Bei großen Dichten gibt es fast nur stehende Fahrzeuge und nur wenige Löcher (mit der Dichte $1 - \rho$), die dann mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ nach links wandern. Hier ist das Verhalten unabhängig von v_{\max} und entspricht insbesondere dem des Falls $v_{\max} = 1$.

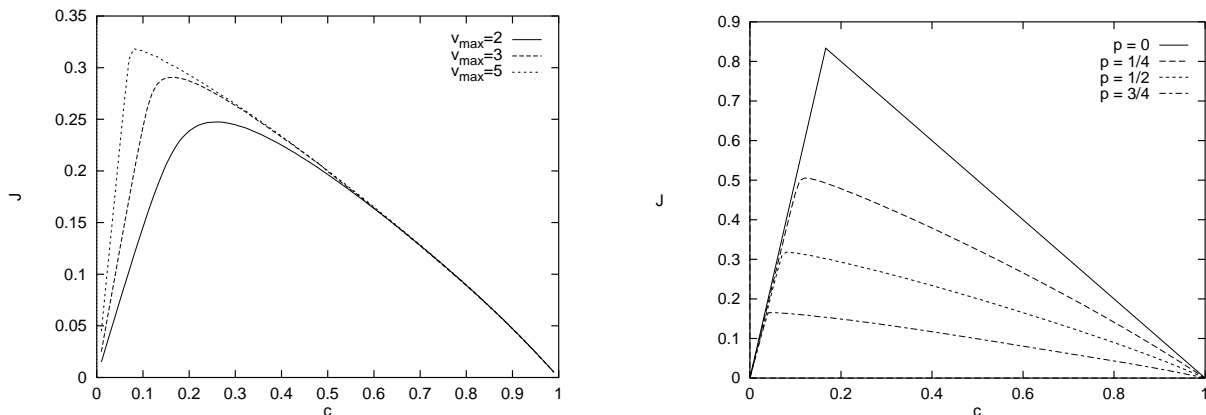


Abbildung III.1.5: Fundamentaldiagramm des Nagel-Schreckenberg-Modells für $v_{\max} = 2, 3, 5$ und $p = 0,25$ (links) bzw. $v_{\max} = 5$ und verschiedene Werte von p (rechts).

Wie im Fall $v_{\max} = 1$ gibt es auch für größere Werte der Geschwindigkeit eine Teilchen-Loch-Anziehung, die sogar eher stärker wird. Wir werden allerdings später sehen, daß] die Mean-Field-Rechnungen deutlich aufwändiger werden.

Abbildung III.1.5 zeigt, daß der Fluß für festes ρ eine monoton fallende Funktion von p ist. Außerdem wandert für stärkeres Trödeln das Maximum des Fundamentaldiagramms zu kleineren Dichten, ebenso für größere Werte von v_{\max} . Insgesamt verhalten sich alle Geschwindigkeiten $v_{\max} > 1$ qualitativ sehr ähnlich. Im Gegensatz zu $v_{\max} = 1$ gibt es zwar keine Teilchen-Loch-Symmetrie, aber spontane Staubildung.

III.1.2 Mean-Field-Theorie

Die einfachste Näherung zur Beschreibung eines dynamischen Systems ist die aus der Statistischen Physik bekannte *Mean-Field-Theorie*. Formal läßt sie sich als eine Faktorisierung der Wahrscheinlichkeit $P(\tau_1, \dots, \tau_L)$, das System im Zustand (τ_1, \dots, τ_L) zu finden, in Einzelplatzwahrscheinlichkeiten $P(\tau_j)$ einführen:

$$P(\tau_1, \dots, \tau_L) = P_{\tau_1} P_{\tau_2} \dots P_{\tau_L} = \prod_{j=1}^L P_{\tau_j}. \quad (\text{III.1.10})$$

Dies ist im allgemeinen natürlich nur eine Näherung.

Wir benötigen nun Evolutionsgleichungen, die die zeitliche Entwicklung der $P(\tau_j)$ bestimmen. Dazu betrachten wir eine Zelle j , die sich zur Zeit t mit der Wahrscheinlichkeit $P_{\tau_j}(t)$ im Zustand τ_j befindet. Der Zustand zur Zeit $t + 1$ hängt dann von den den v_{\max} Zellen $j - v_{\max}, j - v_{\max} + 1, \dots, j - 1$ links von j ab, aus denen evtl. ein Auto in die Zelle j fahren könnte, und von den v_{\max} Zellen $j + 1, \dots, j + v_{\max}$ rechts von j , die bestimmen, wie weit ein Auto, das sich u.U. in j befindet, fahren kann. Insgesamt hängt also die Wahrscheinlichkeit $P_{\tau_j}(t + 1)$ von den Zuständen der $2v_{\max} + 1$ Zellen um j herum ab. Wir wollen den Zustand dieses Clusters aus $2v_{\max} + 1$ Zellen mit $\vec{\tau}_j^{(2v_{\max}+1)} := (\tau_{j-v_{\max}}, \dots, \tau_{j+v_{\max}})$ bezeichnen. Die exakte Gleichung für die zeitliche Entwicklung von $P_{\tau_j}(t)$ hat daher folgende Struktur:

$$P_{\tau_j}(t + 1) = \sum_{\vec{\tau}_j^{(2v_{\max}+1)}} W \left(\vec{\tau}_j^{(2v_{\max}+1)} \rightarrow \tau_j \right) P_{\vec{\tau}_j^{(2v_{\max}+1)}}(t). \quad (\text{III.1.11})$$

Dabei ist $W \left(\vec{\tau}_j^{(2v_{\max}+1)} \rightarrow \tau_j \right)$ die Übergangswahrscheinlichkeit mit der Zelle j bei gegebener Clusterkonfiguration $\vec{\tau}_j^{(2v_{\max}+1)}$ zur Zeit t im Zeitschritt $t \rightarrow t + 1$ in den Zustand τ_j übergeht. Gleichung (III.1.11) ist ein Spezialfall der *Master-Gleichung*, die im Anhang allgemein besprochen wird.

Man sieht, daß man es hier mit einer Hierarchie von Gleichungen zu tun. Um die zeitliche Entwicklung von P_{τ_j} zu bestimmen, muß man $P_{\vec{\tau}_j^{(2v_{\max}+1)}}$ kennen. Man könnte nun eine Entwicklungsgleichung für diese Größe aufstellen⁶, diese würde aber auf noch größere Cluster führen usw. Wir müssen also diese Hierarchie von Gleichung irgendwo durch eine geeignete Näherung abschneiden.

⁶Was wir in Kap. III.1.3 auch tun werden!

Das weitere Vorgehen besteht aus drei Schritten. Zunächst müssen die Übergangswahrscheinlichkeiten $W\left(\vec{\tau}_j^{(2v_{\max}+1)} \rightarrow \tau_j\right)$ aus den Regeln R1–R4 bestimmt werden. Dann approximiert man die Clusterwahrscheinlichkeit $P_{\vec{\tau}_j}^{(2v_{\max}+1)}(t)$ durch den Mean-Field-Ausdruck $P_{j-v_{\max}} \cdots P_{j+v_{\max}}$. Im stationären Zustand, also für zeitunabhängige Wahrscheinlichkeiten, liefert dies ein nicht-lineares Gleichungssystem für die Wahrscheinlichkeiten P_{τ} . Dabei gehen wir wieder von der Translationsinvarianz aus, so daß die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten nicht mehr vom Gitterplatz j abhängen, d.h. $P_{\tau_j} \rightarrow P_{\tau}$. Diese Annahme ist für den stationären Zustand erfüllt. Im folgenden wollen wir speziell den Fall $v_{\max} = 1$ untersuchen. Die Mean-Field-Gleichungen haben dann folgende Struktur:

$$P_{\tau_j}(t+1) = \sum_{\vec{\tau}_j^{(3)}} W\left(\vec{\tau}_j^{(3)} \rightarrow \tau_j\right) P_{\vec{\tau}_j}^{(3)}(t) \quad (\text{III.1.12})$$

$$\approx \sum_{\vec{\tau}_j^{(3)}} W\left(\vec{\tau}_j^{(3)} \rightarrow \tau_j\right) P_{\tau_{j-1}}(t) P_{\tau_j}(t) P_{\tau_{j+1}}(t). \quad (\text{III.1.13})$$

Um die Übergangswahrscheinlichkeiten $W\left(\vec{\tau}_j^{(3)} \rightarrow \tau_j\right)$ zu bestimmen ist es zweckmässig, eine Tabelle mit allen 27 Ausgangskonfigurationen $\vec{\tau}_j^{(3)}(t) = (\tau_{j-1}(t), \tau_j(t), \tau_{j+1}(t))$ anzulegen und für jede Konfiguration die möglichen Übergänge zu bestimmen. Dies ist in Tabelle III.1.6 gezeigt.

$\tau_j^{(3)}(t)$	$\tau_j(t+1)$	$W(\tau_j^{(3)} \rightarrow \tau_j)$	$\tau_j^{(3)}(t)$	$\tau_j(t+1)$	$W(\tau_j^{(3)} \rightarrow \tau_j)$	$\tau_j^{(3)}(t)$	$\tau_j(t+1)$	$W(\tau_j^{(3)} \rightarrow \tau_j)$
$\times \times \times$	\times	1	$0 \times \times$	\times	p	$1 \times \times$	\times	p
			$0 \times \times$	1	$1-p$	$1 \times \times$	1	$1-p$
$\times \times v$	\times	1	$0 \times v$	\times	p	$1 \times v$	\times	p
			$0 \times v$	1	$1-p$	$1 \times v$	1	$1-p$
$\times v \times$	0	p	$0 v \times$	0	p	$1 v \times$	0	p
$\times v \times$	\times	$1-p$	$0 v \times$	\times	$1-p$	$1 v \times$	\times	$1-p$
$\times 0 v$	0	1	$0 0 v$	0	1	$1 0 v$	0	1
$\times 1 v$	0	1	$0 1 v$	0	1	$1 1 v$	0	1

Abbildung III.1.6: Übergangswahrscheinlichkeiten $W\left(\vec{\tau}_j^{(3)} \rightarrow \tau_j\right)$ für alle möglichen Ausgangskonfigurationen $\vec{\tau}_j^{(3)}(t)$ und die möglichen neuen Konfigurationen der mittleren Zelle j zur Zeit $t+1$. 0 bzw. 1 bezeichnen eine Zelle, die durch ein Auto mit der Geschwindigkeit $v=0$ bzw. $v=1$ besetzt ist und \times eine leere Zelle. v steht für eine Zelle, die entweder durch ein Auto mit der Geschwindigkeit 0 oder 1 besetzt ist.

Wir wollen das Zustandekommen dieser Tabelle an einem Beispiel etwas genauer betrachten. Dazu betrachten wir die Konfiguration $\times 0 \times$, d.h. in der Zelle, deren Entwicklung wir betrachten

wollen, steht ein Auto, während die beiden Nachbarzellen leer sind. Auf Grund der Regel R1 wird das Auto zunächst auf die Geschwindigkeit 1 beschleunigen. Da die Zelle davor frei ist, muß es in R2 nicht abbremsen. Nun müssen wir zwei Fällen unterscheiden. Trödelt das Auto in R3, was mit der Wahrscheinlichkeit p passiert, so hat es die neue Geschwindigkeit 0 und bleibt in der Zelle j stehen. Dann ist also $\tau_j(t+1)$. Trödelt es nicht (mit Wahrscheinlichkeit $1-p$), so fährt es zu Zelle $j+1$ und der neue Zustand von Zelle j ist $\tau_j(t+1) = \times$. Dies liefert die dritte und vierte Zeile der linken Spalte von Tab. III.1.6. Man sieht im übrigen, daß sich an dem Argument nichts ändert, wenn der Platz $j-1$ zur Zeit t besetzt ist. Diese Auto muß in R2 abbremsen und kann somit nicht nach j fahren, selbst wenn sich das vordere Fahrzeug wegbewegt.

Als zweites Beispiel betrachten wir den Ausgangszustand $0 \times \times$. Hier ist $\tau_j(t) = \times$. Das Fahrzeug in Zelle $j-1$ wird mit der Wahrscheinlichkeit p zur Zeit $t+1$ die Geschwindigkeit 0 haben, und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ die Geschwindigkeit 1. Somit ist $\tau_j(t+1) = \times$ mit Wahrscheinlichkeit p und $\tau_j(t+1) = 1$ mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ (siehe 1. und 2. Zeile der mittleren Spalte). Mit analogen Überlegungen kann man die gesamte Tabelle ermitteln.

Um die Bewegungsgleichung zu erhalten, sammeln wir alle Ausgangszustände mit ihren Übergangswahrscheinlichkeiten, die zum gleichen neue Zustand $P_\tau(t+1)$ führen. Für $\tau = 1$ erhält man so

$$P_1(t+1) = (1-p) \left[P_{0 \times \times}(t) + P_{1 \times \times}(t) + \sum_{v=0}^1 P_{0 \times v}(t) + \sum_{v=0}^1 P_{1 \times v}(t) \right]. \quad (\text{III.1.14})$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit Hilfe der sog. Kolmogorov-Konsistenz-Bedingungen

$$\sum_{\tau} P_{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau}(t) = P_{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}}(t) = \sum_{\tau} P_{\tau, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}}(t) \quad (\text{III.1.15})$$

vereinfachen, die für beliebige Cluster der Größe n gelten. In (III.1.15) ist jeweils über alle erlaubten Zustände τ am linken bzw. rechten Rand des Clusters der Größe n . Auf Grund der Normierung muß man dann die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des entsprechenden Clusters der Größe $n-1$ erhalten.

Nutzt man die Kolmogorov-Bedingungen aus, um die Ergebnisse zu vereinfachen, so ergeben sich folgende Gleichungen für die dynamische Entwicklung eines Einzelplatzzustandes:

$$\begin{aligned} P_1(t+1) &= (1-p) \sum_{v=0}^1 P_{v \times}(t), & (\text{III.1.16}) \\ P_0(t+1) &= \sum_{v, \bar{v}=0}^1 P_{v \bar{v}}(t) + p \sum_{v=0}^1 P_{v \times}(t), & (\text{III.1.17}) \\ P_{\times}(t+1) &= P_{\times}(t). & (\text{III.1.18}) \end{aligned}$$

Die Gleichung für P_{\times} war eigentlich zu erwarten, denn sie drückt lediglich die Konstanz der Zahl der leeren Zellen aus, die ja aus der Teilchenzahlerhaltung folgt. Es ist außerdem bemerkenswert, daß die obigen Gleichung *exakt* sind, falls der Zustand translationsinvariant ist. Etwas

überraschend ist, daß nur 2-Cluster-Wahrscheinlichkeiten auftreten, keine 3-Cluster wie man auf Grund von Gleichung (III.1.12) erwartet hätte.

Wir wollen nun den stationären Zustand betrachten und die Mean-Field-Näherung

$$P_{\tau\bar{\tau}} \approx P_{\tau}P_{\bar{\tau}} \quad (\text{III.1.19})$$

verwenden. Korrelationen zwischen den Zellen werden also vollständig vernachlässigt.

Für $\tau = 1$ ergibt sich dann (in Mean-Field-Näherung)

$$P_1 = (1 - p) \sum_{v=0}^1 P_v P_{\times} = (1 - p)(P_0 + P_1)P_{\times} = (1 - p)\rho(1 - \rho) \quad (\text{III.1.20})$$

wobei wir

$$P_0 + P_1 = \rho \quad \text{und} \quad P_{\times} = 1 - \rho \quad (\text{III.1.21})$$

benutzt haben. Für $\tau = 0$ folgt

$$\begin{aligned} P_0 &= \sum_{v,\bar{v}=0}^1 P_v P_{\bar{v}} + p \sum_{v=0}^1 P_v P_{\times} = (P_0 + P_1)^2 + pP_{\times}(P_0 + P_1) \\ &= \rho^2 + p\rho(1 - \rho) = \rho[\rho + p(1 - \rho)]. \end{aligned} \quad (\text{III.1.22})$$

Es ist nützlich, die Konsistenz dieser Gleichungen zu überprüfen. Die Summe von P_0 und P_1 muß ja wegen (III.1.21) gerade die Dichte ρ ergeben. Man kann leicht nachprüfen, daß dies für die Ausdrücke (III.1.20) und (III.1.22) tatsächlich erfüllt ist.

Um das Fundamentaldiagramm zu bestimmen, überlegt man sich zunächst, daß der Strom durch die Zahl der fahrenden Autos bestimmt wird, d.h. $J_{MF} = P_1$ und somit

$$\boxed{J_{MF} = (1 - p)\rho(1 - \rho).} \quad (\text{III.1.23})$$

Diese Ergebnis kann man auch einfacher durch folgende Überlegung erhalten. Einen Beitrag zum Strom erhält man genau dann, wenn ein Auto sich von einem besetzten auf einen benachbarten freien Platz vorwärtsbewegt. Bei einer rein zufälligen Verteilung der Autos findet man einen besetzten Platz mit der Wahrscheinlichkeit ρ . Der Platz davor ist dann mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \rho$ leer. Schließlich fährt das Auto in dieser Situation mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$, da es mit der Wahrscheinlichkeit p trödelt. Dies liefert gerade (III.1.23).

Die dynamischen Regeln des NaSch-Modells erlauben im Prinzip eine Vereinfachung der Mean-Field-Rechnungen. Man kann die Bilanz, d.h. die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten $P_{\tau}(t)$ etc., *nach* dem Beschleunigungsschritt R1 machen. Dann gibt es keine Autos mit der Geschwindigkeit 0 mehr, aber man kann auch nicht mehr zwischen Fahrzeugen mit $v(t) = v_{\max}$ und $v(t) = v_{\max} - 1$ unterscheiden, was bei der Berechnung z.B. des Stromes berücksichtigt werden muß. Dies entspricht einer zyklischen Vertauschung der Regeln, die jetzt quasi in der Reihenfolge R2-R3-R4-R1 angewendet werden. Diese geänderte Reihenfolge reduziert die Zahl der möglichen Zustände einer Zelle formal um Eins. Wir müssen daher nur noch 8 statt 27 mögliche Ausgangscluster $\vec{\tau}_j^{(3)}(t)$ untersuchen. Für $v_{\max} = 1$ entspricht dies dem Übergang von den

Zuständen τ_j einer Zelle zu deren Besetzungszahl $n_j = 0, 1$. In diesem Fall kann man die Mean-Field-Approximation einfach interpretieren. Es gilt⁷

$$P(n_1, \dots, n_L) = \prod_{j=1}^L P(n_j) = [P(0)]^{L-N} \cdot [P(1)]^N, \quad (\text{III.1.24})$$

da die Zahl der besetzten Plätze konstant ist. Gleichung (III.1.24) besagt, daß bei vorgegebener Teilchenzahl in Mean-Field-Näherung alle erlaubten Zustände mit der gleichen Wahrscheinlichkeiten auftreten! Man beachte, daß $P(0) \neq P_0$ etc.

III.1.3 Cluster-Approximation

Wir hatten schon gesehen, daß die Mean-Field-Näherung den Fluß im NaSch-Modell zum Teil deutlich unterschätzt. Die Annahme, daß es keine Korrelationen gibt, ist deshalb nicht gerechtfertigt. Man muß also versuchen, in einer analytischen Beschreibung, diese Korrelationen mit zu berücksichtigen. Ein systematisches Verfahren, daß dies kann, ist die sog. *Cluster-Approximation*. Hierbei handelt es sich um eine direkte Verallgemeinerung der Idee der Mean-Field-Näherung. Statt die zeitliche Entwicklung eines einzelnen Platzes zu betrachten, versucht man in der n -Cluster-Approximation die Entwicklung von n benachbarten Zellen⁸ möglichst genau zu beschreiben. Man geht dabei genau so vor wie bei der im vorigen Abschnitt beschriebenen Mean-Field-Rechnung, die dem Fall der 1-Cluster-Approximation entspricht.

Wir wollen uns dazu auf den Fall $v_{\max} = 1$ und $n = 2$ konzentrieren, damit die Notation nicht zu kompliziert wird. Die exakte Entwicklungsgleichung (III.1.12) ist für einen 2-Cluster (τ_j, τ_{j+1}) zu ersetzen durch

$$P_{\tau_j}(t+1) = \sum_{\vec{\tau}_j^{(4)}} W(\vec{\tau}_j^{(4)} \rightarrow \tau_j) P_{\vec{\tau}_j^{(4)}}^{(4)}(t), \quad (\text{III.1.25})$$

wobei $\vec{\tau}_j^{(4)} = (\tau_{j-1}(t), \tau_j(t), \tau_{j+1}(t), \tau_{j+2}(t))$ ist.

Das weitere Vorgehen ist analog zu dem in Kap. III.1.2, d.h. zunächst werden wieder die Übergangswahrscheinlichkeiten $W(\vec{\tau}_j^{(4)} \rightarrow \tau_j)$ bestimmt. Ein entscheidender Unterschied betrifft aber die Faktorisierung von $P_{\vec{\tau}_j}^{(4)}$, das wir ja durch 2-Cluster-Wahrscheinlichkeiten $P_{\tau\bar{\tau}}$ ausdrücken müssen, um ein geschlossenes Gleichungssystem zu erhalten. Um die Korrelationen zu berücksichtigen faktorisiert man gemäß

$$P_{\vec{\tau}_j}^{(4)} \approx P(\tau_{j-1}|\underline{\tau}_j) \cdot P(\tau_j, \tau_{j+1}) \cdot P(\underline{\tau}_{j+1}|\tau_{j+2}) \quad (\text{III.1.26})$$

mit den konditionalen Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(\tau_1|\underline{\tau}_2) &= \frac{P(\tau_1, \tau_2)}{\sum_{\tau} P(\tau, \tau_2)} = \frac{P(\tau_1, \tau_2)}{P(\tau_2)}, \\ P(\underline{\tau}_1|\tau_2) &= \frac{P(\tau_1, \tau_2)}{\sum_{\tau} P(\tau_1, \tau)} = \frac{P(\tau_1, \tau_2)}{P(\tau_1)}, \end{aligned} \quad (\text{III.1.27})$$

⁷Wir schreiben jetzt, da wir Besetzungszahlen n_j benutzen, $P(n_j)$ statt P_{τ_j} , um sie von den bisher benutzten Wahrscheinlichkeiten für die Zustände τ_j zu unterscheiden.

⁸Dies bezeichnet man dann als einen n -Cluster.

wobei wir die Kolmogorov-Bedingungen (III.1.15) ausgenutzt haben. Dies entspricht einem Überlappen benachbarter 2-Cluster, wie in Abb. III.1.7 illustriert. Diese Überlappen macht die Verwendung der konditionalen Wahrscheinlichkeiten notwendig. Allgemein Überlappen die Cluster in der n -Cluster-Approximation $n - 1$ Zellen, wobei allerdings auch Cluster-Approximationen mit einer geringeren Überlappung denkbar sind.

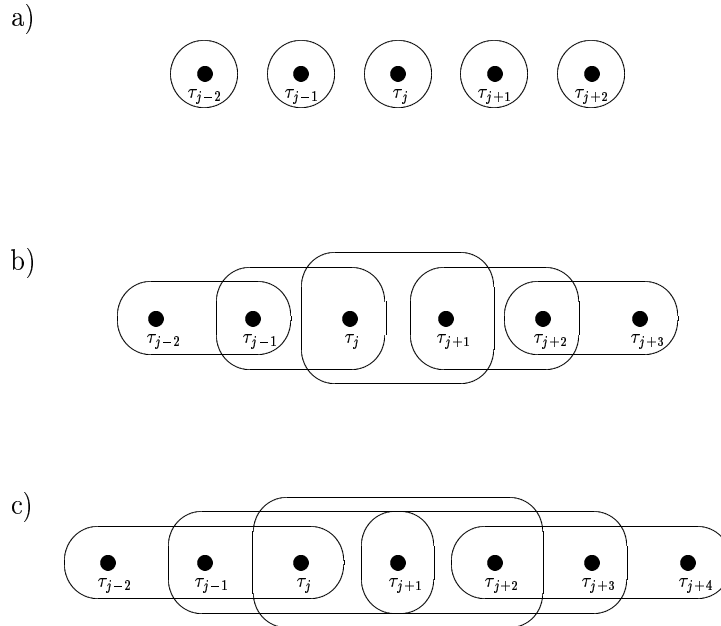


Abbildung III.1.7: Grafische Darstellung der n -Cluster-Approximation für a) $n = 1$, d.h. Mean-Field, b) $n = 2$ und c) $n = 3$. Man beachte, daß benachbarte Cluster $n - 1$ Zellen überlappen.

Am einfachsten ist es, die 2-Cluster-Approximation mit der geänderten Regelreihenfolge R2-R3-R4-R1 durchzuführen. In diesem Fall haben wir es nur mit vier verschiedenen Wahrscheinlichkeiten $P(n_j, n_{j+1})$ zu tun. Auf Grund der Kolmogorov-Konsistenz-Bedingungen (III.1.15) genügt es sogar, eine dieser Wahrscheinlichkeiten zu kennen (z.B. $P(0, 1)$), denn es gilt

$$P(1, 0) = P(0, 1), \quad \text{(III.1.28)}$$

$$P(0, 0) = 1 - \rho - P(0, 1), \quad \text{(III.1.29)}$$

$$P(1, 1) = \rho - P(0, 1). \quad \text{(III.1.30)}$$

Die erste Bedingung folgt z.B. aus $\sum_{\tau=0}^1 P(\tau, 0) = \sum_{\tau=0}^1 P(0, \tau)$ und die zweite dann aus $\sum_{\tau=0}^1 P(0, \tau) = P(0) = 1 - \rho$. Man kann zeigen, daß die verbleibende unabhängige Wahrscheinlichkeit $P(0, 1)$ durch

$$(1 - \rho) [P(0, 1)]^2 - P(0, 1) + \rho(1 - \rho) = 0 \quad \text{(III.1.31)}$$

bestimmt ist, woraus folgt

$$P(1, 0) = P(0, 1) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4(1-p)\rho(1-\rho)}}{2(1-p)}. \quad (\text{III.1.32})$$

Von den vier Clustern liefert nur $P(1, 0)$ einen Beitrag zum Fluß, da sich nur hier ein Auto von links nach rechts bewegen kann. Dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$, weshalb der Fluß durch $J = (1 - p)P(1, 0)$ gegeben ist. Man erhält also

$$J = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - 4(1-p)\rho(1-\rho)} \right]. \quad (\text{III.1.33})$$

Wie schon früher erwähnt, ist dieses Ergebnis exakt (Schadschneider, Schreckenberg 1993)! Das äußert sich z.B. darin, daß höhere Cluster-Approximationen mit $n > 2$ das gleiche Ergebnis liefern. Der eigentliche Beweis für die Exaktheit des 2-Cluster-Zustandes wird dann aber kombinatorisch geführt (Schreckenberg, Schadschneider, Nagel, Ito 1995).

Mit Hilfe der 2-Cluster-Approximation läßt sich nun die Teilchen-Loch-Anziehung quantifizieren, denn es gilt

$$P(0)P(1) = (1 - \rho)\rho \leq P(0, 1) \quad (\text{III.1.34})$$

wobei man sich von der Ungleichung durch explizites Nachrechnen leicht überzeugen kann.

Eine interessante Beobachtung, die uns in Kap. III.1.5 noch genauer beschäftigen wird, ist die Tatsache, daß bei Benutzung von zufällig-sequentieller Dynamik tatsächlich schon die normale Mean-Field-Theorie (also 1-Cluster) exakt ist. Bei zufällig-sequentieller Dynamik gibt es also keine Korrelationen, während bei paralleler Dynamik eine Teilchen-Loch-Anziehung zu beobachten ist!

Für Geschwindigkeiten $v_{\max} > 1$ ist die n -Cluster-Näherung nur im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ exakt. Selbst für $n = 2$ und $v_{\max} = 2$ gibt es keine geschlossene analytische Lösung. Die Clustergleichung müssen hier numerisch gelöst werden. Für $v_{\max} = 2$ findet man aber, daß schon die 4-Cluster-Approximation sehr gut mit den Ergebnissen von Computersimulationen übereinstimmt (siehe Abb. III.1.8).

III.1.4 Car-Oriented-Mean-Field (COMF)

Wie wir gesehen haben, ist die Berücksichtigung von Korrelationen wichtig, um eine gute Übereinstimmung für das Fundamentaldiagramm zu bekommen. In diesem Abschnitt wollen wir eine Methode vorstellen, bei der Korrelationen durch eine geeignete Wahl der dynamischen Variablen, für die man dann eine Mean-Field-Entkopplung vornimmt, berücksichtigt werden. Dieses Verfahren ist inspiriert durch das Vorgehen bei Computersimulationen. Ihm liegt die Beobachtung zu Grunde, daß man den Zustand eines Systems nicht nur durch die Zellenvariablen (τ_1, \dots, τ_L) charakterisieren kann, sondern äquivalent durch die Menge (d_1, \dots, d_N) aller Lücken d_j vor Fahrzeug j und die zugehörigen Geschwindigkeiten (v_1, \dots, v_N) . Für einen Zustand, der nicht translationsinvariant ist, muß zusätzlich noch die Position eines Fahrzeugs bekannt sein (z.B.

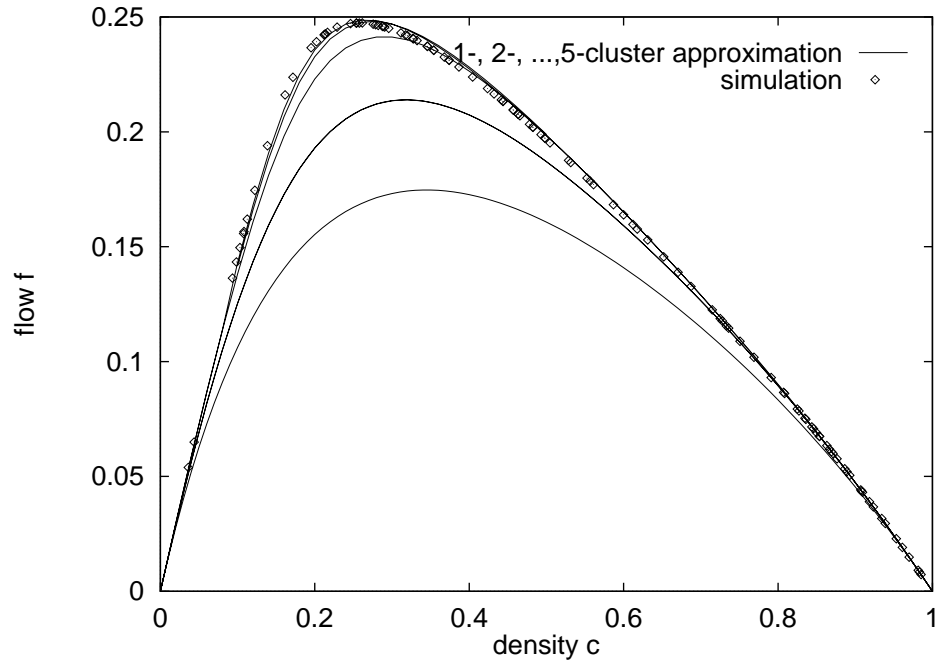


Abbildung III.1.8: Vergleich der n -Cluster-Approximation für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ (von unten nach oben) mit Computersimulationen für das NaSch-Modell mit $v_{\max} = 2$.

x_1), um die τ_j aus den Lücken und Geschwindigkeiten zu bestimmen⁹. Dies wird bei Simulationen von Systemen mit niedrigen Dichte ausgenutzt, da es den Speicherbedarf reduziert. Die Beschreibung über die Zellenzustände benötigt L Variablen τ_j , während die Charakterisierung über die Lücken $2N$ Variablen d_j und v_j benötigt. Für kleine Dichten $\rho = N/L$ ist letztere Methode günstiger.

Diese Idee läßt sich nun auf analytische Rechnungen übertragen. Wir nehmen einen translationsinvarianten Zustand an und charakterisieren unser System durch die Lücken $d^{(v)}$ vor einem Fahrzeug mit der Geschwindigkeit v . Für die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(d_1^{(v_1)}, \dots, d_N^{(v_N)})$ machen wir dann eine Mean-Field-Faktorisierung

$$P(d_1^{(v_1)}, \dots, d_N^{(v_N)}) = P(d_1^{(v_1)}) \cdots P(d_N^{(v_N)}) \quad (\text{III.1.35})$$

Diese Näherungsmethode bezeichnet man auch als *Car-Oriented Mean-Field (COMF)* (Schadschneider, Schreckenberg 1997), da sie sich auf die Fahrzeuge bezieht und nicht auf die Zellen. Wir wollen zunächst wieder den Fall $v_{\max} = 1$ betrachten und dabei die rotierte Regelreihenfolge R2-R3-R4-R1 benutzen. Dann müssen wir nicht mehr verschiedene Geschwindigkeiten unterscheiden. Es ist sinnvoll, die Größe

$$D_n := \text{Wahrscheinlichkeit den Abstand } n \text{ zu finden,} \quad (\text{III.1.36})$$

⁹Von den Lücken sind wegen $\sum_{j=1}^N d_j = L - N$ nur $N - 1$ unabhängig.

also $D_n = P(d = n)$, einzuführen. Wir gehen dabei von einem translationsinvarianten Zustand aus.

Die Wahrscheinlichkeiten D_n erfüllen zwei Normierungsbedingungen

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \quad (\text{III.1.37})$$

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) D_n. \quad (\text{III.1.38})$$

Die erste Bedingung folgt aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und die zweite drückt die Konstanz der Teilchenzahl bzw. der Zahl $L - N$ der Löcher aus. Sie folgt aus der Tatsache, daß die Summe aller Lücken gerade gleich $L - N$ ist.

Außerdem definieren wir

$$g = (1-p) \sum_{n \geq 1} D_n = \bar{p} [1 - D_0], \quad (\text{III.1.39})$$

$$\bar{g} = 1 - g. \quad (\text{III.1.40})$$

Dabei haben wir schon die Normierung (III.1.37) ausgenutzt und $\bar{p} := 1 - p$ definiert. g ist gerade die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Auto im nächsten Zeitschritt bewegt, denn dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $\bar{p} = 1 - p$ falls der Platz vor dem Auto leer ist. \bar{g} ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß das Fahrzeug nicht fährt.

Im stationären Zustand genügen die D_n folgendem Gleichungssystem:

$$D_0 = \bar{g} [D_0 + \bar{p} D_1], \quad (\text{III.1.41})$$

$$D_1 = g D_0 + [\bar{p} g + p \bar{g}] D_1 + \bar{p} \bar{g} D_2, \quad (\text{III.1.42})$$

$$D_n = p g D_{n-1} + [\bar{p} g + p \bar{g}] D_n + \bar{p} \bar{g} D_{n+1}, \quad (n \geq 2). \quad (\text{III.1.43})$$

Das Zustandekommen dieser Gleichungen kann man leicht verstehen, was wir am Fall $n \geq 2$

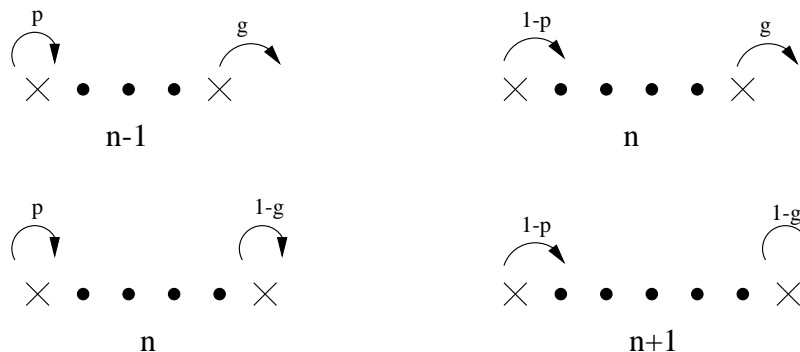


Abbildung III.1.9: Prozesse, aus denen ein Abstand $n > 1$ entstehen kann (hier: $n = 4$). × bezeichnet einen besetzten Platz, • einen leeren.

(Gl. III.1.43) demonstrieren wollen (siehe Abb. III.1.9). Es gibt vier Konfigurationen, aus denen ein Abstand n entstehen kann. Haben die Fahrzeuge den Abstand $n - 1$, so entsteht ein Abstand n im nächsten Zeitschritt, falls das vordere Auto fährt (dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit g)¹⁰ und das hintere Auto trödelt (Wahrscheinlichkeit p). Insgesamt tritt dieser Fall also mit der Wahrscheinlichkeit pgD_{n-1} ein, was gerade den ersten Term in Gleichung III.1.43 liefert. Ein Abstand n zur Zeit t bleibt unverändert, falls entweder beide Autos fahren oder beide Autos stehenbleiben. Ersteres passiert mit der Wahrscheinlichkeit $\bar{p}gD_n$, letzteres mit $p\bar{g}D_n$. Der vierte Fall schließlich betrifft die Situation, bei der die Autos den Abstand $n+1$ hatten. Hier darf nur das hintere Auto fahren, damit der Abstand n entsteht. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist also $\bar{p}\bar{g}D_{n+1}$. Diese vier Prozesse sind in Abb. III.1.9 noch einmal veranschaulicht. Die anderen Gleichungen lassen sich im Prinzip analog ableiten. Es ist lediglich zu beachten, daß die Abstände 0 und 1 gesondert zu behandeln sind.

Obwohl das Gleichungssystem (III.1.41)–(III.1.43) auf den ersten Blick recht kompliziert aussieht, da es unendlich viele Unbekannte enthält, kann man es doch mit Hilfe der *Erzeugendenfunktion*

$$D(z) := \sum_{n=0}^{\infty} D_n z^{n+1} \quad (\text{III.1.44})$$

einfach lösen. Dazu multiplizieren wir die Gleichung für D_n mit z^{n+1} und summieren dann über alle n . Dies liefert

$$\begin{aligned} D(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n z^{n+1} \\ &= \bar{g} [D_0 + \bar{p}D_1] z + \{gD_0 + [\bar{p}g + p\bar{g}]D_1 + \bar{p}\bar{g}D_2\} z^2 \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \{pgD_{n-1} + [\bar{p}g + p\bar{g}]D_n + \bar{p}\bar{g}D_{n+1}\} z^{n+1} \\ &= (\bar{g} + gz)D_0 z + \left(\frac{\bar{p}\bar{g}}{z} + [\bar{p}g + p\bar{g}]\right) D_1 z^2 + \frac{\bar{p}\bar{g}}{z} D_2 z^3 + pgz \sum_{n=1}^{\infty} D_n z^{n+1} \\ &\quad + [\bar{p}g + p\bar{g}] \sum_{n=2}^{\infty} D_n z^{n+1} + \frac{\bar{p}\bar{g}}{z} \sum_{n=3}^{\infty} D_n z^{n+1} \\ &= \left(\bar{g} + gz - pgz - (\bar{p}g + p\bar{g}) - \frac{\bar{p}\bar{g}}{z}\right) D_0 z + \left(\frac{\bar{p}\bar{g}}{z} + [\bar{p}g + p\bar{g}] - [\bar{p}g + p\bar{g}] - \frac{\bar{p}\bar{g}}{z}\right) D_1 z^2 \\ &\quad + \left(\frac{\bar{p}\bar{g}}{z} - \frac{\bar{p}\bar{g}}{z}\right) D_2 z^3 + \left(pgz + [\bar{p}g + p\bar{g}] + \frac{\bar{p}\bar{g}}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} D_n z^{n+1} \\ &= \left(\bar{g} + \bar{p}gz - \bar{p}g - p\bar{g} - \frac{\bar{p}\bar{g}}{z}\right) D_0 z + \left(pgz + \bar{p}g + p\bar{g} + \frac{\bar{p}\bar{g}}{z}\right) D(z) \\ &= \frac{\bar{p}}{z} (gz + \bar{g})(z - 1) D_0 z + \left[\frac{1}{z} (pgz - \bar{p}\bar{g})(z - 1) + 1\right] D(z) \end{aligned} \quad (\text{III.1.45})$$

¹⁰Man beachte, daß wir hier die mittlere Wahrscheinlichkeit g wählen müssen, da wir nicht wissen, wie die Situation vor dem vorderen Fahrzeug aussieht. Dies ist anders beim hinteren Auto, weshalb wir die exakte Wahrscheinlichkeit dafür kennen, daß dieses Auto nicht fährt, nämlich p .

Dabei haben wir jeweils zusammengehörende Terme gesammelt und die fehlenden ersten Glieder der Reihen ergänzt, um diese durch $D(z)$ ausdrücken zu können. Außerdem haben wir bei den letzten Umformungen mehrfach die Beziehungen $\bar{g} = 1 - g$ und $\bar{p} = 1 - p$ ausgenutzt, z.B. bei der Abspaltung des Faktors $z - 1$ in der letzten Zeile.

Explizit ergibt sich damit für die erzeugende Funktion

$$D(z) = \frac{\bar{p}(gz + \bar{g})D_0z}{\bar{p}\bar{g} - pgz}, \quad (\text{III.1.46})$$

die also nur von D_0 abhängt, da sich nach (III.1.39) auch g und \bar{g} vollständig durch D_0 ausdrücken lassen.

Auf Grund der Normierungsbedingungen (III.1.37) und (III.1.38) muß $D(z)$ die Bedingungen

$$D(z) = 1, \quad (\text{III.1.47})$$

$$D'(z=1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)D_n = \frac{1}{\rho} \quad (\text{III.1.48})$$

erfüllen, wobei D' die Ableitung von D bezeichnet. Die erste Bedingung ist wegen

$$D(1) = \frac{\bar{p}(g + \bar{g})D_0}{\bar{p}\bar{g} - pg} = \frac{\bar{p}D_0}{\bar{p} - g} = \frac{\bar{p}D_0}{\bar{p} - \bar{p}(1 - D_0)} = 1 \quad (\text{III.1.49})$$

automatisch erfüllt ist. Die Beziehung (III.1.48) liefert uns einen Zusammenhang zwischen D_0 und ρ , der uns erlaubt, die erzeugende Funktion vollständig als Funktion der Dichte auszudrücken. Aus den höheren Ableitung $D^{(n)}(z=0)$ können wir dann die D_n bestimmen. Insgesamt erhalten wir

$$D_0 = \frac{1}{2\bar{p}\rho} \left[2\bar{p}\rho - 1 + \sqrt{1 - 4\bar{p}\rho(1 - \rho)} \right], \quad (\text{III.1.50})$$

$$D_n = \frac{D_0}{p} \left(\frac{pg}{\bar{p}\bar{g}} \right)^n = \frac{D_0}{p} \left(\frac{p(1 - D_0)}{D_0 + p(1 - D_0)} \right)^n \quad (n \geq 1). \quad (\text{III.1.51})$$

Zur Bestimmung des Fundamentaldiagramms benötigen wir den Fluß, der sich durch

$$J(\rho) = \rho g = \bar{p}\rho(1 - D_0) = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - 4(1 - p)\rho(1 - \rho)} \right] \quad (\text{III.1.52})$$

berechnen läßt, d.h. COMF reproduziert das exakte Ergebnis (III.1.33). Dies bedeutet, daß im stationären Zustand des NaSch-Modells mit $v_{\max} = 1$ die Lücken zwischen den Fahrzeugen statistisch unabhängig voneinander sind.

Man kann auch den Zusammenhang der Lücken-Wahrscheinlichkeiten D_n mit den Clusterwahrscheinlichkeiten $P(n_1, n_2)$ angeben:

$$P(1, 1) = \rho D_0, \quad (\text{III.1.53})$$

$$P^2(1, 0) = \rho(1 - \rho)D_1, \quad (\text{III.1.54})$$

$$P(0, 0) = (1 - \rho) \frac{D_{n+1}}{D_n}, \quad (\text{III.1.55})$$

wobei im letzten Fall $n \geq 1$ ist.

Im Fall $v_{\max} = 2$ kann man analog vorgehen. Man muß aber zwischen Lücken vor Autos mit $v = 1$ und $v = 2$ unterscheiden, d.h. man erhält zwei Sätze von Wahrscheinlichkeiten $D_n^{(1)}$ und $D_n^{(2)}$. Diese genügen dann zwei gekoppelten Gleichungssystemen, die man mit Hilfe von zwei erzeugenden Funktionen $D^{(1)}(z)$ und $D^{(2)}(z)$ unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} [D_n^{(1)} + D_n^{(2)}] = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) [D_n^{(1)} + D_n^{(2)}] = \frac{1}{\rho} \quad (\text{III.1.56})$$

lösen kann. Das Ergebnis ist aber nicht exakt! Für $p \rightarrow 0$ ergibt sich aber eine sehr gute Übereinstimmung mit Simulationen. Für mittlere Werte von p sind die Ergebnisse vergleichbar mit der Qualität der 3-Cluster-Approximation, obwohl COMF eher dazu neigt, den wahren Fluß zu überschätzen (siehe Abb. III.1.10).

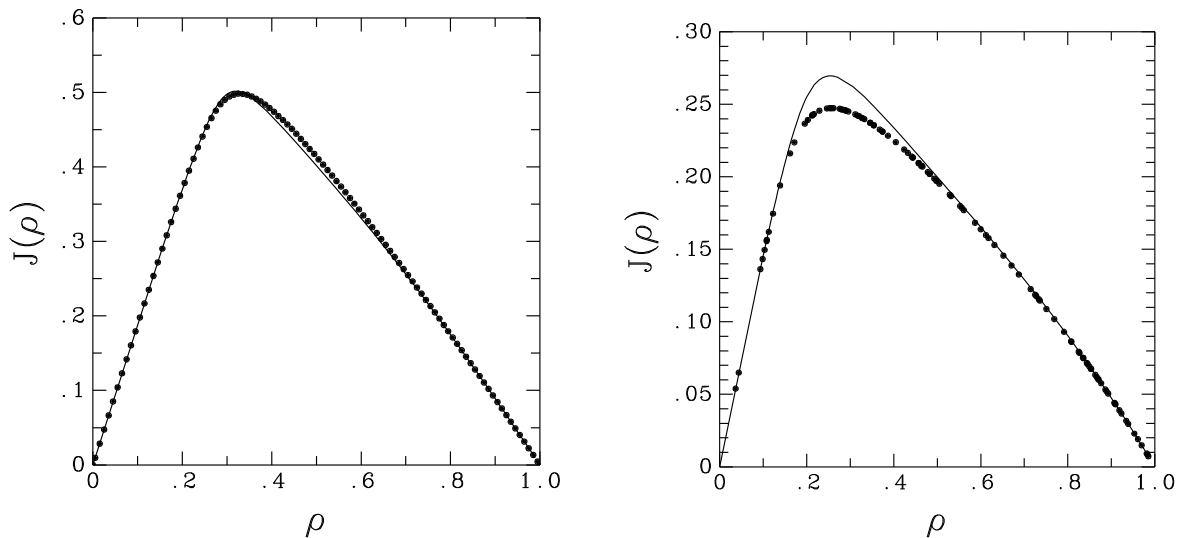


Abbildung III.1.10: Fundamentaldiagramme aus Computersimulationen (•) verglichen mit den Ergebnissen von COMF für $v_{\max} = 2$ und $p = 0.1$ (links) und $p = 0.5$ (rechts).

III.1.5 Paradiesisches Mean-Field

In Abschnitt III.1.3 haben wir gesehen, daß für das NaSch-Modell mit $v_{\max} = 1$ bei paralleler Dynamik die 2-Cluster-Approximation exakt ist. Wie schon erwähnt, ist für zufällig-sequentielle Dynamik schon die einfache Mean-Field-Theorie aus Kap. III.1.2 exakt. In diesem Fall gibt es daher keine Korrelationen, während für parallele Dynamik z.B. eine Teilchen-Loch-Anziehung existiert. Es stellt sich die Frage, woher dieser Unterschied kommt.

Die Beantwortung dieser Frage ist Nebenprodukt einer weiteren analytischen Theorie zur Beschreibung des stationären Zustandes im NaSch-Modell. Ausgangspunkt ist die Beobachtung,

daß bei paralleler Dynamik bestimmte Zustände nicht vorkommen können. Ein Beispiel zeigt Abb. III.1.11. Wir erinnern uns, daß die momentane Geschwindigkeit die Zahl der Zellen angibt, um die sich das Auto im letzten Zeitschritt weiterbewegt hat. Im Beispiel aus Abb. III.1.11 hätte sich das hintere Auto um eine Zelle fortbewegt, das vordere um zwei. Dies würde aber bedeuten, daß sich die Autos im vorigen Zeitschritt in der gleichen Zelle befunden haben! Dies ist aber nicht möglich. Daraus schliessen wir, daß eine (lokale) Konfiguration, wie die in Abb. III.1.11 gezeigte, nicht unter der Dynamik des NaSch-Modells entstehen kann. Solche Zustände sind in

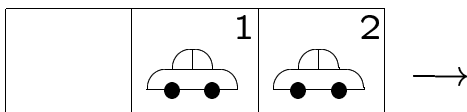


Abbildung III.1.11: Paradiesischer Zustand im NaSch model mit $v_{\max} \geq 2$.

der Theorie der Zellularautomaten schon lange bekannt. Man bezeichnet sie als *paradiesische Zustände* oder auch *Garten-Eden-Zustände*, da sie keinen Vorgänger haben. Diese Zustände sind also dynamisch verboten. Man beachte, daß die Verwendung paralleler Dynamik entscheidend ist. Bei zufällig-sequentieller Dynamik könnte der Zustand in Abb. III.1.11 z.B. dadurch zustande gekommen sein, daß das vordere Auto zur Zeit $t - 3$ zwei Zellen gefahren ist und das hintere danach (zur Zeit $t - 2$ und $t - 3$) zweimal um jeweils eine Zelle.

Schadschneider und Schreckenberg haben 1998 vorgeschlagen, die Existenz der paradiesischen Zuständen zu einer Verbesserung der Mean-Field-Theorie auszunutzen. Die grundlegende Idee ist, alle paradiesischen Zustände zu finden und sie aus dem Zustandsraum zu eliminieren. In dem so reduzierten Zustandsraum macht man dann eine Mean-Field-Rechnung. Auf diese Weise sind die Korrelationen, die durch die Existenz paradiesischer Zustände entstehen, schon berücksichtigt. Die entsprechende Mean-Field-Theorie heißt dann *paradiesisches Mean-Field (pMF)*.

Die Frage, ob ein Zustand (τ_1, \dots, τ_L) ein paradiesischer Zustand ist oder nicht, läßt sich lokal entscheiden. Für $v_{\max} = 1$ sind alle solche Zustände paradiesisch, die eine der Konfigurationen

$$(0, 1) \quad \text{oder} \quad (1, 1) \quad (\text{III.1.57})$$

enthalten¹¹. Die erste Konfiguration ist vom gleichen Typ wie die in Abb. III.1.11 gezeigte. Die zweite Konfiguration ist dagegen von einem etwas anderem Typ. Da beide Autos die Geschwindigkeit 1 haben, müssten sie nämlich auch im vorherigen Zeitschritt hintereinander gestanden haben. Dann hätte das hintere Auto aber auf Grund der Regel R2 die Geschwindigkeit 0 annehmen müssen und nicht fahren können.

Dies kann man allgemeiner formulieren. Grundsätzlich müssen nämlich die folgenden Ungleichungen erfüllt sein:

$$d_n(t) \geq v_{n+1}(t) - v_n(t), \quad (\text{III.1.58})$$

$$v_n(t) \leq d_n(t - 1). \quad (\text{III.1.59})$$

¹¹Im folgenden benutzen wir immer die Zellenvariablen τ_j , nicht die Besetzungszahlen n_j .

Die erste Ungleichung folgt aus der Tatsache, daß $d_n(t) = d_n(t-1) + v_{n+1}(t) - v_n(t)$ ist, während die zweite direkt aus der Regel R2 folgt. Die Konfiguration $(0, 1)$ verletzt die erste Ungleichung, $(1, 1)$ die zweite.

Für $v_{\max} = 2$ gibt es 10 lokale Konfigurationen, die zu paradiesischen Zuständen führen:

$$(0, 1), \quad (0, 2), \quad (1, 2), \quad (0, \bullet, 2), \quad \text{(III.1.60)}$$

$$(1, 1), \quad (2, 1), \quad (2, 2), \quad (1, \bullet, 2), \quad (2, \bullet, 2), \quad (0, \bullet, \bullet, 2), \quad \text{(III.1.61)}$$

wobei \bullet eine leere Zelle bezeichnet.

Im folgenden wollen wir wieder den Fall $v_{\max} = 1$ näher betrachten. In Abschnitt III.1.2 hatten wir die exakten Entwicklungsgleichungen für die 1-Cluster-Wahrscheinlichkeiten $P_\tau(t)$ hergeleitet¹²:

$$P_1(t+1) = (1-p) \sum_{v=0}^1 P_{v\times}(t), \quad \text{(III.1.62)}$$

$$P_0(t+1) = \sum_{v, \bar{v}=0}^1 P_{v\bar{v}}(t) + p \sum_{v=0}^1 P_{v\times}(t), \quad \text{(III.1.63)}$$

$$\text{(III.1.64)}$$

(siehe Gln. (III.1.16) und (III.1.17)). Wir sehen, daß in der Gleichung für P_0 paradiesische Zustände auftreten, die eine Modifikation erforderlich machen. Eliminiert man die zugehörigen Terme, so erhält man

$$P_1(t+1) = \mathcal{N}(1-p) \sum_{v=0}^1 P_{v\times}(t), \quad \text{(III.1.65)}$$

$$P_0(t+1) = \mathcal{N} \left[P_{00}(t) + P_{10}(t) + p \sum_{v=0}^1 P_{\times v}(t) \right]. \quad \text{(III.1.66)}$$

Dabei ist \mathcal{N} eine Normierung, die notwendig wird, weil die Teilchenzahlerhaltung $P_0(t) + P_1(t) = P_0(t+1) + P_1(t+1)$ auf Grund der Reduzierung des Zustandsraumes nicht mehr automatisch erfüllt ist.

Wir sind wieder am stationären Zustand interessiert. Nach Faktorisierung der 2-Cluster-Wahrscheinlichkeiten erhalten wir

$$\begin{aligned} P_0 &= \mathcal{N} [P_0^2 + P_0 P_1 + p(P_{\times} P_0 + P_{\times} P_1)] \\ &= \mathcal{N} [P_0(P_0 + P_1) + p P_{\times}(P_0 + P_1)] \\ &= \mathcal{N}(P_0 + p(1-\rho))\rho, \end{aligned} \quad \text{(III.1.67)}$$

$$P_1 = \mathcal{N}(1-p)\rho(1-\rho), \quad \text{(III.1.68)}$$

¹²In der Tat war ein Grund, warum wir dies in etwas umständlicher Form getan haben, daß wir die Rechnung nun sehr leicht modifizieren können!

wobei die zweite Gleichung analog folgt wie in (III.1.20).
Die Normierung folgt aus der Bedingung

$$\rho = P_0 + P_1 = \mathcal{N}\rho [P_0 + p(1 - \rho) + (1 - p)(1 - \rho)] = \mathcal{N}\rho [P_0 + 1 - \rho] \quad (\text{III.1.69})$$

woraus sich explizit

$$\mathcal{N} = \frac{1}{P_0 + 1 - \rho} = \frac{1}{1 - P_1} \quad (\text{III.1.70})$$

ergibt. Somit ist

$$P_1 = \frac{1}{1 - P_1} (1 - p)\rho(1 - \rho), \quad (\text{III.1.71})$$

woraus man durch Auflösen nach P_1

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - 4(1 - p)\rho(1 - \rho)} \right], \quad (\text{III.1.72})$$

$$P_0 = \rho - P_1 \quad (\text{III.1.73})$$

erhält. Da der Strom wieder durch $J(\rho) = P_1$ gegeben ist, erhält man daraus das exakte Fundamentaldiagramm (III.1.33).

Für parallele Dynamik ist also die paradiesische Mean-Field-Theorie exakt, während es für zufällig-sequentielle Dynamik schon die normale Mean-Field-Theorie aus Kap. III.1.2 ist. Die alleinige Ursache der Korrelationen im parallelen Fall ist daher die Existenz von paradiesischen Zuständen. Vermutlich gilt für beliebige stochastische Prozesse, daß der Unterschied zwischen paralleler und zufällig-sequentieller Dynamik auf die Existenz von dynamisch verbotenen Zuständen zurückzuführen ist.

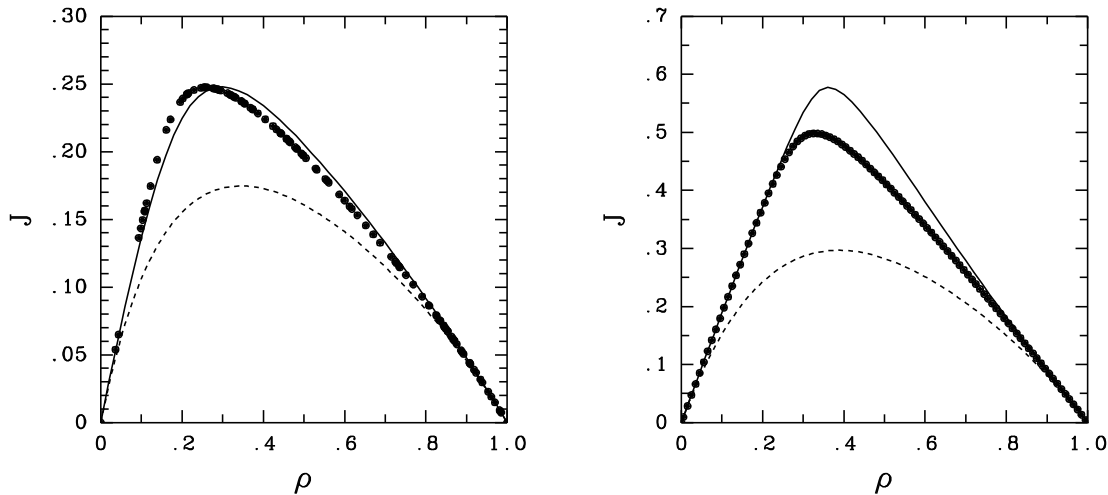


Abbildung III.1.12: Vergleich der paradiesischen Mean-Field-Theorie mit Computersimulationen (•) und der normalen Mean-Field-Theorie (gestrichelt) für $v_{\max} = 2$ und $p = 0.5$ (links) bzw. $p = 0.1$ (rechts).

Für $v_{\max} = 2$ ist wieder eine analoge Rechnung möglich. pMF ist dann nicht exakt und zeigt ein wenig systematisches Verhalten. Für $p = 0.5$ ist die Übereinstimmung mit den Simulationen sehr gut, für kleine p gibt es deutliche Abweichungen (siehe Abb. III.1.12). Für $v_{\max} > 1$ existieren also "echte Korrelationen", die sich nicht auf die Existenz paradiesischer Zustände zurückführen lassen. Dies ist nicht überraschend, denn für $v_{\max} > 1$ ist bei zufällig-sequentieller Dynamik Mean-Field nicht mehr exakt.

III.1.6 Phasenübergang

Eine besonders den Physiker interessierende Frage betrifft die Natur der Freifluß- und gestauten Zustände: Unterscheiden sich diese qualitativ oder nur quantitativ? Mit anderen Worten: Gibt es einen Phasenübergang von einer Freiflußphase¹³ zu einer gestauten Phase? Obwohl es noch keine allgemeine Theorie der Nichtgleichgewichtsphysik gibt, kann man sich gerade bei *Nichtgleichgewichtsphasenübergängen* zwischen verschiedenen stationären Zuständen oft an der Thermodynamik orientieren. Phasenübergänge sollten sich daher durch einen Ordnungsparameter charakterisieren lassen und durch Singularitäten bemerkbar machen.

Zunächst betrachten wir den deterministischen Fall $p = 0$. Hier ist die Situation relativ klar: Es gibt einen Phasenübergang 2. Ordnung bei der kritischen Dichte $\rho_c = \frac{1}{v_{\max}+1}$ (siehe Gl. (III.1.4)). Dieser Übergang läßt sich durch den *Ordnungsparameter*

$$m = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L n_j n_{j+1} \quad (\text{III.1.74})$$

charakterisieren, wobei $n_j = 0, 1$ die Besetzungszahl von Zelle j ist. m mißt gerade die mittlere Zahl besetzter Nachbarzellen und entspricht der Dichte der Fahrzeuge, die auf Grund des Vordermannes zum Stillstand gekommen sind.

Wir hatten schon in Kap. III.1.1 gesehen, daß für $\rho \leq \rho_c$ alle Fahrzeuge mindestens v_{\max} freie Zellen vor sich haben. Deshalb ist dort $m = 0$. Für Dichten $\rho > \rho_c$ steigt der Ordnungsparameter linear an und ist deshalb insbesondere von Null verschieden (siehe Abb. III.1.13). Der Ordnungsparameter ist stetig bei ρ_c , deshalb handelt es sich um einen kritischen Punkt.

Für $p > 0$ ist die Situation nicht ganz so klar. Es gibt aber starke Hinweise darauf, daß es keinen Phasenübergang (mit Singularitäten) gibt.

Abb. III.1.13 zeigt das Verhalten des Ordnungsparameters m aus Gleichung (III.1.74) in diesem Fall. Wie man sieht, verschwindet er für kleine Dichten nicht mehr, obwohl er sehr klein ist. Obwohl dies nicht beweist, daß es keinen Phasenübergang gibt¹⁴, ist es doch ein erster Hinweis. Ein weiteres Charakteristikum von kritischen Punkten ist die Divergenz der Korrelationslänge ξ , die das asymptotische Verhalten einer Korrelationsfunktion $G(r)$ beschreibt:

$$G(r) \sim e^{-r/\xi} \quad (\text{für } r \rightarrow \infty) \quad (\text{III.1.75})$$

¹³Die in diesem Zusammenhang oft auch als *laminarer Bereich* bezeichnet wird.

¹⁴Es könnte ja einen anderen Ordnungsparameter geben!

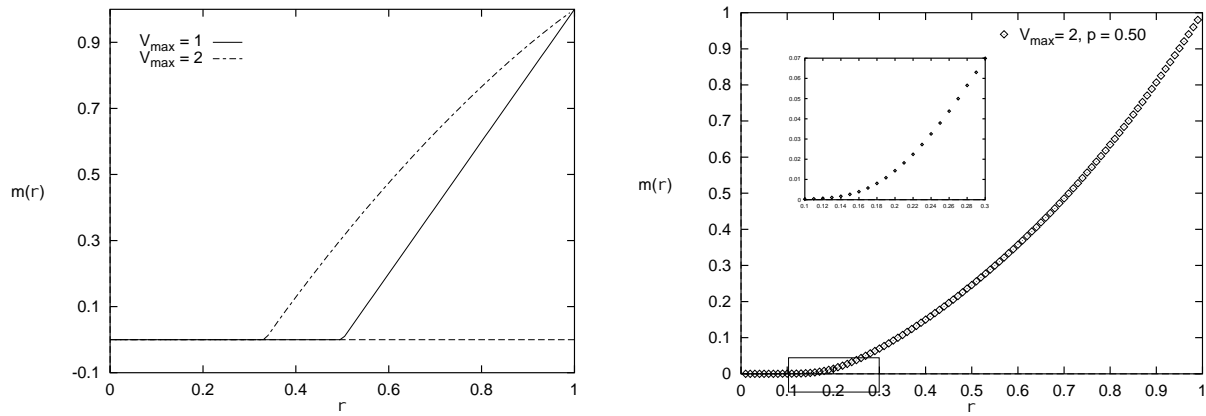


Abbildung III.1.13: Ordnungparameter m im deterministischen NaSch-Modell ($p = 0$) für $v_{\max} = 1, 2$ (links) und im stochastischen Fall $p = 0.5$ und $v_{\max} = 2$ (rechts).

wobei $r = |j - l|$ der Abstand der Zellen ist, an denen die Korrelationsfunktion bestimmt wird. An einem kritischen Punkt divergiert die Korrelationslänge $\xi \rightarrow \infty$ und die Korrelationsfunktion zerfällt algebraisch:

$$G(r) \sim r^{-\nu} \quad (\text{III.1.76})$$

mit dem kritischen Exponenten ν .

Ein guter Kandidat ist die Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion (Abb. III.1.14)

$$G(r) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L n_j n_{j+r} - \rho^2, \quad (\text{III.1.77})$$

die sich für $r = 1$ auf den Ordnungsparameter (III.1.74) reduziert. Für große Abstände werden n_j und n_{j+r} statistisch unabhängig und nehmen dann jeweils den Wert ρ an. Deshalb zieht man den asymptotischen Wert ρ^2 ab, damit so $G(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$. Die typische Form von $G(r)$ ist in Abb. III.1.14 dargestellt. Man sieht deutlich, daß $G(r)$ unterhalb von ρ_c sehr schnell abfällt. Außerdem erkennt man deutlich die Teilchen-Loch-Anziehung. $G(r)$ mißt gerade die Wahrscheinlichkeit, daß eine Zelle im Abstand r besetzt ist. $G(r)$ für $r = 1, 2$ (und entsprechenden Vielfachen) ist deutlich kleiner als der Wert ρ^2 , den man für eine vollkommen unkorrelierte Verteilung erwarten würde.

Für $p > 0$ findet sich hier allerdings kein Hinweis auf eine Divergenz der Korrelationslänge. Sie ist bei allen Dichten endlich, zeigt aber ein Maximum in der Nähe von ρ_c (siehe Abb. III.1.15). Eine genauere Analyse der Daten zeigt, daß das Maximum ξ_{\max} der Korrelationslänge für $p \rightarrow 0$ divergiert und zwar wie

$$\xi_{\max} \propto \frac{1}{\sqrt{p}}. \quad (\text{III.1.78})$$

Für $v_{\max} = 1$ kann man dieses Verhalten sogar analytisch an Hand der exakten Lösung beweisen. Es ist außerdem konsistent mit der Feststellung, daß wir es bei $p = 0$ mit einem Phasenübergang 2. Ordnung zu tun haben.

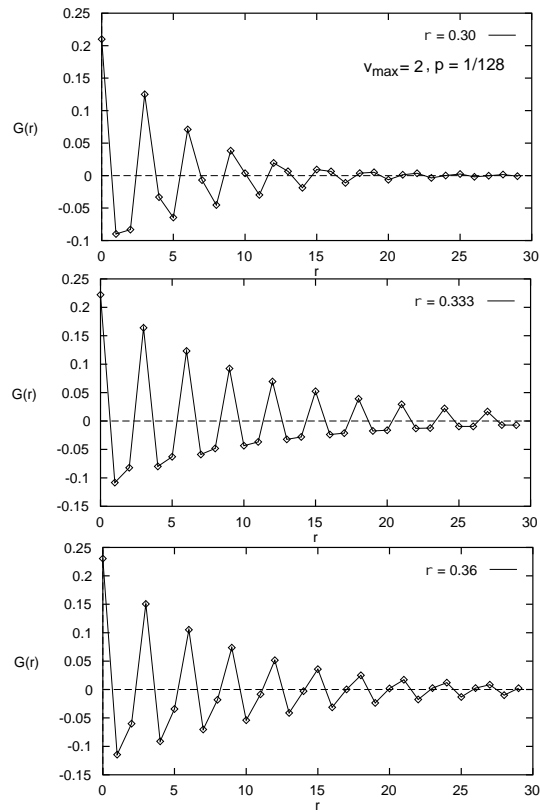


Abbildung III.1.14: Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion des NaSch-Modells für $v_{\max} = 2$ und verschiedene Dichten in der Nähe von ρ_c , wobei hier $\rho_c = 1/3$.

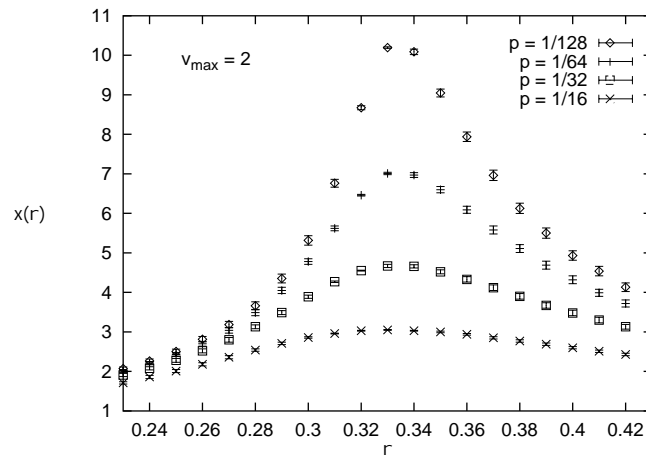


Abbildung III.1.15: Korrelationslänge der Dichte-Dichte-Korrelation des NaSch-Modells für $v_{\max} = 2$ und verschiedene Werte von p .

Das Verhalten der räumlichen Korrelation gibt also keinen Hinweis auf kritisches Verhalten bei $p > 0$. Auch dies schließt noch nicht aus, daß es doch einen kritischen Punkt geben könnte. Z.B. könnte sich dieser im Verhalten der zeitlichen Korrelationen bemerkbar machen. Üblicherweise divergiert die *Relaxationszeit* τ an einem kritischen Punkt, was man auch als *Critical Slowing Down* bezeichnet, da die Dynamik dann sehr langsam wird. Deshalb hat man sich die Zeitabhängigkeit $v(t)$ der Durchschnittsgeschwindigkeit angesehen. Für große Zeiten $t \rightarrow \infty$ erwartet man, daß $v(t)$ wie

$$v_\infty - v(t) \sim e^{-t/\tau} \quad (\text{III.1.79})$$

gegen den stationären Wert v_∞ strebt¹⁵ (siehe Abb. III.1.16).

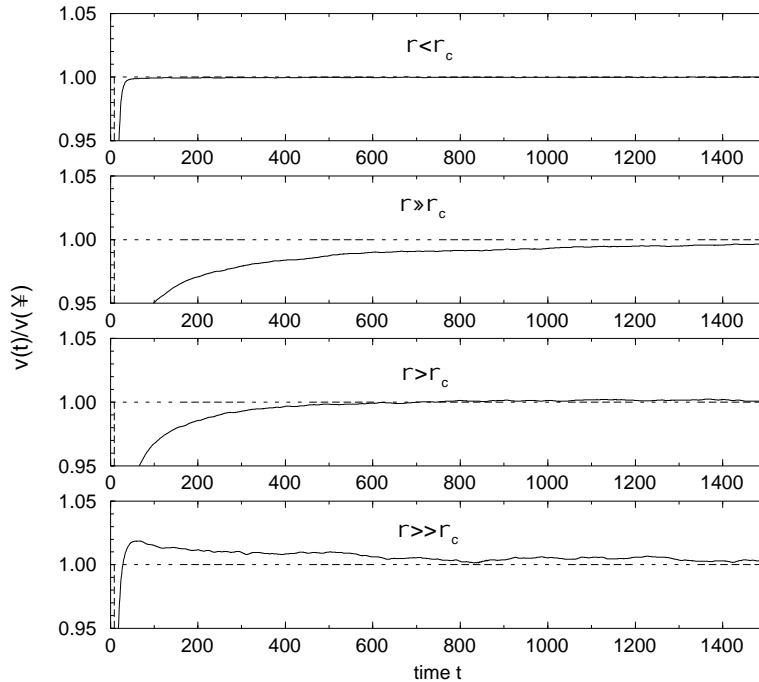


Abbildung III.1.16: Relaxationsverhalten der Geschwindigkeit für $v_{\max} = 5$ und verschiedene Dichten.

Abb. III.1.17 zeigt das Verhalten für verschiedene Systemlängen L . Das extrapolierte Verhalten im thermodynamischen Limes ist nur schwer interpretierbar, spricht aber eher gegen das Vorliegen eines kritischen Punktes.

Neben räumlichen und zeitlichen Korrelationen kann man auch echte raum-zeitliche Größen betrachten. Besonders interessant ist der *dynamische Strukturfaktor* $S(k, \omega)$, der häufig ein guter Indikator für kritisches Verhalten ist. Er ist definiert als

$$S(k, \omega) = \frac{1}{LT} \left| \sum_{j=1}^L \sum_{t=0}^T n_j(t) e^{i(kj - \omega t)} \right|^2, \quad (\text{III.1.80})$$

¹⁵Tatsächlich ist das Verhalten hier etwas komplizierter. Dies ändert aber nichts an der Interpretation.

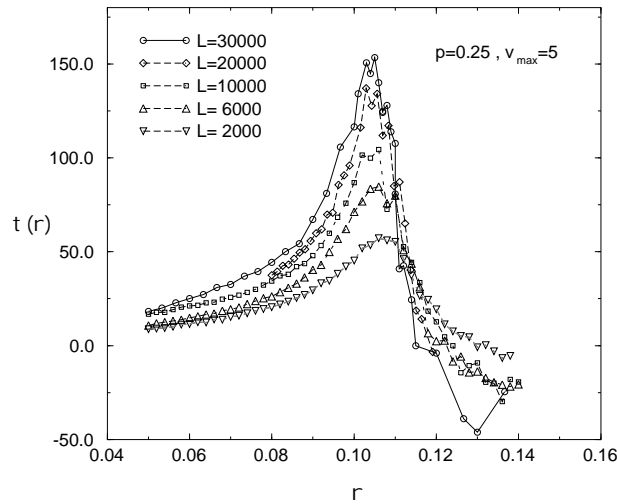


Abbildung III.1.17: Relaxationszeiten für $v_{\max} = 5$, $p = 0.25$ und verschiedene Systemlängen L .

wobei $n_j(t)$ die mittlere Besetzungszahl von Zelle j zur Zeit t ist. Die Wellenzahlen k und Frequenzen ω können bei periodischen Randbedingungen die Werte $k = \frac{2\pi}{L}m_k$ bzw. $\omega = \frac{2\pi}{T}m_\omega$ mit ganzzahligen m_k und m_ω annehmen. $S(k, \omega)$ ist verwandt mit der Fourier-Transformierten der zeitabhängigen räumlichen Korrelationsfunktion

$$G(r, \tau) = \langle n_j(t)n_{j+r}(t + \tau) \rangle - \langle n_j(t) \rangle \langle n_{j+r}(t + \tau) \rangle, \quad (\text{III.1.81})$$

wobei $\langle \dots \rangle$ für die Mittelung über die Realisierungen des Zufallsprozesses steht. Für $t \rightarrow \infty$ und $\tau = 0$ reduziert sich $G(r, t)$ auf $G(r)$.

Analog kann man neben dem Strukturfaktor der Dichte auch einen Strukturfaktor $S_v(k, \omega)$ für die Geschwindigkeit definieren. Der in Abb. III.1.18 erkennbare Kamm wird durch die Staudynamik verursacht. Die Staugeschwindigkeit kann gemäß $v_s = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{\text{Kamm}}$ aus der Steigung der Projektion des Kammes in die $\omega - k$ -Ebene bestimmt werden. Längs des Staukammes zeigt der Strukturfaktor tatsächlich ein algebraisches Verhalten

$$S_v(k, \omega) \Big|_{\frac{\omega}{k} = v_s} \sim k^{-\gamma} \quad (\text{III.1.82})$$

wie man es an einem kritischen Punkt erwartet.

Die Bestimmung des dynamischen Strukturfaktors ist numerisch sehr aufwändig. Deshalb sind die betrachteten Systemgrößen L und Zeiten T relativ klein. Man erwartet nun, daß für große L und T das algebraische Verhalten (III.1.82) verschwindet. Der Grund für diese Erwartung liegt in dem Verhalten einer anderen wichtigen Größe, der *Lebensdauer eines Staus*. Abb. III.1.19 zeigt Lebensdauerverteilungen, die mit Hilfe von Computersimulationen gewonnen wurden. Das Interessante hierbei ist, daß es einen sog. cut-off der Lebensdauern bei etwa $T = 10^5$ gibt, d.h. sehr langlebige Staus treten praktisch nicht auf. Dieser Effekt ist weitgehend unabhängig von der Systemgröße und sollte daher auch im thermodynamischen Limes zu beobachten sein.

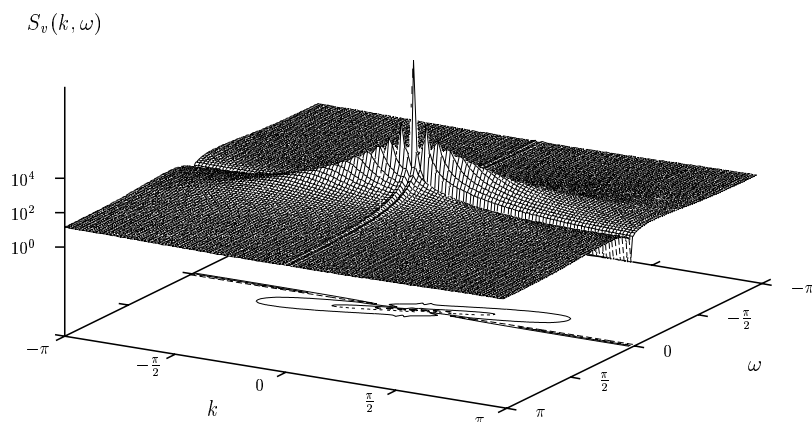


Abbildung III.1.18: Dynamischer Strukturfaktor $S_v(k, \omega)$.

Was nun in Abb. III.1.19 auffällt ist, daß es tatsächlich einen Bereich zwischen $T = 10^2$ und $T = 10^4$ gibt, in dem man ein algebraisches Verhalten der Verteilung mit einem Exponenten von etwa -0.54 beobachtet¹⁶. Dieses ist aber nicht typisch für das Verhalten bei sehr großen Zeiten. Die Daten für den dynamischen Strukturfaktor wurden nun aber gerade bei Zeiten gemessen, für denen man auch bei der Lebensdauerverteilung im algebraischen Bereich ist. Das Verhalten (III.1.82) ist daher ein finite-time-Effekt, der dadurch zustande kommt, daß man bei der Simulation nicht zu genügend großen Zeiten kommt.

Insgesamt liefern alle oben beschriebenen Beobachtung starke Evidenz dafür, daß man beim NaSch-Modell mit $p > 0$ keinen echten Phasenübergang beobachtet. Stattdessen findet ein *Crossover* statt, bei dem sich die Natur allmählich ändert, ohne aber durch eine Singularität zu gehen.

Das beobachtete Verhalten erinnert stark an das Verhalten von Gleichgewichtssystemen endlicher Größe. Dort kann man natürlich auch keine echten Singularitäten beobachten, aber die Größen (wie z.B. die spezifische Wärme) zeigen i.a. ein aber statt eines singulären Verhaltens ein deutliches Maximum, dessen Lage dann etwas gegenüber dem kritischen Punkt des unendlichen Systems verschoben ist. Etwas Ähnliches passiert auch hier, wenn man versucht, aus den Messungen einen kritischen Punkt zu extrahieren. Die Werte, die man so erhält, sind i.a. etwas kleiner als ρ_c . p spielt also hier eine ähnliche Rolle wie $1/L$ in Gleichgewichtssystemen mit kritischem Verhalten.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß das hier beschriebene Verhalten nicht nur beim Nagel-Schreckenberg-Modell auftritt. Es ist typisch für Modelle der Krauß-Klasse II (siehe Kap. II.4.4).

¹⁶In einer doppelt-logarithmischen Darstellung führt ein algebraisches Verhalten zu einer Geraden, deren Steigung den Exponenten bestimmt.

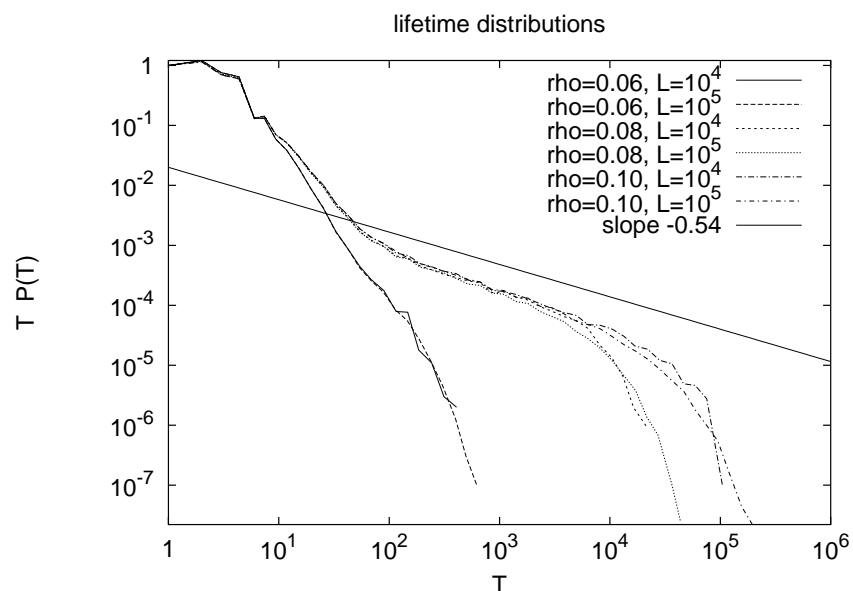


Abbildung III.1.19: Lebensdauererwartungen von Staus im NaSch-Modell für $v_{\max} = 5$ und $p = 0.5$. Man beachte die doppelt-logarithmische Darstellung.

III.2 Nichtgleichgewichtseffekte

Bei “getriebenen Systemen”, also Systemen, denen ein Strom aufgeprägt wird, treten eine Reihe interessanter Nichtgleichgewichtseffekte auf. Zwei, die äußerst relevant für die Verkehrsmodellierung sind, wollen wir hier genauer betrachten:

- Effekte durch die Anwesenheit von Unordnung bzw. Defekten
- Effekte durch offene Randbedingungen.

Dabei wollen wir uns auf die grundlegenden physikalischen Prinzipien konzentrieren. Wir werden deshalb immer das NaSch-Modell mit $v_{\max} = 1$ zugrunde legen. Es sei aber schon jetzt darauf hingewiesen, daß die beobachteten Effekte im wesentlichen unabhängig von den Details der Dynamik sind. Sie können daher auch für andere Parameterwerte und sogar andere Modelle beobachtet werden.

III.2.1 Unordnung und Defekte

Bisher haben wir immer homogene Systeme betrachtet, d.h. alle Fahrzeuge hatten die gleiche Maximalgeschwindigkeit v_{\max} und den gleichen Trödelparameter p . In der Realität hat man es aber mit einer Mischung aus unterschiedlichen Fahrzeug- und Fahrertypen zu tun, d.h. mit einem ganzen Spektrum an möglichen p und v_{\max} . Dies bezeichnet man dann als *Unordnung*.

Im folgenden wollen wir daher das NaSch-Modell mit $v_{\max} = 1$ betrachten, aber der Trödelparameter p ist nicht überall gleich. Der Fall einer Verteilung der v_{\max} soll hier nicht betrachtet werden. Dort beobachtet man die gleichen Effekte wie in den hier vorgestellten Spezialfällen. Wie schon erwähnt, läßt sich die Dynamik des NaSch-Modells mit $v_{\max} = 1$ kompakt so formulieren: Ein Teilchen hüpf mit der Wahrscheinlichkeit $\bar{p} = 1 - p$ auf seine rechten Nachbarplatz, wenn dieser leer ist. Bei dieser Dynamik lassen sich dann zwei Arten von Unordnung unterscheiden:

1. *Gitterartige Unordnung:*

Hier variiert $\bar{p} = \bar{p}_j$ in Abhängigkeit vom Gitterplatz j . Dahinter steckt also die Vorstellung, daß die Hüpfwahrscheinlichkeiten nicht den Teilchen, sondern den Plätzen zugeordnet sind.

2. *Teilchenartige Unordnung:*

Hier variiert $\bar{p} = \bar{p}_n$ in Abhängigkeit vom Teilchen n .

Gitterartige Unordnung

Wir wollen zunächst den Fall der gitterartigen Unordnung betrachten. Genauer betrachten wir den Fall eines (stationären) *Defektes*, d.h.

$$\bar{p}_j = \begin{cases} \bar{p}_d & \text{für } j = j_d \\ \bar{p} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{III.2.1})$$

mit $\bar{p}_d < \bar{p}$. Es gibt also einen Platz j_d , an dem die Hüpftrate p_d kleiner ist als im Rest des Systems. Man kann sich dies als ein einfaches Modell für eine Fahrbahnverengung oder eine Tunnel¹⁷ vorstellen.

Abb. III.2.1 zeigt das Fundamentaldiagramm, das man in diesem Fall erhält. Für kleine und große Dichten stimmt es mit dem ungestörten System (d.h. $\bar{p}_d = \bar{p}$) überein. Für mittlere Dichten dagegen ist der Fluß konstant. Dort sieht man ein Plateau im Fundamentaldiagramm. Abb. III.2.2 zeigt das typische Dichteprofil im Bereich des Plateaus. Im Gegensatz zum ungestörten Fall ist die Dichte nicht mehr konstant, sondern macht am Defekt einen Sprung.

Im Plateaubereich, der für Dichten $\rho_1 < \rho < \rho_2$ auftritt¹⁸, beobachtet man also eine Phasenseparation in einen Hochdichtebereich ρ_h und einen Niedrigdichtebereich ρ_l , getrennt durch einen Schock endlicher Breite.

Für eine analytische Beschreibung machen wir nun drei Annahmen:

1. Im Plateaubereich liegt Phasenseparation in einen Phase hoher Dichte ρ_h vor dem Defekt und eine Phase niedriger Dichte ρ_l hinter dem Defekt vor.
2. Diese Phasen können jeweils durch die Fundamentaldiagramme des NaSch-Modells ohne Defekt beschrieben werden:

$$J_{h/l} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - 4\bar{p}\rho_{h/l}(1 - \rho_{h/l})} \right]. \quad (\text{III.2.2})$$

¹⁷Dort wird i.a. vorsichtiger gefahren, d.h. mehr getrödelt.

¹⁸Auf Grund der Teilchen-Loch-Symmetrie ist $\rho_2 = 1 - \rho_1$.

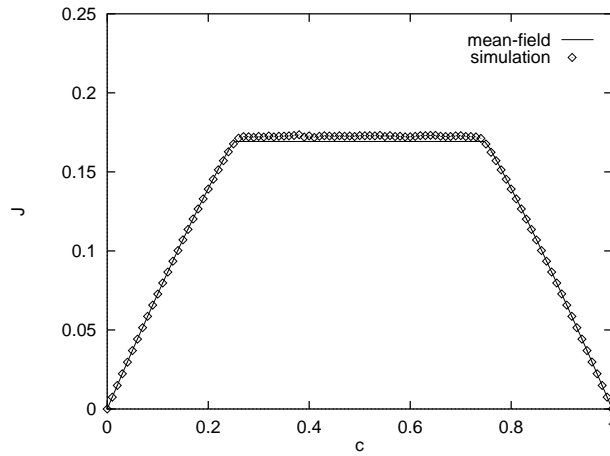


Abbildung III.2.1: Fundamentaldiagramm für das NaSch-Modell mit $v_{\max} = 1$ und $\bar{p} = 0.75$ und einem gitterartigen Defekt $\bar{p}_d = 0.25$.

3. Der Strom durch den Defekt hat die gleiche Struktur wie der exakte Strom:

$$J_d = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - 4\bar{p}_d \rho_h (1 - \rho_l)} \right]. \quad (\text{III.2.3})$$

Man beachte, daß für die Dichte des besetzten Platzes ρ_h angenommen wurde und für die unbesetzten Platzes $1 - \rho_l$.

Mit diesen Annahmen wollen wir jetzt eine analytische Beschreibung herleiten. Ein wesentlicher Baustein ist die Stromerhaltung $J_h = J_l$, die aus der Kontinuitätsgleichung folgt. Aus Gleichung (III.2.2) folgt dann $\rho_h(1 - \rho_h) = \rho_l(1 - \rho_l)$ und hieraus

$$\rho_h = \rho_l \quad \text{oder} \quad \rho_h = 1 - \rho_l. \quad (\text{III.2.4})$$

Der erste Fall entspricht dem homogenen Zustand, der zweite der Phasenseparation im Plateaubereich. Für $\rho_h = \rho_l$ ist offensichtlich auch $J_d = J_h = J_l$ und es gibt keinen Unterschied zum System ohne Defekt¹⁹.

Für $\rho_h = 1 - \rho_l$ wird der Strom durch den Defekt bestimmt. Es muß auch $J_d = J_h$ sein, woraus mit den Gleichungen (III.2.2) und (III.2.3) folgt:

$$4\bar{p}\rho_h(1 - \rho_h) = 4\bar{p}_d\rho_h(1 - \rho_l) = 4\bar{p}_d\rho_h^2. \quad (\text{III.2.5})$$

Damit folgt dann

$$\boxed{\rho_h = \frac{\bar{p}}{\bar{p} + \bar{p}_d} \quad \text{und} \quad \rho_l = \frac{\bar{p}_d}{\bar{p} + \bar{p}_d}} \quad (\text{III.2.6})$$

¹⁹Hierbei gilt die Annahme 3. nicht!

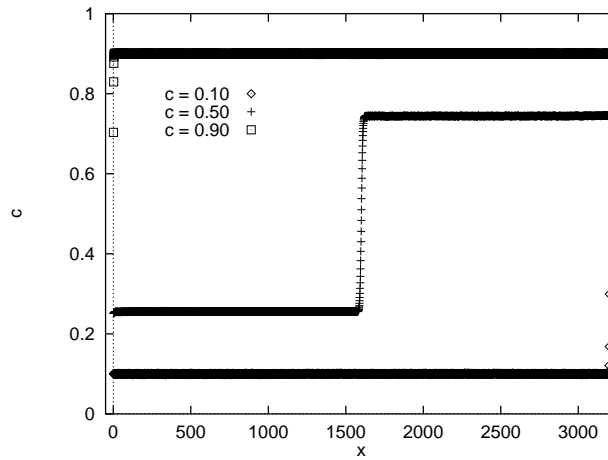


Abbildung III.2.2: Dichteprofile für das Defektsystem bei drei verschiedenen Dichte $\rho = 0.1$, $\rho = 0.5$ und $\rho = 0.9$. Der Defekt befindet sich bei $j_d = 1$. Man beachte die periodischen Randbedingungen.

und somit für den Strom

$$J_d = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\bar{p} + \bar{p}_d} \sqrt{(\bar{p} + \bar{p}_d)^2 - 4\bar{p}_d\bar{p}^2} \right] \quad (\text{III.2.7})$$

Zur Bestimmung der kritischen Dichten ρ_1 und ρ_2 , die den Plateaubereich begrenzen, nehmen wir an, daß wir die Übergangsbereiche zwischen der Hoch- und Niedrigdichtephase im separierten Zustand vernachlässigen können. Ist r die Länge des Niedrigdichtebereichs, so hat der Hochdichtebereich die Länge $L - r$ und deshalb folgt mit $\rho_l = 1 - \rho_h$

$$N = r\rho_l + (L - r)\rho_h = r + \rho_h(L - 2r) \quad (\text{III.2.8})$$

bzw. mit $x = \frac{r}{L}$

$$\rho = x + \rho_h(1 - 2x). \quad (\text{III.2.9})$$

Damit ergibt sich

$$x = \frac{\rho - \rho_h}{1 - 2\rho_h} = \frac{(\bar{p} + \bar{p}_d)\rho - \bar{p}}{\bar{p}_d - \bar{p}} \quad (\text{III.2.10})$$

für den Anteil x des Niedrigdichtebereichs.

Bei der Dichte ρ_1 bzw. ρ_2 wird x gerade gleich 1 bzw. 0:

$$\rho_1 = 1 + \rho_h(1 - 2) = 1 - \rho_h = \rho_l, \quad (\text{III.2.11})$$

$$\rho_2 = \rho_h, \quad (\text{III.2.12})$$

d.h.

$$\rho_1 = \rho_l \quad \text{und} \quad \rho_2 = \rho_h. \quad (\text{III.2.13})$$

Bei ausgedehnten Defekten beobachtet man ein ganz ähnliches Verhalten. Der Plateauwert sinkt aber mit zunehmender Defektlänge l_d (siehe Abb. III.2.3). Ist der Defekt so lang, daß der Plateauwert den maximalen Strom eines homogenen Systems, das nur aus \bar{p}_d besteht, erreicht, so verschwindet das Plateau und das Fundamentaldiagramm nimmt immer mehr die Form im homogenen System an.

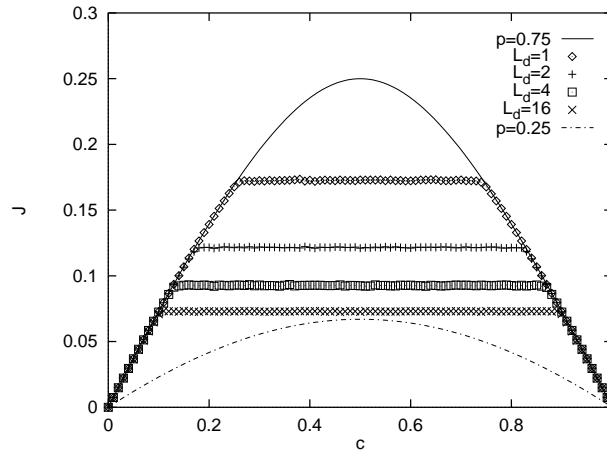


Abbildung III.2.3: Fundamentaldiagramme für Systeme mit unterschiedlicher Defektlänge l_d und $\bar{p} = 0.75$, $\bar{p}_d = 0.25$.

Das Verhalten im allgemeinen Fall $v_{\max} > 1$ ist sehr ähnlich. Es bildet sich wieder ein Plateau heraus, das aber auf Grund der fehlenden Teilchen-Loch-Symmetrie nicht mehr symmetrisch um $\rho = \frac{1}{2}$ ist. Es ist dabei sinnvoll, als kleinste relevante Defektlänge $l_d = v_{\max}$ zu wählen, damit jedes Auto mindestens einmal den erhöhten Trödelparameter spürt.

Teilchenartige Unordnung

Als einfaches Modell für den Einfluß teilchenartiger Unordnung betrachten wir wieder das NaSch-Modell mit $v_{\max} = 1$. Nun sollen aber die Fahrzeuge unterschiedliche Trödelparameter p_n bzw. Hüpfwahrscheinlichkeiten $\bar{p}_n = 1 - p_n$ haben. Dies impliziert auch, daß die Freiflußgeschwindigkeiten $v_{\text{safe}}^{(n)} = v_{\max} - p_n = \bar{p}_n$ der einzelnen Fahrzeuge unterschiedlich sind. Im folgenden wollen wir außerdem den Fall der zufällig-sequentuellen Dynamik betrachten. Das Verhalten bei paralleler Dynamik ist vollkommen analog, allerdings ist die Beschreibung technisch etwas schwieriger.

Die Hüpfraten \bar{p}_n seien unabhängige Zufallsvariablen, die gemäß einer Verteilung $f(\bar{p})$ aus dem Intervall $[c, 1]$ mit $c > 0$ gezogen werden. Dies geschieht am Anfang, danach sind die Hüpfraten fest. Der stationäre Zustand für einen solchen Prozeß kann exakt angegeben werden, da es sich um einen sog. *Zero-Range-Prozeß* handelt.

Ein *Zero-Range-Prozeß* ist ein stochastischer Prozeß, der auf einem beliebigen Gitter mit L Plätzen in beliebigen Dimensionen definiert sein kann. Auf jedem Platz können sich beliebig viele ununterscheidbare Teilchen befinden. Ein Teilchen auf Platz j kann mit einer Rate u_j auf

einen anderen Platz hüpfen, der fest vorgeben aber sonst beliebig ist. Ein Zero-Range-Prozeß ist nun dadurch charakterisiert, daß die Rate u_j nur von der Zahl n der Teilchen auf dem Ausgangsplatz abhängt²⁰. Insbesondere hängt die Hüpftrate also nicht von der Zahl der Teilchen auf dem Zielplatz ab! Dies schließt (zunächst!) Prozesse aus, bei denen Mehrfachbesetzungen verboten sind, da hier die Rate Null wäre, wenn der Zielplatz besetzt ist.

Abb. III.2.4 zeigt einen typischen eindimensionalen Zero-Range-Prozeß. Jedem Platz j wird eine Funktion $u_j(n)$ zugeordnet, die angibt, mit welcher Rate $u_j(n)$ ein Teilchen von Platz j nach $j+1$ springt, wenn sich n Teilchen auf Platz j befinden.

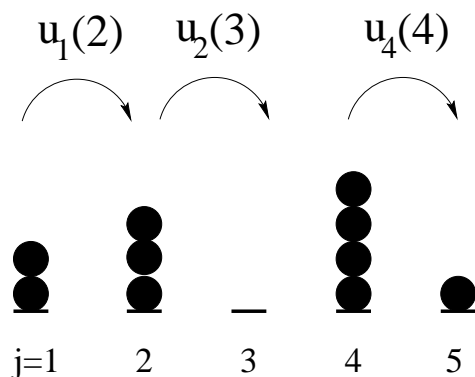


Abbildung III.2.4: Ein typischer eindimensionaler Zero-Range-Prozeß. Die Hüpfraten $u_j(n)$ hängen nur von der Anzahl n der Teilchen auf dem Ausgangsplatz j ab.

Zunächst drängt sich die Frage auf, warum unser Modell (bzw. das NaSch-Modell mit $v_{\max} = 1$) überhaupt ein Zero-Range-Prozeß ist, wo doch Mehrfachbesetzungen verboten sind. Hierzu gehen wir wie bei COMF in Kapitel III.1.4 zu einer Beschreibung durch die Lücken d_n vor dem n -ten Fahrzeug über (siehe Abb. III.2.5). Wir sehen, daß ein Hüpfen eines Teilchens auf

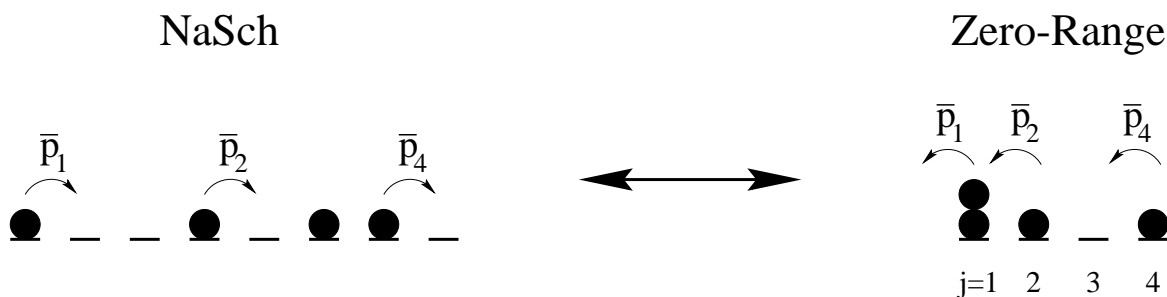


Abbildung III.2.5: Das NaSch-Modell und der äquivalente Zero-Range-Prozeß.

eine leeren Platz nach rechts im ursprünglichen Bild dem Hüpfen nach links im Lücken-Bild entspricht. Die Raten im neuen Bild hängen nur vom "Platz", der den Teilchen im ursprünglichen Modell entspricht, ab.

²⁰Dabei kann die Rate aber noch von j selbst abhängen!

Wir sehen also, daß das NaSch-Modell mit $v_{\max} = 1$ und beliebigen (aber festen) Hüpfweiten für jedes Auto ein Zero-Range-Prozeß ist. Für den Fall $v_{\max} > 1$ gilt das aber nicht mehr. Da sich hier Autos um mehr als einen Platz fortbewegen können, würde dies dem gleichzeitigen Hüpfen von mehr als einem Teilchen entsprechen, was in Zero-Range-Prozessen nicht erlaubt ist.

Das Besondere an Zero-Range-Prozessen ist nun, daß man beweisen kann, daß der stationäre Zustand durch ein Produktmaß beschrieben wird. In unserer bisherigen Sprechweise bedeutet dies, daß es eine Mean-Field-Theorie gibt, die exakt ist. Für das NaSch-Modell ist dies COMF, was wir früher ja schon auf andere Weise gefunden hatten.

Ohne auf die Details der Rechnung einzugehen, referieren wir hier nur die Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit $D_n^{(j)}$, vor Teilchen j n freie Plätze zu finden, ist gegeben durch

$$D_n^{(j)} = (1 - \alpha_j)\alpha_j^n \quad \text{mit} \quad \alpha_j = \frac{v}{\bar{p}_j}, \quad (\text{III.2.14})$$

wobei v die Durchschnittsgeschwindigkeit der Teilchen ist, die im stationären Zustand unabhängig von j ist. Man beachte, daß Gleichung (III.2.14) die gleiche Struktur hat (nämlich $D_n \propto \alpha^n$) wie die Gleichung (III.1.51) für das homogene NaSch-Modell. Für parallele Dynamik ergibt sich ein etwas anderer Ausdruck mit ähnlicher Struktur, da hier der Fall $n = 0$ gesondert zu behandeln ist.

Man beachte, daß der Ausdruck (III.2.14) schon die Normierung $\sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(j)} = 1$ erfüllt, allerdings nur, falls $\alpha_j < 1$ für alle j . Dies ist äquivalent zur Bedingung $v < \min(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_N) = c$.

Wir wollen nun das Fundamentaldiagramm bestimmen. Tatsächlich ist es etwas einfacher, die Durchschnittsgeschwindigkeit als Funktion der Dichte abzuleiten. Dazu überlegt man sich zunächst, daß

$$\begin{aligned} \text{mittlerer Abstand (Lücke)} &= \langle \bar{d} \rangle = \frac{1 - \rho}{\rho} \\ &= \int_c^1 d\bar{p}_j f(\bar{p}_j) \frac{\alpha_j}{1 - \alpha_j} = v \int_c^1 \frac{f(\bar{p}) d\bar{p}}{\bar{p} - v}. \end{aligned} \quad (\text{III.2.15})$$

In der ersten Zeile sollen die eckigen Klammern eine statistische Mittelung für eine feste Verteilung der \bar{p}_n andeuten und der Querstrich eine Mittelung über $f(\bar{p})$. Außerdem haben wir dort den bekannten Zusammenhang zwischen mittlerer Lücke und der Dichte ausgenutzt. In der zweiten Zeile wird die Mittelung über die Verteilung explizit ausgeführt. Dabei ist $\frac{\alpha_j}{1 - \alpha_j}$ der mittlere Abstand bei fester Verteilung der \bar{p}_j :

$$\langle d \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n D_n^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} n (1 - \alpha_j) \alpha_j^n = (1 - \alpha_j) \alpha_j \frac{d}{d\alpha_j} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_j^n. \quad (\text{III.2.16})$$

Somit ist $v(\rho)$ bestimmt durch die implizite Gleichung

$$\boxed{\frac{1 - \rho}{\rho} = v \int_c^1 \frac{f(\bar{p}) d\bar{p}}{\bar{p} - v}, \quad (\text{III.2.17})}$$

bzw.

$$\rho = [1 + I(v)]^{-1} \quad \text{mit} \quad I(v) := v \int_c^1 \frac{f(\bar{p})d\bar{p}}{\bar{p} - v}. \quad (\text{III.2.18})$$

Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden, je nach Verhalten von Gl. (III.2.17) für $v \rightarrow c$.

1. Das Integral $I(v)$ divergiert für $v \rightarrow c$: In diesem Fall zeigt kann Gleichung (III.2.18) für beliebig kleine ρ erfüllt werden und es ist für alle Dichten $v(\rho) < c$. Die Verteilung $D_n^{(j)}$ ist dann normierbar.
2. Das Integral $I(v)$ bleibt für $v \rightarrow c$ endlich: Nun kann (III.2.18) für kleine Dichten $\rho < \rho_c$ nicht mehr erfüllt werden. Dann ist

$$v(\rho) = c \quad \text{für } \rho \in [0, \rho_c] \quad (\text{III.2.19})$$

$$\rho_c = \left[1 + c \int_c^1 \frac{f(\bar{p})d\bar{p}}{\bar{p} - c} \right]^{-1}. \quad (\text{III.2.20})$$

Die Verteilung ist für die langsamsten Teilchen mit $\bar{p}_j \approx x$ nicht mehr normierbar. Abb. III.2.7 zeigt die typische Form des Fundamentaldiagramms in diesem Fall.

Eine genauere Beschreibung nutzt die Analogie zur Bose-Einstein-Kondensation. Es sei Teilchen 1 das langsamste Teilchen mit $\bar{p}_1 = c$. Dann hat man Gleichung (III.2.17) eigentlich zu ersetzen durch

$$\frac{1 - \rho}{\rho} = I(v) + \frac{\langle d_1 \rangle}{N}, \quad (\text{III.2.21})$$

wobei $\langle d_1 \rangle$ die mittlere Anzahl freier Plätze vor Teilchen 1 ist. Wenn $I(v \rightarrow c)$ divergiert, kann man Gleichung (III.2.21) mit $v < c$ und $\frac{\langle d_1 \rangle}{N} = 0$ erfüllen. Ist dagegen $I(v \rightarrow c)$ endlich, so kann (III.2.21) unterhalb von ρ_c nur mit $v \rightarrow c$ und $\frac{\langle d_1 \rangle}{N} \neq 0$ erfüllt werden. Dies bedeutet, daß sich vor Fahrzeug 1 eine große Lücke ($\propto N$) bildet, da sich die anderen Autos hinter dem langsamen stauen. Oberhalb von ρ_c ist wieder $v < c$ und $\frac{\langle d_1 \rangle}{N} = 0$. Das Besondere im Vergleich zum üblichen Verhalten von homogenen Verkehrsmodellen ist, daß bei der Anwesenheit von Defekten Staus bei kleinen Dichten auftreten. Bei höheren Dichten machen sich die Defekte u.U. überhaupt nicht bemerkbar, weil die Fahrzeugdynamik nur relativ kleine Geschwindigkeiten erlaubt.

Wir wollen noch einen Spezialfall genauer analysieren, nämlich den eines langsamen Autos ($\bar{p}_1 = c$). Alle anderen Fahrzeuge $j > 1$ seien schnelle Autos mit Hüpftrate $\bar{p}_j = \bar{p} > c$. Für den mittleren Abstand der Autos ist das eine langsame Teilchen irrelevant und deshalb gilt

$$\langle d_j \rangle_{j>1} = \frac{1 - \rho}{\rho} = \frac{\alpha_j}{1 - \alpha_j} \Big|_{j>1} = \frac{v}{1 - v}. \quad (\text{III.2.22})$$

Hieraus folgt dann

$$v(\rho) = 1 - \rho \quad \text{falls } v < c \quad (\text{III.2.23})$$

und somit

$$\rho_c = 1 - c. \quad (\text{III.2.24})$$

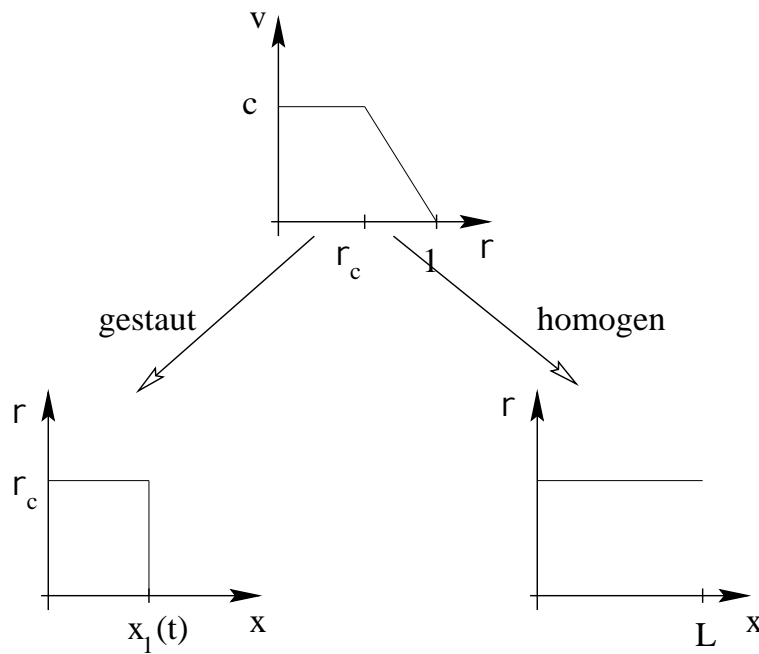


Abbildung III.2.6: Fundamentaldiagramm und Dichteprofile für den Fall eines langsamen Teilchen.

Eine interessante Größe zur Charakterisierung des Phasenübergangs bei ρ_c ist die Varianz der Lücke:

$$\Delta^2 = \overline{\langle d_j^2 \rangle} - \langle d_j \rangle^2 = -v\rho^2 \left(\frac{dv}{d\rho} \right)^{-1}. \quad (\text{III.2.25})$$

Entscheidend für die Natur des Phasenübergangs ist das Verhalten der Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(\bar{\rho})$ in der Nähe von c . Dieses läßt sich durch einen Exponenten n gemäß

$$f(\bar{\rho}) \sim (\bar{\rho} - c)^n \quad \text{für } \bar{\rho} \rightarrow c \quad (\text{III.2.26})$$

charakterisieren. Dann muß man folgende Fälle unterscheiden:

1. $n \leq 0$: In diesem Fall gibt es keinen Phasenübergang, allerdings tritt i.a. eine Singularität bei $\rho = 0$ auf.
2. $0 < n \leq 1$: In diesem Fall beobachtet man einen Phasenübergang 2. Ordnung bei dem die Varianz wie

$$\Delta^2(\rho) \sim (\rho - \rho_c)^{-(1-n)/n} \quad (\text{III.2.27})$$

divergiert.

3. $n > 1$: In diesem Fall gibt es einen Übergang 1. Ordnung bei ρ_c , allerdings

$$\left. \frac{dv}{d\rho} \right|_{\rho \searrow \rho_c}, \quad \left. \Delta^2 \right|_{\rho \searrow \rho_c} \quad \text{bleiben endlich.} \quad (\text{III.2.28})$$

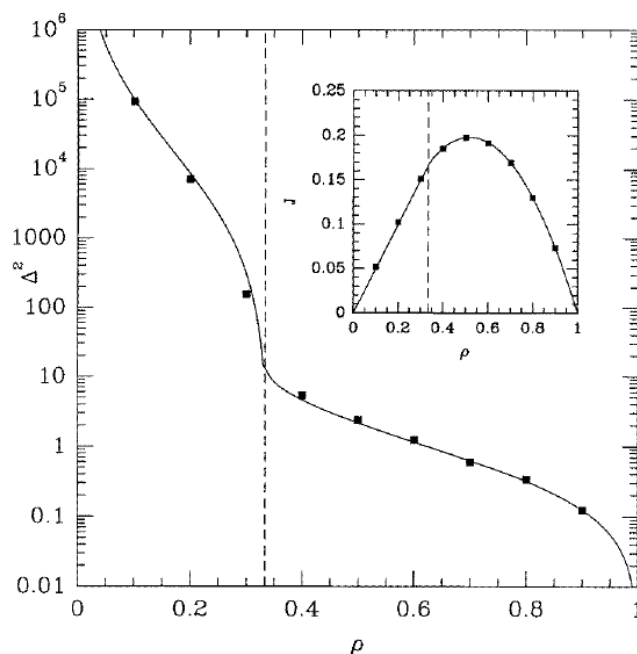


Abbildung III.2.7: Das Insert zeigt ein Fundamentaldiagramm für den Fall, daß $I(v \rightarrow c)$ endlich bleibt. Für $\rho < \rho_c$ ist das Fundamentaldiagramm linear. Die große Abbildung zeigt das Verhalten der Varianz Δ^2 der Lücke.

Abb. III.2.7 zeigt das Verhalten von Δ im Fall $f(\bar{\rho}) = \frac{n+1}{(1-c)^{n+1}}(\bar{\rho} - c)^n$ mit $n = 1$ und $c = 0.5$.

III.2.2 Offene Randbedingungen

Bisher haben wir immer nur den Fall periodischer Randbedingungen untersucht. Dies hat den Vorteil, daß das System i.a.²¹ translationsinvariant ist, was zu einem translationsinvarianten stationären Zustand Anlaß gibt. Die mittlere Dichte ist dann im ganzen System konstant. Bei anderen Randbedingungen wird das i.a. nicht mehr gelten. Eine Besonderheit von Nichtgleichgewichtssystemen ist nun, daß hier Randbedingungen eine viel größere Bedeutung haben können, als in der Gleichgewichtsphysik. Dort kann man relativ allgemein nachweisen, daß sich Randbedingungen im thermodynamischen Limes nicht mehr bemerkbar machen. Der Grund ist, daß die Oberfläche eines d -dimensionalen Systems wie L^{d-1} anwächst, das Volumen aber wie L^d , wobei L die typische Kantenlänge des Systems ist. Für $L \rightarrow \infty$ sind dann die Beiträge des Randes zur Zustandssumme vernachlässigbar.

Wir wollen nun ein einfaches Beispiel diskutieren, das zeigt, warum das bei Nichtgleichgewichtssystemen ganz anders ist. Hier kann eine Variation der Randbedingungen sogar eine Phasenübergang im Inneren des Systemes verursachen! Das Modell, das wir hierzu betrachten wollen, ist der sog. *Asymmetric Simple Exclusion Process (ASEP)*. Hierbei handelt es sich im wesentlichen um ein NaSch-Modell mit $v_{\max} = 1$ und offenen Randbedingungen (siehe Abb. III.2.8). Im Inneren

²¹Die Defektsysteme sind hier eine Ausnahme.

des Systems hüpfen also Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit $\bar{p} = 1 - \alpha$ nach rechts, wenn der entsprechende Platz frei ist. Die Bedingung, daß nur einfachbesetzte Plätze erlaubt sind, bezeichnet man auch als *simple exclusion*, und die Existenz einer Vorzugsrichtung erklärt das ‘A’ in ASEP. An den beiden Rändern des Systems bringen wir nun Teilchenreservoirs an. Das linke Reservoir erlaubt es, neue Teilchen in das System einzufüttern. Dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit α auf dem ersten Platz, falls dieser unbesetzt ist. Das rechte Reservoir nimmt Teilchen vom letzten Gitterplatz auf. Dieser wird mit der Wahrscheinlichkeit β entleert, falls er besetzt ist.

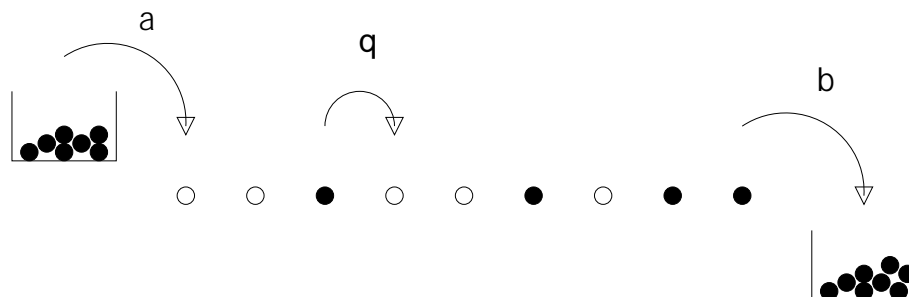


Abbildung III.2.8: Definition des ASEP mit der Einfüllwahrscheinlichkeit α , der Entleerwahrscheinlichkeit β und der Hüpfwahrscheinlichkeit $q = \bar{p}$ im Inneren der Kette.

Wir sehen also, daß beim ASEP die Teilchenzahl nicht konstant ist, sondern schwanken kann. Außerdem gibt es keine Translationsinvarianz mehr und wir erwarten ein nichttriviales *Dichteprofil* ρ_j , bei dem die mittlere Dichte vom Platz j abhängt. Im stationären Zustand muß allerdings der Strom wieder im ganzen System konstant sein.

Im folgenden soll der Einfluß der Randwahrscheinlichkeiten α und β genauer untersucht werden, wobei wir \bar{p} immer festhalten wollen. Eine Änderung von \bar{p} hat dabei immer nur quantitative Auswirkungen. Abb. III.2.9 zeigt das Phasendiagramm, das sich bei Variation von α und β ergibt. Man unterscheidet drei Phasen:

- *Niedrigdichte-Phase A = AI + AII*:
Diese ist dadurch charakterisiert, daß der Strom hier unabhängig von β ist, d.h. $J = J(\alpha, \bar{p})$. Die typischen Dichten sind dabei relativ klein. Innerhalb der Niedrigdichte-Phase kann man zwei Unterphasen *AI* und *AII* unterscheiden, die durch ein unterschiedliches Verhalten des Dichteprofiles am Rand gekennzeichnet sind. Die Grenze zwischen *AI* und *AII* ist durch die gerade gestrichelte Linie gegeben.
- *Hochdichte-Phase B = BI + BII*:
Hier ist der Strom unabhängig von α , d.h. $J = J(\beta, \bar{p})$. Die typischen Dichten sind dabei relativ groß. Ähnlich wie bei der Niedrigdichte-Phase kann man wieder zwei Unterphasen *BI* und *BII* unterscheiden.
- *Maximalstrom-Phase C*:
In dieser Phase ist der Strom unabhängig von α und β , also $J = J(\bar{p})$. In der Tat entspricht der Strom dem Maximum des Fundamentaldiagramms im periodischen System.

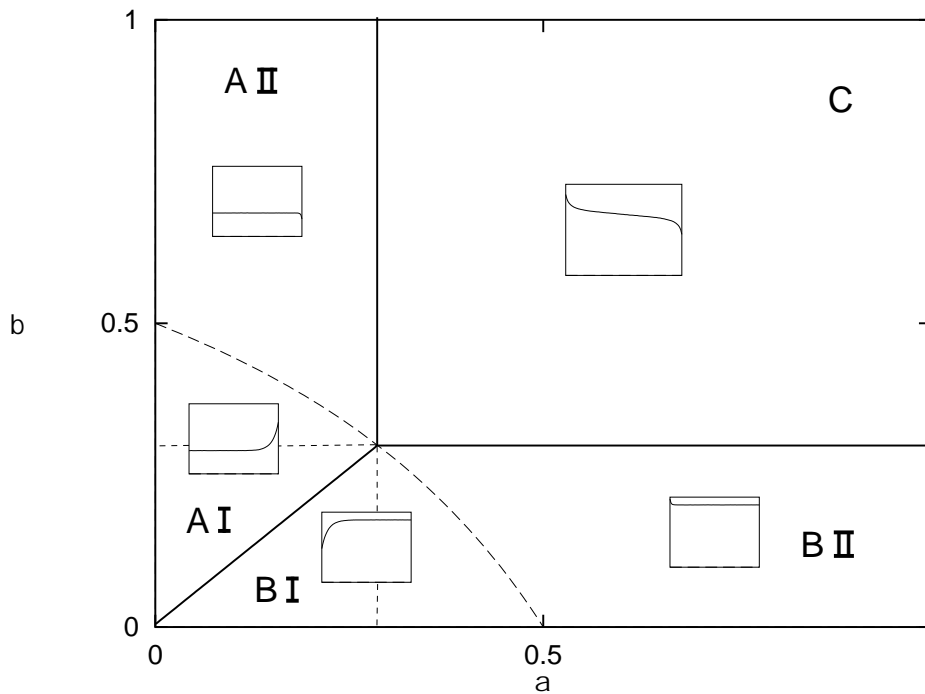


Abbildung III.2.9: Phasendiagramm des ASEP. Die Inserts zeigen jeweils die typische Form des Dichteprofiles im jeweiligen Bereich. Auf der gestrichelten Linie ist das Dichteprofil flach, d.h. $\rho_j = \text{konstant}$.

Man sieht also, daß bei Änderung der Randbedingungen tatsächlich Phasenübergänge auftreten können. Man bezeichnet diese dann auch als *randinduzierte Phasenübergänge* (Krug, 1991). Der Übergang von *A* nach *B* ist dabei von 1. Ordnung, die Übergänge von *A* und *B* nach *C* jeweils von 2. Ordnung.

Es sei hier schon darauf hingewiesen, daß die Struktur des Phasendiagramms für alle Dynamiken (parallel, zufällig-sequentiell, etc.) gleich ist, die Unterschiede sind nur quantitativ. Auch für höhere Werte von v_{\max} sieht das Phasendiagramm sehr ähnlich aus, ist dann allerdings nicht mehr symmetrisch. Wir werden dies später noch genauer verstehen. Tatsächlich hängt die qualitative Form des Phasendiagramms nicht von den Details der Dynamik des Modells ab. Sie wird im wesentlichen durch die Struktur des Fundamentaldiagramms des periodischen Systems bestimmt.

Anschaulich kann man sich das Auftreten der drei Phasen relativ leicht klar machen. Der ASEP verhält sich wie eine Kette aus drei Gliedern: linker Rand, Systeminneres²² und rechte Rand. Die Kette ist dann nur so stark, wie ihr schwächstes Glied. In der Niedrigdichtephase *A* ist das der linke Rand. Das Einfüttern der Teilchen ist hier am ineffektivsten. Deshalb wird der Strom vollständig durch α bestimmt. In der Hochdichtephase ist das Herausnehmen am ineffektivsten, weshalb β den Strom bestimmt. In der Maximalstromphase ist schließlich der Transport im Inneren am wenigsten effektiv. Dies passiert genau dann, wenn er den maximal möglichen Wert im periodischen System erreicht hat. Obwohl die Randbedingungen in der Lage wären, höhere Ströme

²²Das Systeminnere wird häufig mit dem englischen Ausdruck *Bulk* bezeichnet.

zu erzeugen, wird dies durch die Kontinuitätsgleichung im stationären Zustand ($J = \text{konstant}$) verhindert. Der Strom ist daher unabhängig von α und β und wird nur durch \bar{p} bestimmt.

Eine genauere Charakterisierung der Phasenübergänge ist durch die drei Korrelationslängen ξ_α , ξ_β und ξ mit

$$\xi^{-1} = |\xi_\alpha^{-1} - \xi_\beta^{-1}| \quad (\text{III.2.29})$$

möglich. Diese drei Länge charakterisieren das Verhalten des Dichteprofiles in der Nähe der Ränder. Folgendes Verhalten zeigt sich in den einzelnen Phasen:

- In der Phase AI beobachtet man ein exponentielles Verhalten des Dichteprofiles, das durch die Korrelationslänge ξ bestimmt wird. Hier ist außerdem ξ_β endlich.
- In der Phase AII divergiert ξ_β (d.h. $\xi_\beta = \infty$) und das Dichteprofil zerfällt exponentiell mit der Länge ξ_α .
- In den Phasen BI und BII beobachtet man ein analoges Verhalten wie in AI und AII, allerdings mit $\alpha \leftrightarrow \beta$.
- In der Maximalstrom-Phase C ist $\xi_\alpha = \xi_\beta = \infty$ und damit verhält sich das Dichteprofil algebraisch.

An den Phasenübergängen gilt nun:

- Beim Übergang $A \rightarrow C$ divergiert $\xi_\alpha \rightarrow \infty$. Dieser Übergang ist von 2. Ordnung.
- Am Übergang $B \rightarrow C$ divergiert $\xi_\beta \rightarrow \infty$. Dieser Übergang ist ebenfalls von 2. Ordnung.
- Am Übergang $A \rightarrow B$ bleiben ξ_α und ξ_β endlich. Da aber $\xi_\alpha = \xi_\beta$, divergiert ξ . Dieser Übergang ist von 1. Ordnung.

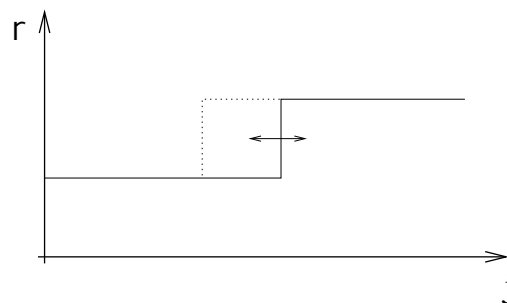


Abbildung III.2.10: Typische Momentaufnahme des Dichteprofiles auf der Übergangslinie $A \rightarrow B$. Hoch- und Niedrigdichtebereich sind durch einen Schock getrennt, der sich frei durch das System bewegen kann.

Bei einem Phasenübergang 1. Ordnung erwartet man die Koexistenz von Phasen. Dies ist auch hier so. Ein typisches Dichteprofil auf der Übergangslinie $A \rightarrow B$ ist in Abb. III.2.10 gezeigt. Hoch- und Niedrigdichtebereich sind durch einen Schock getrennt. Dieser ist frei beweglich

und befindet sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit irgendwo im System. Ein zeitlich gemitteltes Dichteprofil steigt deshalb linear vom Niedrigdichtewert am linken Rand zum Hochdichtewert am rechten Rand an. Eine Momentaufnahme sieht dagegen so aus in wie Abb. III.2.10 dargestellt. Das Dichteprofil selbst ändert sich beim Übergang vom Niedrig- in den Hochdichtebereich (oder umgekehrt) unstetig. Dies ist in Abb. III.2.11 dargestellt. Dort sieht man Dichteprofile auf der Koexistenzlinie, sowie nahe dieser Linie in der Hoch- bzw. Niedrigdichte-Phase.

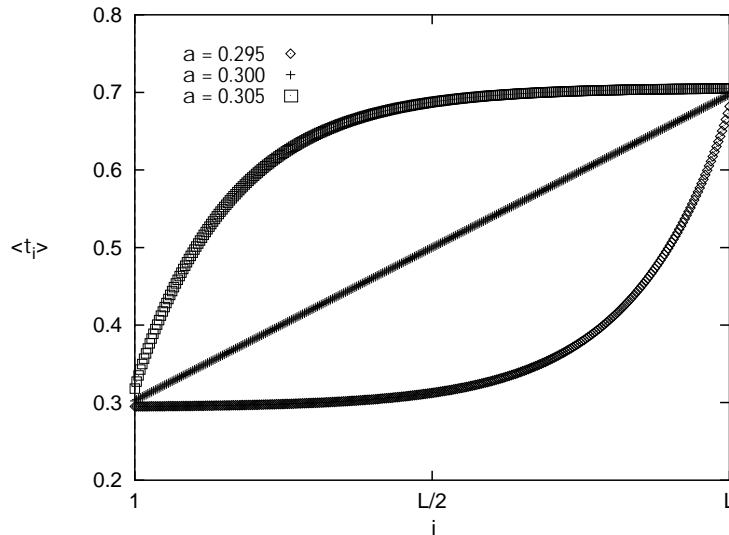


Abbildung III.2.11: Das Dichteprofil ändert sich auf der Übergangslinie $A \rightarrow B$ unstetig. Hierbei ist $\beta = 0.3$ und $\alpha = 0.3$ auf der Übergangslinie, $\alpha = 0.295$ in der Niedrigdichte- und $\alpha = 0.305$ in der Hochdichte-Phase.

Weiterhin gibt es eine besondere Linie im Phasendiagramm, die für parallele Dynamik durch

$$(1 - \alpha)(1 - \beta) = 1 - \bar{\rho} \quad (\text{III.2.30})$$

gegeben ist. Diese viertelkreisförmige Linie ist in Abb. III.2.9 dargestellt. Auf ihr wird das Dichteprofil flach, d.h. $\rho_j = \text{konstant}$. Sie trennt somit die monoton wachsenden von den monoton fallenden Dichteprofilen. Außerdem kann man auf dieser Linie den ASEP relativ einfach exakt lösen. Hier ist nämlich die 2-Cluster-Approximation exakt.

Der stationäre Zustand des ASEP kann allerdings sogar für beliebige Parameterkombinationen exakt bestimmt werden. Dies gelingt mit Hilfe des sog. *Matrixprodukt-Ansatzes*, der ursprünglich für Spinsysteme entwickelt wurde (Klümper, Schadschneider, Zittartz 1991). Mittlerweile hat sich allerdings gezeigt, daß er bei eindimensionalen Nichtgleichgewichtsprozessen als generische Form des stationären Zustandes auftritt.

Beim Matrixprodukt-Ansatz stellt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung im stationären Zustand folgendermaßen dar:

$$P(n_1, \dots, n_L) = \frac{1}{Z_L} \langle W | \prod_{j=1}^L [n_j D + (1 - n_j) E] | V \rangle, \quad (\text{III.2.31})$$

mit der Besetzungszahl $n_j = 0, 1$ von Platz j . Die Vektoren $|V\rangle$ und $|W\rangle$ und die Matrizen E und D sind dabei geeignet zu bestimmen. Gleichung (III.2.31) hat eine einfache Interpretation. Zunächst übersetzt man eine vorgegebene Konfiguration (n_1, \dots, n_L) in ein Produkt von Matrizen, indem man jedes $n = 0$ durch die Matrix E und jedes $n = 1$ durch die Matrix D ersetzt, z.B.

$$011001 \dots \rightarrow EDDEED \dots = ED^2E^2D \dots \quad (\text{III.2.32})$$

Danach hat man dann (durch Multiplikation mit $|V\rangle$ und $|W\rangle$) ein geeignetes Matrixelement zu nehmen. Welches Element, hängt dabei von den Randbedingungen ab²³.

Bisher haben wir die Dynamik des Modells noch gar nicht explizit benutzt. Sie bestimmt nun, wie man die Matrizen und die Vektoren zu wählen hat. Die dynamischen Regeln und die Randbedingungen liefern dann Zusammenhänge zwischen den Matrizen E und D und den Vektoren $|V\rangle$ und $|W\rangle$. Für den ASEP mit zufällig-sequentieller Dynamik ergibt sich folgende Algebra (Derrida, Evans, Hakim, Pasquier 1993):

$$pDE = D + E, \quad (\text{III.2.33})$$

$$\alpha\langle W|E = \langle W|, \quad (\text{III.2.34})$$

$$\beta D|V\rangle = |V\rangle. \quad (\text{III.2.35})$$

Man sucht nun explizite Darstellungen für die Matrizen und Vektoren, die die Bedingungen (III.2.33)–(III.2.35) erfüllen. Diese Darstellungen sind i.a. unendlich-dimensional. Lediglich auf der Linie

$$\alpha + \beta = \bar{p} \quad (\text{III.2.36})$$

existieren eindimensionale Darstellungen, d.h. die Matrizen E und D sind in diesem Falle reelle Zahlen. In diesem Fall geht der Matrixprodukt-Ansatz (III.2.31) in die Mean-Field-Theorie über. Die Linie (III.2.36) entspricht der Linie (III.2.30) im parallelen Fall, d.h. auch hier sind die Dichteprofile flach.

1998 wurde von Kolomeisky, Schütz, Kolomeisky und Straley eine phänomenologische Theorie vorgeschlagen, mit der sich das Phasendiagramm des ASEP (oder anderer Systeme mit offenen Randbedingungen) aus dem Fundamentaldiagramm des entsprechenden periodischen Systems ableiten lassen²⁴. Dabei werden die Randbedingungen etwas allgemeiner nicht durch die Wahrscheinlichkeiten α und β charakterisiert, sondern durch die Dichten ρ_L und ρ_R , die sich in der Nähe des linken bzw. rechten Randes einstellen²⁵. Idealerweise stellt man sich Randbedingungen vor, die sich durch Reservoirs der entsprechenden Dichten beschreiben lassen.

Popkov und Schütz (1999) haben argumentiert, daß sich das Phasendiagramm durch ein *Extremalprinzip* aus dem Fundamentaldiagramm $J(\rho)$ des periodischen Systems ableiten läßt. Demnach gilt für den Strom J im offenen System

²³Bei periodischen Randbedingungen ist Gleichung (III.2.31) zu ersetzen durch $P(n_1, \dots, n_L) = \frac{1}{Z_L} \text{Spur} \prod_{j=1}^L [n_j D + (1 - n_j) E]$.

²⁴Eine gute Darstellung findet man in G. Schütz, Physik. Blätter 56(7/8), 69 (2000).

²⁵Die genaue Definition kann manchmal etwas schwierig sein, z.B. wenn das Dichteprofil in der Nähe des Randes kleine Oszillationen zeigt.

$$J = \begin{cases} \max_{\rho \in [\rho_R, \rho_L]} J(\rho) & \text{für } \rho_L > \rho_R \\ \min_{\rho \in [\rho_L, \rho_R]} J(\rho) & \text{für } \rho_L < \rho_R \end{cases} \quad (\text{III.2.37})$$

Man beachte, daß hier für monoton fallende Profile das Maximum zu wählen ist, für monoton wachsende jedoch das Minimum. Der Strom hängt also vom Vorzeichen des Gradienten des Dichteprofiles ab. Für negative Gradienten wird er maximiert, für positive Gradienten minimiert. Da sich alle Zustände des offenen Systems auf solche des periodischen zurückführen lassen, sagt man auch, daß die offenen Randbedingungen keinen neuen Zustand erzeugen, sondern lediglich einen des periodischen Systems auswählen.

Wir bezeichnen im folgenden, die Dichte am Maximum des Fundamentaldiagramms $J(\rho)$ mit ρ^* , d.h. $J(\rho^*) = \max_{\rho} J(\rho)$. Damit ergeben sich folgende Charakterisierungen der Phasen des ASEP mit Hilfe des Extremalprinzips (III.2.37):

- **Maximalstromphase:** $\rho_L > \rho^* > \rho_R$
Da $\rho_L > \rho_R$ hat man das Maximum in (III.2.37) zu wählen. Ist die obige Ungleichung erfüllt, so liegt ρ^* im Intervall $[\rho_L, \rho_R]$ und deshalb ist $J = J(\rho^*)$. Außerdem ist die Dichte in der Mitte des Systems gerade ρ^* .
- **Niedrigdichtephase:** $1 - \rho_R < \rho_L < \rho^*$
In diesem Fall ist $J(\rho_L) < J(\rho_R)$ und die Dichte im Systeminneren $\rho_{\text{bulk}} = \rho_L$.
- **Hochdichtephase:** $\rho_L < 1 - \rho_R < \rho^*$
In diesem Fall ist $J(\rho_L) > J(\rho_R)$ und die Dichte im Systeminneren $\rho_{\text{bulk}} = 1 - \rho_R$.
- **Koexistenzlinie (Übergang $A \rightarrow B$)**
Hier ist $J(\rho_L) = J(\rho_R)$ mit $\rho_L < \rho^* < \rho_R$

Bei der Begründung des Extremalprinzips spielen zwei Geschwindigkeiten eine Rolle, die sich beide aus dem Fundamentaldiagramm bestimmen lassen (siehe dazu auch Kapitel II.1.1). Diese Geschwindigkeiten werden in Abb. III.2.12 veranschaulicht.

1. Schockgeschwindigkeit:

Die Schockgeschwindigkeit v_s haben wir schon mehrfach diskutiert. Trennt der Schock zwei Bereiche der Dichten ρ_+ und ρ_- , so ist

$$v_s = \frac{J_+ - J_-}{\rho_+ - \rho_-}. \quad (\text{III.2.38})$$

Das Vorzeichen von v_s bestimmt beim offenen System, welche Dichte gewinnt. Ist $v_s > 0$, so bewegt sich der Schock nach rechts, bis er am rechten Rand verschwindet. Das System hat dann die Dichte ρ_- . Ist $v_s < 0$, so verschwindet der Schock am linken Rand und ρ_+ gewinnt. Das Verhalten der Schockgeschwindigkeit steuert dabei insbesondere den Phasenübergang 1. Ordnung im ASEP.

In der phänomenologischen Theorie von randinduzierten Phasenübergängen unterscheidet man zwei Arten von Schocks, die dann auch *Domänenwände* genannt werden: 1) Eine

Domänenwand zwischen Niedrig- und Hochdichtebereichen, die sich schematisch durch 00001111 kennzeichnen läßt²⁶; 2) einer Wand zwischen Maximalstrom- und Hochdichtebereich, die die Struktur $mmmm1111$ hat, wobei m für einen Bereich maximalen Stroms stehen soll, d.h. $m \approx 01$.

2. Kollektive Geschwindigkeit:

Die kollektive Geschwindigkeit v_c erhält man aus der Ableitung des Fundamentaldiagramms:

$$v_c = \frac{\partial J}{\partial \rho}. \quad (\text{III.2.39})$$

Sie beschreibt die Ausbreitung einer kleinen Störung, die im Laufe der Zeit immer breiter und flacher wird (siehe Abb. III.2.12).

Die kollektive Geschwindigkeit steuert die Phasenübergänge 2. Ordnung im ASEP. Ist $v_c < 0$, so wandert eine kleine Störung, die z.B. durch eine Fluktuation beim Einfüttern erzeugt worden sein kann, zurück zum Rand und behindert dort das weitere Einfüttern von Teilchen. Man spricht auch von einer *Überfütterung*. Dies führt zu einer Stabilisierung der Maximalstrom-Phase, wenn v_c das Vorzeichen wechselt und negativ wird.

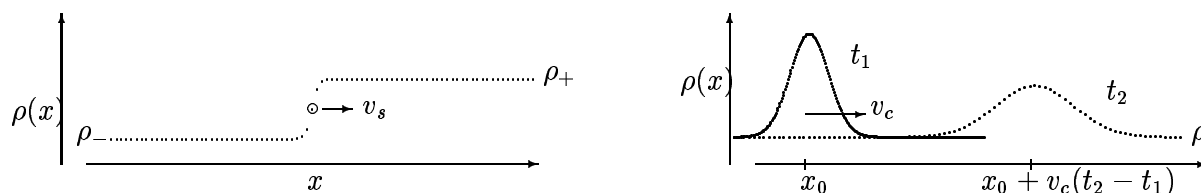


Abbildung III.2.12: Illustration der Schockgeschwindigkeit (links) und der kollektiven Geschwindigkeit (rechts).

III.3 Verallgemeinerungen des NaSch-Modells

Das Nagel-Schreckenberg-Modell ist nicht in der Lage, die Existenz metastabiler Hochflußzustände oder synchronisierten Verkehrs zu erklären. Daher sind Verallgemeinerungen notwendig. Die erweiterten Modelle sollen dabei aber immer noch so einfach wie möglich bleiben.

III.3.1 VDR-Modell

Wie wir schon gesehen haben, ist das Auftreten von metastabilen Zuständen und Hysterese eng mit einem verminderten Stauausfluß $J_{\text{out}} < J_{\text{max}}$ verbunden (siehe Kap. I.2.3 und II.4.4). Mit

²⁶0 und 1 sollen dabei Besetzungszahlen sein.

Hilfe einer sogenannten *Slow-to-Start-Regel* läßt sich dies in Modellen implementieren. Slow-to-Start-Regel gibt es in unterschiedlichen Varianten. Gemein ist ihnen, daß sie zu einem verzögerten Anfahren stehender Autos führen.

Die einfachste Version einer Slow-to-Start-Regel für das NaSch-Modell ist die sog. *Velocity-Dependent-Randomization (VDR)*. Im Gegensatz zum NaSch-Modell ist p nicht mehr konstant, sondern hängt von der Geschwindigkeit v des Fahrzeugs im vorigen Zeitschritt ab: $p = p(v)$. Eine Slow-to-Start-Regel läßt sich dann folgendermaßen definieren:

$$p(v) = \begin{cases} p_0 & \text{falls } v = 0, \\ p & \text{falls } v > 0, \end{cases} \quad (\text{III.3.1})$$

wobei $p_0 > p$ gelten soll²⁷. Die Regeln des NaSch-Modells sind dann um einen Schritt R0 zu ergänzen, der vor den Regeln R1–R4 auszuführen ist:

- *Schritt 0: Bestimmung von $p(v)$*

Für jedes Fahrzeug wird der Trödelparameter $p_n = p(v_n(t))$ bestimmt.

Ein stehendes Fahrzeug trödelt also stärker als ein fahrendes. Diese einfache Modifikation des NaSch-Modells ist tatsächlich ausreichend, um das Verhalten des Modells gravierend zu ändern. Statt der vielen kleinen Staus (vgl. Abb. III.1.3) beobachtet man nun im gestauten Bereich einen phasenseparierten Zustand.

Neben dem VDR-Modell wurden weitere Slow-to-Start-Regeln für das NaSch-Modell vorgeschlagen. In dem Modell von Benjamin-Johnson-Hui (BJH), trödeln Autos, die auf Grund des Vordermannes abbremsen mußten, im nächsten Zeitschritt stärker. Dies ist also eine Art zeitliche Slow-to-Start-Regel. Im Takayasu-Takayasu-Modell (T²-Modell) hängt der Trödelparameter von stehenden Fahrzeugen von der Lücke vor ihnen ab. Dies ist also eine räumliche Slow-to-Start-Regel. Beide Modelle wurden allerdings nicht mit der Absicht entwickelt, metastabile Zustände zu erzeugen. Hintergrund war vielmehr der Wunsch, das Fahrzeugverhalten ‘realistischer’ zu beschreiben. Das Verhalten der Modelle ähnelt aber sehr dem des VDR-Modells.

Das Fundamentaldiagramm des VDR-Modells entspricht genau der in Abb. I.2.5 gezeigten schematischen Form. Technisch erzeugt man die beiden Äste im Bereich $\rho_1 < \rho < \rho_2$, indem man die Simulation mit verschiedenen Anfangsbedingungen startet. Beginnt man mit einem homogenen Zustand, in dem die Fahrzeuge möglichst gleichmäßig im System verteilt sind, so erhält man für Dichten $\rho < \rho_2$ den Hochflußast ohne Stau. Man muß allerdings beachten, daß dieser für $\rho_1 < \rho$ nur metastabil ist, d.h. wenn man lange genug simuliert, bricht dieser Zustand irgendwann auf Grund einer Fluktuation zusammen. Die Lebensdauer hängt dabei von der Systemgröße ab und ist i.a. sehr groß. Beginnt man dagegen mit einem großen Stau (Megastau), der aus allen Fahrzeugen besteht, so landet man für Dichten $\rho_1 < \rho$ auf dem gestauten Ast. Für Dichten $\rho < \rho_1$ und $\rho > \rho_2$ führen beide Anfangsbedingungen zum gleichen stationären Zustand.

Im Freiflußast ist der stationäre Zustand homogen. Alle Fahrzeuge fahren im wesentlichen mit ihrer Wunschgeschwindigkeit $v_{\max} - p$. Der zugehörige Fluß ist

$$J_F = \rho(v_{\max} - p). \quad (\text{III.3.2})$$

²⁷Häufig werden wir den Fall $p_0 \ll 1$ betrachten.

Hier verhält sich das VDR-Modell also wie ein NaSch-Modell mit Trödelparame-ter p .

Im gestauten Ast bildet sich ein phasenseparierter Zustand aus, der aus einem großen Stau und einem Freiflußbereich besteht. Für $p \ll 1$ ist der Stau kompakt, d.h. enthält nur wenige ‐Löcher‐²⁸. Im folgenden wollen wir diesen phasenseparierten Zustand quantitativ beschreiben. Die mittlere Wartezeit, bis das erste Auto im Stau anfährt, beträgt

$$T_W = \frac{1}{1 - p_0}, \quad (\text{III.3.3})$$

da das Fahrzeug mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p_0$ losfährt. Wir nehmen nun an, daß nach dem Losfahren sofort die Freiflußgeschwindigkeit $v_F = v_{\max} - p$ erreicht wird. Der mittlere Abstand der Fahrzeuge beträgt dann

$$\Delta x_F = T_W v_F + 1, \quad (\text{III.3.4})$$

wobei die +1 berücksichtigt, daß das nachfolgende Auto frühestens im nächsten Zeitschritt losfahren kann. Der mittlere Abstand hängt gemäß $\Delta x_F = \frac{1}{\rho_F}$ mit der Dichte ρ_F im Freiflußbereich zusammen. Ist N_J die Zahl der Fahrzeuge im Stau und $N_F = N - N_J$ die im Freiflußbereich, so gilt

$$L = N_J + N_F \Delta x_F \quad (\text{III.3.5})$$

und somit

$$N_F = \frac{L - N}{\Delta x_F - 1} = \frac{L - N}{T_W v_F} = (1 - p_0) \frac{L - N}{v_F}. \quad (\text{III.3.6})$$

Hieraus ergibt sich dann mit $J = \rho \bar{v}$ der Fluß, wobei $\bar{v} = \frac{N_F}{N} v_F$ die Durchschnittsgeschwindigkeit der Fahrzeuge ist:

$$J_S = \rho \frac{N_F}{N} v_F = \rho (1 - p_0) \frac{1 - 1}{v_F} = (1 - p_0)(1 - \rho). \quad (\text{III.3.7})$$

Dies entspricht gerade dem Fluß eines NaSch-Modells mit Trödelparame-ter p_0 bei hohen Dichten $\rho \approx 1$. Für die kritische Dichte ρ_1 ergibt sich nun aus der Tatsache, daß die Staulänge dort gerade verschwindet,

$$\rho_1 = \rho_F = \frac{1}{T_W v_F + 1}. \quad (\text{III.3.8})$$

Wie schon erwähnt, hängt die Lebensdauer des Hochflußastes von der Systemgröße ab. Tatsächlich nimmt $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$ mit der Systemgröße ab. Im thermodynamischen Limes überlebt nur der gestaute Ast. Anschaulich kann man sich das folgendermaßen verständlich machen: Staus entstehen durch Geschwindigkeitsschwankungen in relativ dichten Bereichen. Die Wahrscheinlichkeit, einen geeigneten Bereich zu finden, wächst aber mit der Systemgröße.

Es sei hier auch darauf hingewiesen, daß wir es mit einem anderen Instabilitätsmechanismus als bei den hydrodynamischen Modellen zu tun haben. Dort wurde das Verhalten unter einer deterministischen externen Störung betrachtet, hier sind die intrinsischen Fluktuationen für den Zusammenbruch verantwortlich.

²⁸Dies ist einer der Gründe, warum häufig nur der Fall $p \ll 1$ betrachtet wird.

Abschließend wollen wir noch eine interessante Anwendung diskutieren. In der Praxis ist man natürlich daran interessiert, die Hochflußzustände zu stabilisieren, um so den Fluß zu optimieren. So etwas hat man Anfang der 60iger Jahre am Lincoln-Tunnel zwischen Manhattan und New Jersey durchgeführt. Das hohe Verkehrsaufkommen hätte eine weitere Tunnelröhre notwendig gemacht. Stattdessen sind Verkehrsingenieure auf die Idee gekommen, den Zusammenbruch des Hochflußastes durch Erzeugung von Fahrzeugpaketen ('Platoons') zu verhindern. Die einzelnen Pakete sind dabei durch größere Lücken getrennt. Dies führt zu einem Abschneiden der Kettenreaktionen, die typischerweise einen Stau entstehen lassen. Die typische Platoongröße beträgt 10 bis 20 Fahrzeuge. Erzeugt werden sie durch eine Ampel, die am Tunneleingang installiert wurde. Wenn innerhalb von weniger als 1 Minute 22 Fahrzeuge (auf einer Spur) in den Tunnel einfahren, so wird die Ampel für den Rest der Minute auf Rot geschaltet. Diese simple Maßnahme hat zu einer Flußerhöhung von 20% geführt und den Bau einer weiteren Röhre überflüssig gemacht. Die geschilderte Situation läßt sich einfach modellieren. Der Tunnel wirkt nämlich als ein Bottleneck. Abb. III.3.1 zeigt eine schematische Darstellung. In der linken Hälfte haben wir es mit einem VDR-Modell mit Parametern p_0 und p zu tun. Im Tunnel hinter der Ampel sind die Parameter dagegen p_0^t und p^t , wobei $p_0^t > p_0$ und $p^t > p$, da im Tunnel i.a. vorsichtiger gefahren wird. Abb. III.3.2 zeigt das Ergebnis von Computersimulationen für ein solches System. Für

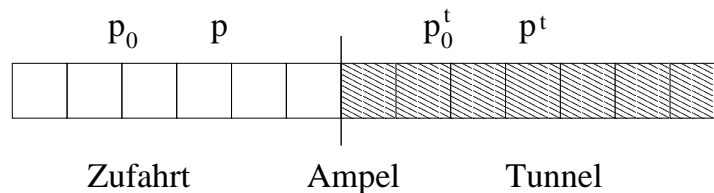


Abbildung III.3.1: Modellierung des Lincoln-Tunnels als Bottleneck.

verschiedene Länge der Rot- und Grünphasen T_r bzw. T_g wurden die sich einstellenden Flüsse bestimmt. Das System ohne Ampel entspricht dem Grenzfall einer unendlich langen Grünphase. Man sieht deutlich, daß die maximalen Flüsse zum Teil um 20% größer sind als für $T_g \rightarrow \infty$. Der Mechanismus hinter dieser deutlichen Verbesserung ist genau der oben beschriebene: Durch die Erzeugung der Platoons wird die Entstehung von Staus verhindert. Der Fluß würde sonst durch den Stauausfluß $J_{\text{out}} < J_{\text{max}}$ beschränkt. Natürlich lassen sich Staus bei hohem Verkehrsaufkommen nicht verhindern. Die Idee ist aber, diese dort entstehen zu lassen, wo sie am wenigsten Schaden anrichten, also nicht im Tunnel. Außerdem gibt es vor dem Tunnel Kassenhäuschen, bei denen man für die Benutzung zu zahlen hat. Dort entstehen sowieso Staus.

III.3.2 Bremslicht-Modell

Das VDR-Modell liefert zwar eine realistischere Beschreibung der Staudynamik als das NaSch-Modell, es ist jedoch nicht in der Lage, synchronisierten Verkehr zu reproduzieren. Hier sind also weitere Modifikationen der Dynamik notwendig.

Bisher wurde bei der Modelldefinition und der Spezifikation der Dynamik vor allem auf die Vermeidung von Unfällen geachtet. Dagegen wurde der Wunsch der Fahrer nach einem gewissen

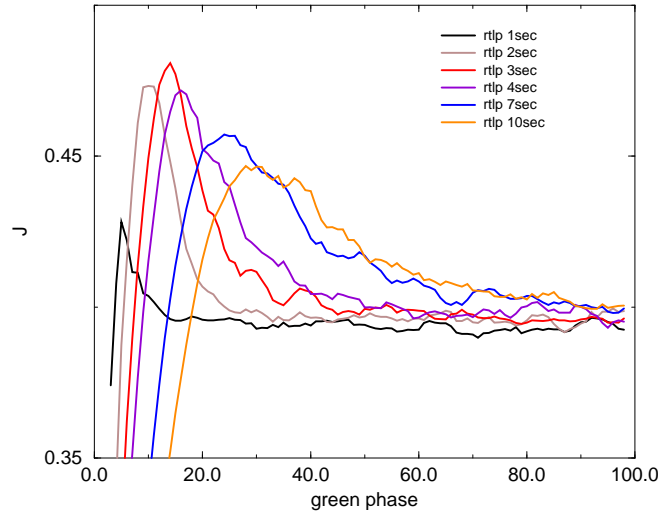


Abbildung III.3.2: Fluß als Funktion der Länge der Grünphase für verschiedene Längen der Rotphase. Die Trödelparameter sind dabei $p_0 = 0.2$, $p = 0.01$, $p_0^t = 0.6$ und $p^t = 0.15$.

Fahrkomfort komplett vernachlässigt. Dies führt im NaSch- und VDR-Modell dazu, daß Fahrzeuge, die sich schnell einem Stauende nähern, auf einmal abrupt abbremsen müssen. Dies ist in der Realität i.a. nicht so. Hier wird idealerweise vorausschauend gefahren und so z.B. die Geschwindigkeit rechtzeitig und gleichmäßig vermindert. Insbesondere versuchen die Fahrer, abrupte Bremsmanöver zu vermeiden, da dies den Fahrkomfort vermindert. Es liegt nun die Vermutung nahe, daß solche Verhaltensweisen für die Entstehung von synchronisiertem Verkehr von Bedeutung sind. Außerdem kann man erwarten, daß durch vorausschauendes Fahren auch an Auffahrten weniger abrupte Bremsmanöver notwendig sind und das dies insgesamt zu einer Reduzierung der Staubildung führt.

Wichtig für vorausschauendes Fahren ist die sog. *Geschwindigkeitsantizipation*, d.h. die erwartete Geschwindigkeit des Vordermannes. Im NaSch-Modell und seinen Varianten ist eine einfache Abschätzung für die Geschwindigkeit des vorausfahrenden Autos im nächsten Zeitschritt durch

$$v_{\text{anti}} = \min(d_{n+1}, v_{n+1}) \quad (\text{III.3.9})$$

gegeben, denn dieses Fahrzeug fährt mindestens so schnell wie im Augenblick, es sei denn, die Lücke d_{n+1} vor ihm ist nicht groß genug.

Eine weitere Art der Antizipation ist die *Bremsantizipation*, die z.B. durch Bremslichter möglich wird. Der Zustand der Bremslichter von Fahrzeug n wird durch die Variable b_n beschrieben:

$$b_n = \begin{cases} 0 & (\text{Bremslichter aus}) \\ 1 & (\text{Bremslichter an}). \end{cases} \quad (\text{III.3.10})$$

Die Einführung von Bremslichter erlaubt z.B. ein vorsichtigeres Heranfahren an Stauenden.

Ein weiterer wichtiger Effekt, der eher mit dem Wunsch nach Fahrkomfort zu tun hat, ist das verzögerte Beschleunigen a) von stehenden Fahrzeuge (Slow-to-Start, wie im VDR-Modell) und b) nach Abbremsvorgängen. Dies führt z.B. dazu, daß Lücken im Verkehr nicht optimal ausgenutzt werden, d.h. es wird mit einer kleineren Geschwindigkeit gefahren, als die Lücke eigentlich erlauben würde.

In Abhängigkeit vom Abstand zum Vordermann sind drei verschiedene Arten von Fahrverhalten zu beobachten:

- Bei großen Lücken zum Vordermann wird mit der Wunschgeschwindigkeit v_{\max} (+Fluktuationen) gefahren.
- Bei mittleren Lücken reagieren die Fahrer auf Geschwindigkeitsänderungen des Vordermanns, z.B. über die Bremslichter.
- Bei kleinen Lücken wird das Fahrverhalten durch den Wunsch zur Unfallvermeidung dominiert.

Eine weitere Modifikation, die zu einer realistischeren Beschreibung notwendig ist, ist die Einführung kleinerer Zellen der Länge 1.5 m (statt 7.5 m). Autos sind dann 5 Zellen lang. Dies erlaubt eine realistischere Modellierung des Beschleunigungsverhaltens ($a \approx 1$ m/s).

Für die Definition der Dynamik sind zwei Zeiten von Bedeutung, nämlich

$$t_h = \frac{d_n(t)}{v_n(t)} \quad \text{und} \quad t_s = \min(v_n(t), h). \quad (\text{III.3.11})$$

t_h ist die Zeit, die benötigt wird, um (bei konstanter Geschwindigkeit) die augenblickliche Position des Vordermanns zu erreichen. h ist dabei ein *Wechselwirkungshorizont*, der der Reichweite der Bremslichter entspricht. Aus psychologischen Untersuchungen weiß man, daß der Wechselwirkungshorizont geschwindigkeitsabhängig ist und eher einem zeitlichen Horizont t_h von etwa 6 bis 11 Sekunden entspricht.

Alle diese Effekte werden im sog. *Bremslichtmodell* (Knospe, Santen, Schadschneider, Schreckenberg 2000) berücksichtigt. Seine Dynamik ist folgendermaßen definiert.

R0 *Bestimmung des Trödelparameters:*

$$p = p(v_n(t), b_{n+1}(t), t_h, t_s) = \begin{cases} p_b & \text{für } b_{n+1} = 1 \text{ und } t_h < t_s \\ p_0 & \text{für } v_n = 0 \\ p_d & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{III.3.12})$$

$$\text{und } b_n(t+1) = 0.$$

R1 *Beschleunigen:*

$$\text{Ist } ((b_{n+1}(t) = 0) \text{ und } (b_n(t) = 0)) \text{ oder } (t_h \geq t_s), \text{ dann } v'_n = \min(v_n(t) + 1, v_{\max}).$$

Variable		Parameter	
x	Position	$\text{gap}_{\text{safety}}$	kontrolliert die Effektivität der Antizipation
v	Geschwindigkeit	v_{max}	Maximalgeschwindigkeit
v_{anti}	antizipierte Geschwindigkeit	p_b	Trödelparameter
d	Lücke	p_0	Slow-to-Start-Trödelparameter
d^{eff}	effektive Lücke	p_d	Trödelparameter
b	Zustand des Bremslichts	t_h	zeitlicher Abstand
p	Trödelparameter	t_s	zeitlicher Horizont

Tabelle III.1: Zusammenfassung der Variablen (links) und Parameter (rechts) des Bremslichtmodells.

R2 Bremsen:

$$(i) : v_n'' = \min(d_n^{(\text{eff})}, v_n')$$

$$(ii) : \text{Ist } (v_n'' < v_n(t)), \text{ dann } b_n(t+1) = 1$$

Dabei ist $d_n^{(\text{eff})} = d_n + \max(v_{\text{anti}} - \text{gap}_{\text{safety}}, 0)$ eine effektive Lücke mit v_{anti} gemäß (III.3.9) und $\text{gap}_{\text{safety}} \geq 1$, damit Unfälle vermieden werden.

R3 Trödeln:

$$\text{Mit Wahrscheinlichkeit } p: v_n(t+1) = \max(v_n(t+1) - 1, 0)$$

$$\text{Wird getrödelt und ist dabei } p = p_b, \text{ dann } b_n(t+1) = 1.$$

R4 Fahren:

$$x_n(t+1) = x_n(t) + v_n(t+1).$$

Diese Regeln haben eine einfache Interpretation. In R0 wird der Trödelparameter bestimmt. Für stehende Fahrzeuge ist er p_0 (Slow-to-Start-Regel) und bestimmt die Staugeschwindigkeit. Leuchtet das Bremslicht des Vordermannes ($b_{n+1} = 1$) und ist dieser innerhalb des Horizontes, so ist $p = p_b$. In allen anderen Fällen ist $p = p_d$. Außerdem wird in dieser Regel das Bremslicht ausgeschaltet. Regel R1 bewirkt, daß ein Auto nicht beschleunigt, falls im vorigen Zeitschritt das eigene Bremslicht an war oder das des Vordermannes, falls sich dieser innerhalb des Wechselwirkungshorizontes befindet. In der Regel R2 wird unter Berücksichtigung der Geschwindigkeitsantizipation, gegeben durch eine effektive Lücke, abgebremst, d.h. die mögliche Bewegung des Vordermannes wird berücksichtigt. Im Schritt R3 wird das Bremslicht eingeschaltet, wenn auf Grund des Bremslichtes des Vordermannes gebremst wurde. Dies ist wichtig, denn es führt zu einer Fortpflanzung des Bremslichtes. In der Tabelle III.1 sind noch einmal die Parameter zusammengefaßt.

Das Modell zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit mikroskopischen Meßdaten (Einzelfahrzeugdaten). Geeignete Parameterwerte sind dabei $v_{\text{max}} = 20$, $p_d = 0.1$, $p_b = 0.94$, $p_0 = 0.5$, $h = 6$ und $\text{gap}_{\text{safety}} = 7$. Bei einer Zellenlänge von 1.5 m entspricht ein Zeitschritt weiterhin 1 sec realer Zeit. Das Bremslichtmodell besteht auch einen kritischen Test, nämlich die Koexistenz von Wide Jams mit Freifluß und synchronisiertem Verkehr. Speziell reproduziert es

das “Tunneln” eines Staus durch einen synchronisierten Bereich, bei dem der Stau den Bereich synchronisierten Verkehrs ungestört durchwandert.

III.4 Mehrspurverkehr

Bisher haben wir nur Einspurverkehr betrachtet. Für die Praxis ist aber Mehrspurverkehr wichtig, gerade zur Beschreibung von Autobahnen. Wir müssen daher die dynamischen Regeln, durch die wir bisher unsere Modelle definiert haben, um *Wechselregeln* erweitern. Wir wollen uns dabei auf *Zweispurverkehr* konzentrieren.

Grundsätzlich unterscheidet man zwei Typen von Wechselregeln:

- (i) : *symmetrische Wechselregeln*: Hier sind beide Spuren äquivalent. Dies entspricht z.B. der Situation in den USA.
- (ii) : *asymmetrische Wechselregeln*: Hier dient die linke Spur nur als Überholspur, wie man es z.B. aus Deutschland kennt. Es gibt daher unterschiedliche Regeln für das Wechseln von links nach rechts und rechts nach links.

Der Gesamtsatz nach Implementierung der Wechselregeln hat dann folgende Struktur:

- 1) Spurwechselregeln
- 2) Einspurdynamik (z.B. NaSch-Modell).

Die Spurwechselregeln bestehen dabei i.a. aus zwei Elementen:

- a) **Wechselanreiz**: Die Situation auf der eigenen Spur ist ungünstig, es wird daher die andere Spur betrachtet: Ist die Situation dort günstiger? Wenn ja, so bedeutet dies einen Wechselwunsch.
- b) **Sicherheitsregeln**: Der Spurwechsel muß unfallfrei möglich sein. An dieser Stelle kommen dann auch Wechselwirkungen mit nachfolgenden Fahrzeugen ins Spiel.

Ein typischer Regelsatz für den Spurwechselanteil hat die von Rickert, Nagel, Schreckenberg und Latour 1996 vorgeschlagene Struktur:

W1: 1. Wechselanreiz: $d < l$

W2: 2. Wechselanreiz: $d^{(a)} > l_a$

W3: Wechselsicherheit: $d^{(\text{rück},a)} > l_a^{(\text{rück})}$

W4: Wenn W1–W3 erfüllt sind, dann wird mit der Wahrscheinlichkeit p_w die Spur tatsächlich gewechselt.

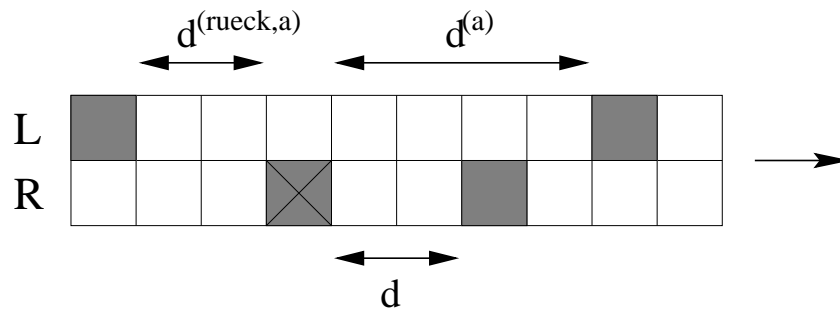


Abbildung III.4.1: Veranschaulichung der Größen, die in einem typischen Spurwechselregelsatz auftreten. Die schattierten Felder sind durch Autos besetzt, das betrachtete Fahrzeug ist durch ein Kreuz gekennzeichnet.

Die Parameter sind dabei in Abb. III.4.1 veranschaulicht. Die meisten untersuchten Regeln haben diese Struktur und unterscheiden sich nur in der Wahl der Parameter l , l_a und $l_a^{(\text{rück})}$. Eine typische Wahl ist

$$l = l_a = \min(v + 1, v_{\max}) \quad \text{und} \quad l_a^{(\text{rück})} = v_{\max}. \quad (\text{III.4.1})$$

Auf Grund der Regel W4 ist auch der Spurwechsel stochastisch. Dies dient u.a. zur Verringerung von sogenannten *Ping-Pong-Spurwechseln*, bei denen die Fahrzeuge die Spur in mehreren aufeinanderfolgenden Zeitschritten wechseln.

Erstaunlicherweise ist es relativ schwierig, mit den oben erläuterten Regeln realistisches Verhalten zu erzielen. Betrachtet man z.B. verschiedene Fahrzeugtypen (PKW und LKW mit unterschiedlichen v_{\max}), so tritt ein überraschendes Problem auf. Eine geringe Anzahl von langsamen Fahrzeugen kann nämlich den Fluß des gesamten Systems bestimmen. Dies passiert selbst dann, wenn die langsamen Fahrzeuge nicht überholen dürfen! Abb. III.4.2 zeigt Ergebnisse für den extremen Fall, daß es lediglich ein langsames Fahrzeug im System gibt. Der Grund für dieses ungewöhnliche Verhalten ist relativ leicht zu verstehen. Auf der rechten Spur stauen sich die Autos hinter dem langsamen Fahrzeug. Dies führt auf Grund von Spurwechseln auch zu einer erhöhten Dichte auf der linken Spur. Es entsteht ein Cluster von Fahrzeugen, die versuchen, das langsame Auto zu überholen. Weitere Spurwechsel in diesen Cluster hinein führen schließlich zu einem Stau auch auf der linken Spur, d.h. man hat dann zwei parallele Staus.

Etwas Ähnliches passiert bei der sogenannten *Pfropfenbildung* beim Überholen eines langsamen Fahrzeugs durch ein anderes. Der Grund ist der große Platzbedarf auf der Überholspur, der für einen erfolgreichen Spurwechsel gemäß der hier vorgestellten Regeln notwendig ist (siehe Abb. III.4.3). Ist nur einer der Plätze, die in Abb. III.4.3 schraffiert sind, besetzt, so ist ein Spurwechsel nicht möglich. Insbesondere wenn sich in diesem Bereich ein langsames Fahrzeug befindet, so wird der Spurwechsel für lange Zeit unmöglich sein. Die beiden Fahrzeuge wirken dann wie ein Pfropfen, denn sie behindern alle nachfolgenden Fahrzeuge. Eine Lösung dieses Problems wird durch die Einführung von Antizipation (ähnlich wie im Bremslichtmodell) möglich.

Bei asymmetrischen Regeln tritt ein interessantes Phänomen auf, das auch empirisch beobachtet werden kann, die sog. *Dichteinversion* (*lane inversion*). Bei kleinen Dichten befinden sich auf

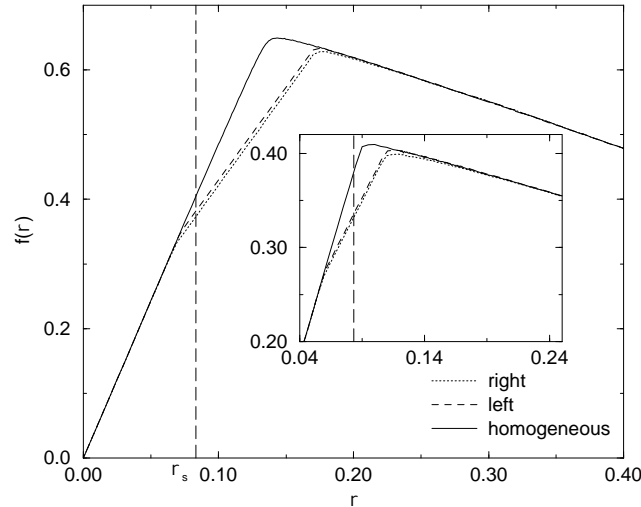


Abbildung III.4.2: Fundamentaldiagramm eines zweispurigen Systems mit einem langsamen Fahrzeug für $p = 0.125$ bzw. $p = 0.4$ (kleine Abb.). Die durchgezogene Linie entspricht dem homogenen System (nur schnelle Autos), die gestrichelten Linien den beiden Spuren im inhomogenen Fall mit einem langsamen Fahrzeug. Die Dichte ρ_s ist in guter Näherung durch $\frac{1}{2}\rho_c$ (vgl. (III.1.4)) gegeben.

Grund der asymmetrischen Regeln mehr Fahrzeuge auf der rechten Spur. Dies ändert sich aber bei größeren Dichten: Obwohl die linke Spur eigentlich nur zum Überholen gedacht ist, befinden sich dort dann mehr Fahrzeuge als auf der rechten Spur (siehe Abb. III.4.4). Diese Dichteinversion entsteht durch das Zusammenspiel zweier gesetzlicher Bestimmungen, nämlich 1) dem Rechtsfahrgebot und 2) dem Verbot des Rechtsüberholens. Nur beide Bestimmungen zusammen führen zur beobachteten Dichteinversion bei großen Dichten.

III.5 Stadtverkehr

Bisher haben wir nur eindimensionalen Verkehr (bis auf Spurwechsel) betrachtet. Im Stadtverkehr ist die Fahrzeugbewegung dagegen zweidimensional. Dies bedeutet z.B., daß sich Fahrzeugströme kreuzen können. Typisch für Stadtverkehr ist, daß neben der Wechselwirkung der Fahrzeuge untereinander auch die Wechselwirkung mit Ampeln wichtig wird. Hierzu sind verschiedene Modelle entwickelt worden, die das entstehende Verhalten auf einfache Weise nachbilden wollen.

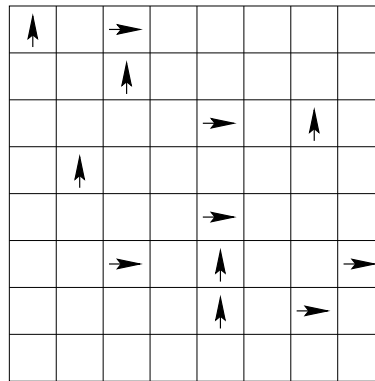


Abbildung III.5.1: Zur Definition des BML-Modells. Die Fahrzeuge \uparrow fahren von Süden nach Norden, die Fahrzeuge \rightarrow von Westen nach Osten.

wird dabei von Ampeln gesteuert. In den ungeraden Zeitschritten ($t = 1, 3, \dots$) können sich nur die \rightarrow -Fahrzeuge bewegen, in den geraden ($t = 2, 4, \dots$) nur die \uparrow -Fahrzeuge. Man beachte, daß die Dynamik in dieser Modellvariante vollkommen deterministisch ist. Allerdings wählt man zufällig Anfangsbedingungen, über die dann zu mitteln ist. Auf diese Weise enthält die Dynamik eine stochastische Komponente.

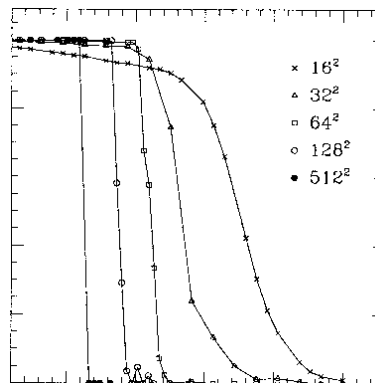


Abbildung III.5.2: Mittlere Geschwindigkeit im BML-Modell als Funktion der Gesamtfahrzeugdichte. Es wurde über die zufälligen Anfangsbedingungen gemittelt.

Abb. III.5.2 zeigt die mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen bestimmte Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} der Fahrzeuge im stationären Zustand als Funktion der Dichte $\rho = N/L = (N_{\uparrow} + N_{\rightarrow})/L$. Man sieht, daß es bei einer kritischen Dichte²⁹ ρ_c die Durchschnittsgeschwindigkeit verschwindet. Es gibt also einen Phasenübergang in eine vollständig gestaute Phase, in der sich kein Fahrzeug mehr bewegt. Der Grund ist ein sogenannter *Gridlock*, bei dem sich die Fahrzeuge gegenseitig behindern. Ein Beispielkonfiguration ist in Abb. III.5.3 gezeigt. Typisch ist dabei die diagonale Struktur der Gridlock-Konfiguration. Es besteht im übrigen eine gewisse Verwandtschaft mit Perkolationsclustern.

²⁹Die nicht mit der kritischen Dichte $\rho_c = \frac{1}{v_{\max} + 1}$ des NaSch-Modells übereinstimmt!

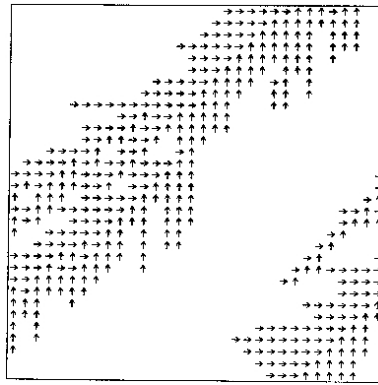


Abbildung III.5.3: Ein Gridlock im BML-Modell. Kein Fahrzeug kann sich mehr bewegen, da sich die Autos gegenseitig behindern.

Die kritische Dichte ρ_c ist nicht exakt bekannt. Eine rigorose Abschätzung liefert aber $\rho_c < \frac{1}{2}$ als obere Schranke. Eine Mean-Field-Analyse ergibt

$$\rho_c^{(MF)} = 6 - \sqrt{32} \approx 0.343. \quad (\text{III.5.1})$$

Es gibt Autoren, die vermuten, daß ρ_c im thermodynamischen Limes $L \rightarrow \infty$ (mit $\rho = N/L$ konstant) sogar verschwindet, d.h. $\rho_c = 0$. Genauer soll ρ_c mit der Systemgröße L wie

$$\rho_c(L) \sim L^{-0.14} \quad (\text{III.5.2})$$

verschwinden. Dies würde bedeuten, daß bei jeder noch so kleinen endlichen Dichte im unendlichen System keine Bewegung im stationären Zustand mehr möglich ist. Jede Anfangsbedingung führt dann in eine Gridlock-Konfiguration. Diese Ergebnisse sind aber noch umstritten.

Der Phasenübergang selbst ist wahrscheinlich von 1. Ordnung, da sich die Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} bei ρ_c unstetig ändert. Allerdings ist dies auch noch nicht endgültig geklärt.

Es sind zahlreiche Verallgemeinerungen des BML-Modells vorgeschlagen worden. Eine naheliegende Verallgemeinerung betrifft die Dynamik, die man wie im NaSch-Modell stochastisch machen kann ($p \neq 0$). Dies hat allerdings relativ geringe Auswirkungen.

In einer anderen naheliegenden Modellvariante betrachtet man vier verschiedene Fahrzeugtypen \rightarrow , \leftarrow , \uparrow und \downarrow . Es sind dann Bewegungen in alle vier Richtungen möglich. Dieses Modell ist allerdings deshalb eher uninteressant, weil hier die Möglichkeit lokaler Gridlocks besteht. Eine typische Konfiguration, bei der sich offensichtlich kein Fahrzeug mehr bewegen kann, ist in Abb. III.5.4 dargestellt. Solche Gridlocks entstehen sehr schnell und dominieren dann die Dynamik, indem sie die anderen Fahrzeuge behindern.

Natürlich sind auch Varianten vorgeschlagen worden, bei denen die Fahrzeuge abbiegen können. Dann sind natürlich N_{\uparrow} und N_{\rightarrow} nicht mehr konstant. Speziell in dem von Cuesta et al. 1993

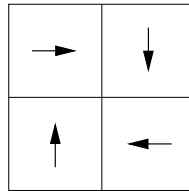


Abbildung III.5.4: Ein typischer lokaler Gridlock im BML-Modell mit vier Fahrtrichtungen.

vorgeschlagenen Modell, werden zwei Fahrzeugtypen unterschieden:

$$\text{Typ A ist } \begin{cases} \rightarrow & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \gamma \\ \uparrow & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \gamma \end{cases} \quad (\text{III.5.3})$$

$$\text{Typ B ist } \begin{cases} \rightarrow & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \gamma \\ \uparrow & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \gamma. \end{cases} \quad (\text{III.5.4})$$

An jeder Kreuzung wird die Fahrtrichtung gemäß der Wahrscheinlichkeiten neu gewählt. Für $\gamma = 0$ oder $\gamma = 1$ reduziert sich das Modell auf das BML-Modell. Sein Verhalten ähnelt auch dem BML-Modell, denn es tritt ein Phasenübergang 1. Ordnung in eine gestaute Phase auf. Typisch für die gestauten Konfigurationen ist eine streifenartige Struktur (siehe Abb. III.5.5). Im Gegensatz zum BML-Modell kommt der Verkehr aber nicht vollständig zum Erliegen, denn die Fahrzeuge an der Oberfläche der Streifen können sich (nach einem geeigneten Richtungswechsel) noch bewegen.

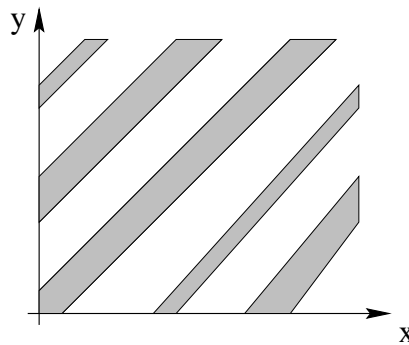


Abbildung III.5.5: Typischer Streifenstruktur in der gestauten Phase des BML-Modells mit Richtungswechsel. Die Fahrzeuge an der Oberfläche der Streifen können sich noch bewegen.

Zahlreiche weitere Verallgemeinerungen sind vorgeschlagen worden, auf die wir aber nicht detailliert eingehen können:

- unsymmetrische Fahrzeugverteilungen $N_{\rightarrow} \neq N_{\uparrow}$
- höhere Geschwindigkeit v_{\max} oder Trödelparameter $p \neq 0$

- “Brücken”, d.h. Kreuzungen, auf denen zwei Fahrzeuge mit unterschiedlicher Fahrtrichtung stehen können
- Effekte vielbefahrener Straßen, d.h. die Autos werden nicht gleichmäßig zufällig auf die Straßen verteilt, sondern einzelne Spalten oder Zeilen haben eine höhere Dichte als der Rest.

III.5.2 Chowdhury-Schadschneider-Modell

Die Dynamik in realem Stadtverkehr wird durch das Wechselspiel von zwei Zeitskalen bestimmt, nämlich der Fahrtzeit von einer Ampel zur nächsten und der Länge der Ampelphasen (Rot und Grün). Beide Skalen sind im BML-Modell festgelegt. Man kann daher nicht so etwas wie Grüne Wellen untersuchen. In der Dynamik wird es z.B. darauf ankommen, wie groß die Zeit, die man bis zur nächsten Ampel benötigt, im Vergleich zur Länge der Grünphase ist. Chowdhury und Schadschneider haben deshalb ein andere Stadtverkehrsmodell entwickelt, das Elemente des BML-Modells mit solchen des NaSch-Modells kombiniert.

Im CS-Modell haben die Kreuzungen (Ampeln) den Abstand D , d.h. zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kreuzungen befinden sich $D - 1$ Zellen (Abb. III.5.6). Wir nehmen dabei an, daß es jeweils N_s Straßen von West nach Ost und N_s Straßen von Süden nach Norden gibt. Insgesamt existieren also $N_s \times N_s$ Kreuzungen und jede Straße hat die Länge $L = N_s D$. Außerdem ist die Länge T der Rot-/Grünphase variabel, während im BML-Modell immer $T = 1$ ist. Wie

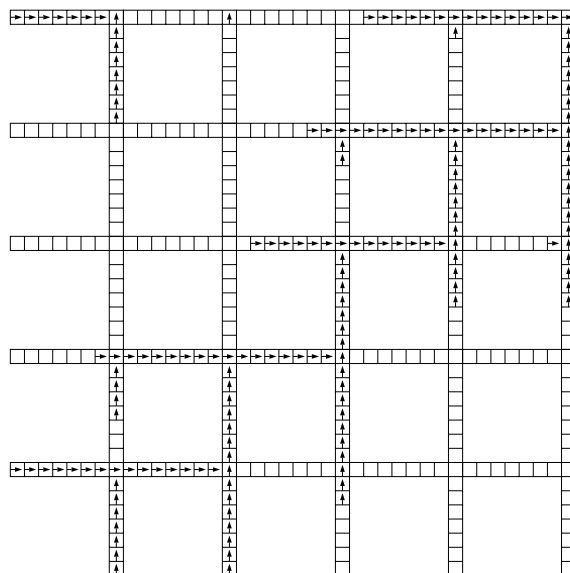


Abbildung III.5.6: Struktur des Stadtverkehrsmodells von Chowdhury und Schadschneider. In dem Beispiel ist $D = 8$. Die gezeigte Konfiguration ist ein Beispiel für einen Gridlock.

im BML-Modell gibt es in der einfachsten Variante zwei Fahrzeugtypen, nämlich \uparrow und \rightarrow . Deren Dynamik hat zwei Komponenten, nämlich die Wechselwirkung der Fahrzeuge untereinander und die Wechselwirkung mit den Ampeln. Erstere wird durch das NaSch-Modell beschrieben,

letztere orientiert sich eher am BML-Modell. Die Ampeldynamik sei derart, daß die Ampeln für T Zeitschritte Grün für die \uparrow -Fahrzeuge und Rot für die \rightarrow -Autos sind und dann in den nächsten T Zeitschritten genau umgekehrt. Die Gesamtlänge einer Signalperiode beträgt daher $2T$ Zeitschritte. Außerdem wollen wir zunächst annehmen, daß alle Ampeln gleichzeitig umschalten. Im Detail wird die Dynamik durch folgenden Regelsatz definiert. Die zugehörigen Größen sind in Abb. III.5.7 definiert. d_n ist wie immer die Lücke zum nächsten Fahrzeug und s_n der Abstand zur nächsten Ampel.

R1: Beschleunigen:

$$v_n \rightarrow \min(v_n + 1, v_{\max})$$

R2: Bremsen durch Autos oder Ampeln:

1. Fall: Die Ampel ist rot:

$$v_n \rightarrow \min(v_n, d_n, s_n)$$

2. Fall: Die Ampel ist grün:

a) Die Ampel wird im nächsten Zeitschritt rot:

$$v_n \rightarrow \min(v_n, d_n, s_n)$$

b) Die Ampel wird nicht rot:

$$v_n \rightarrow \min(v_n, d_n)$$

R3: Trödeln:

$$\text{Mit Wahrscheinlichkeit } p: v_n \xrightarrow{p} \min(v_n - 1, 0).$$

R4: Fahren:

$$x_n \rightarrow x_n + v_n.$$

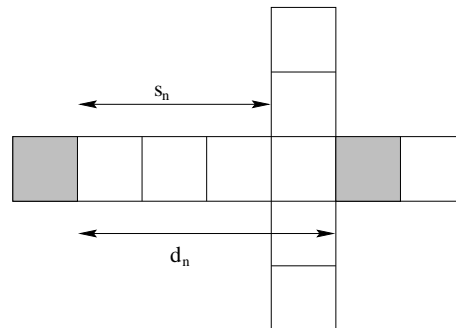


Abbildung III.5.7: Zur Definition der im CS-Modells auftretenden Größen: d_n ist die Lücke zum nächsten Fahrzeug, s_n zur nächsten Ampel. Die schraffierten Zellen sind dabei besetzt.

Bis auf die Regel R2 entspricht dies dem NaSch-Modell. In R2 kommt die Wechselwirkung mit den Ampeln ins Spiel. Bei einer roten Ampel muß gewährleistet sein, daß das Auto vor der Ampel stehen bleibt. Die Geschwindigkeit v_n darf deshalb nie größer als der Abstand s_n zur nächsten Ampel sein. Anders als im BML-Modell dürfen die Autos aber auch dann fahren, wenn

die Ampel rot ist. Bei einer grünen Ampel wird eine Art Gelbphase simuliert. Wird die Ampel im nächsten Schritt rot, so fahren die Autos nicht in die Kreuzung hinein. Von dieser Regel existieren aber verschiedene Varianten. Z.B. kann man das Einfahren in die Kreuzung nur dann erlauben, wenn dahinter Platz ist damit gewährleistet wird, daß die Kreuzung im nächsten Schritt geräumt werden kann. Wird die Ampel nicht rot, so wird im Schritt R2 genau wie im NaSch-Modell nur auf den Abstand zum nächsten Fahrzeug geachtet.

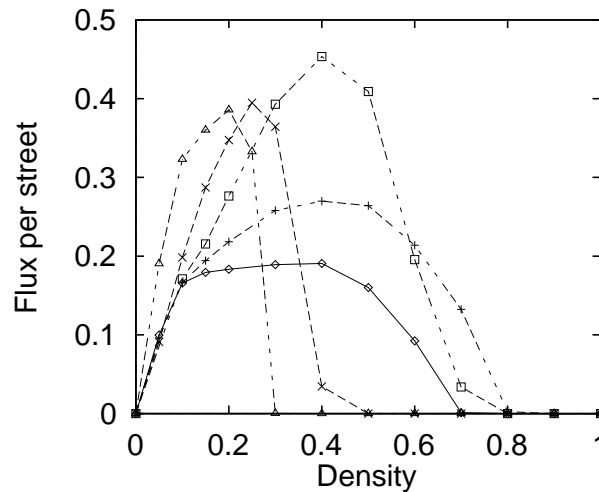


Abbildung III.5.8: Fundamentaldiagramm des CS-Modells für verschiedene Ampelphasen T . Die Symbole \diamond , $+$, \square , \times und \triangle gehören zu den Werten $T = 100, 50, 20, 10, 4$. Die anderen Parameter sind $v_{\max} = 5$, $p = 0.5$, $L = 100$ und $D = 20$.

Die vorgestellte Variante des CS-Modells ist so konstruiert, daß es einen Phasenübergang ähnlich dem im BML-Modell gibt. Für große Dichten kommt es zu einem Gridlock, siehe Abb. III.5.6. Abb. III.5.8 zeigt das Fundamentaldiagramm des CS-Modells für verschiedene Längen T der Ampelphasen. Wie man sieht, existiert für alle T eine kritische Dichte ρ_c oberhalb der der Fluß verschwindet. Diese Dichte hängt allerdings sehr stark von der Größe des Systems ab. Fixiert man den Abstand D der Ampeln, so nimmt ρ_c mit zunehmender Zahl N_s der Straßen deutlich ab. Im thermodynamischen Limes liegt ρ_c im Bereich von $0.1 \leq \rho_c \leq 0.25$, abhängig von den anderen Modellparametern. Abb. III.5.9 zeigt den Geschwindigkeitsverlauf während einer Ampelperiode. Für große Werte von T geht die Geschwindigkeit während der Rotphase bis auf Null zurück, d.h. alle Fahrzeuge kommen vor einer roten Ampel zum stehen. Bei kurzen Ampelperiode dagegen verschwindet die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht.

In einer naheliegenden Modellvariante werden andere Ampelschaltungen untersucht. Dabei kann man versuchen, für eine gegebene Situation die optimale Ampelschaltung zu finden. Bisher haben wir ja nur den Fall betrachtet, daß alle Ampeln gleichzeitig umschalten. Nun wollen wir etwas allgemeiner zulassen, daß die Phasen aufeinanderfolgender Ampeln um ΔT_{ij} gegeneinander verschoben sind, wobei (i, j) für die jeweilige Kreuzung steht. Die Länge T der Ampelphasen soll dabei aber weiterhin konstant und für alle Kreuzungen gleich sein. Abb. III.5.10 und III.5.11 zeigen Ergebnisse für zwei verschiedene neue Strategien:

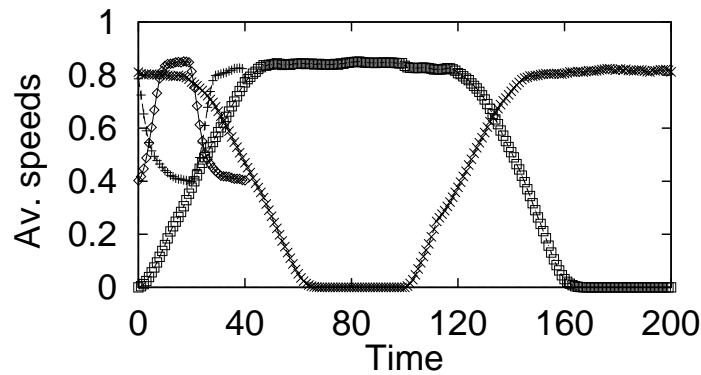


Abbildung III.5.9: Geschwindigkeitsverlauf im CS-Modell während einer Ampelphase. Die Symbole \diamond , $+$ bzw. \square , \times gehören zu den Kurven für $\langle v_x \rangle$, $\langle v_y \rangle$ bei $T = 20$ bzw. $\langle v_x \rangle$, $\langle v_y \rangle$ bei $T = 100$ und $\langle v_y \rangle$ bei $T = 100$. Die anderen Parameter sind $v_{\max} = 5$, $p = 0.1$, $D = 100$ und $\rho = 0.5$.

1. *Grüne Welle*: ΔT_{ij} konstant, unabhängig von i, j .
2. *Zufallsschaltung*: Für jede Ampel wird ΔT_{ij} zufällig aus $\{0, 1, \dots, 2T\}$ gewählt.

Bei der grünen Welle (Abb. III.5.10) erkennt man starke Oszillationen des Flußes als Funktion der Ampelphase T . Der Fluß wird gerade dann besonders groß, wenn die Phasenverschiebung zwischen den Ampeln so ist, daß die Autos alle Ampeln bei Grün passieren können. Dabei spielt natürlich auch die mittlere Geschwindigkeit der Fahrzeuge eine Rolle, die wiederum von der Dichte abhängt.

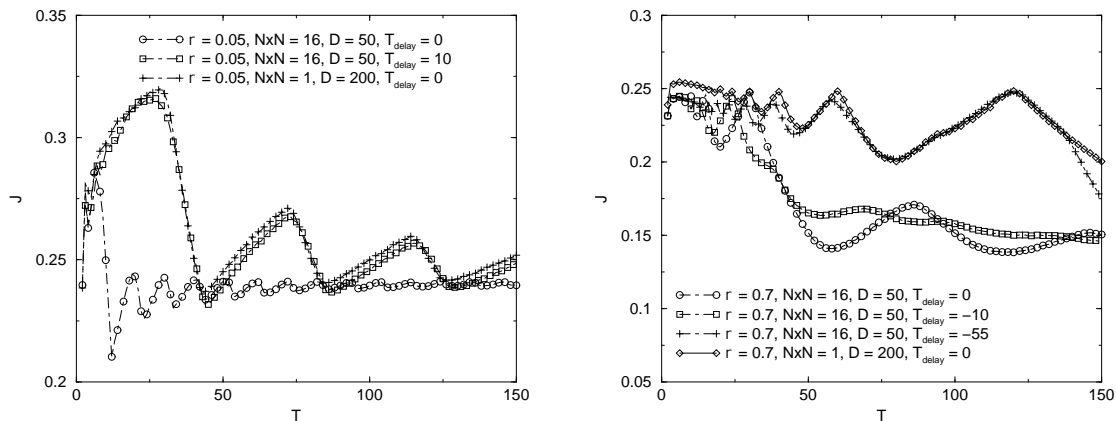


Abbildung III.5.10: Gesamtfluß für die Grüne-Welle-Strategie im CS-Modell im Freiflußbereich (links) und bei großen Dichten (rechts). Zum Vergleich ist jeweils der Fall einer synchronisierten Schaltung $\Delta T = T_{\text{delay}} = 0$ mit angegeben.

Abb. III.5.11 zeigt die entsprechenden Ergebnisse für die Zufallsschaltung. Es fällt auf, daß sie relativ gut abschneidet. Sie ist z.B. sehr flexibel. Eine genauere Analyse zeigt, daß sich bei der

Zufallsschaltung ein inhomogener Zustand ausbildet, bei dem das Netzwerk teilweise gestaut ist, und teilweise annähernd Freifluß möglich ist.

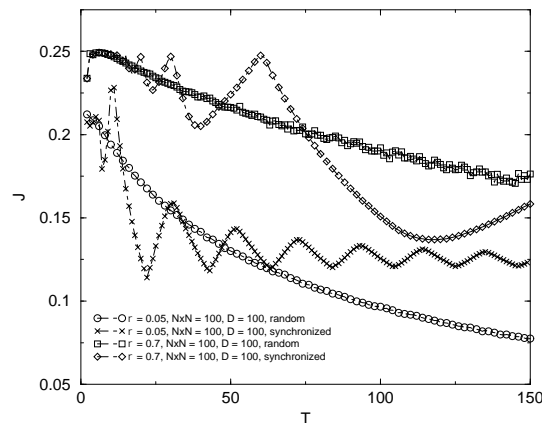


Abbildung III.5.11: Gesamtfluß für die Zufallsschaltung im Vergleich mit der synchronisierten Schaltung der Ampeln.

III.6 Fußgängerdynamik

Bei der *Fußgängerdynamik* haben wir es mit einer echt zweidimensionalen Bewegung zu tun. Insbesondere werden hier die Effekte von *Gegenverkehr* wichtig, die z.B. ein rechtzeitiges Ausweichen notwendig machen.

III.6.1 Phänomenologie

Wir wollen zunächst einen kurzen Überblick über die verschiedenen kollektiven Effekte und Selbstorganisationsphänomene geben, die man bei der Fußgängerdynamik beobachten kann.

- *Staubildung:*
Wie beim Straßenverkehr kann es auch bei der Bewegung von Fußgängern zu Staus kommen. Typischerweise treten Staus dann auf, wenn der Fluß durch eine Engstelle begrenzt wird, z.B. wenn viele Leute gleichzeitig versuchen, einen Raum durch eine Tür zu verlassen (siehe Abb. III.6.1).
- *Spurbildung:*
Eine interessante Form der spontanen Symmetriebrechung tritt auf, wenn sich zwei Gruppen von Fußgängern in entgegengesetzte Richtungen bewegen, z.B. in einem engen Korridor oder Fußgängerzone. In diesem Fall können sich selbstorganisiert Spuren ausbilden, auf denen der Fluß nur in eine Richtung geht (siehe Abb. III.6.2). Diese Spuren variieren dynamisch und können sich auch wieder auflösen. Der Grund für ihre Entstehung ist, daß sich auf diese Weise die Wechselwirkungen mit den entgegenkommenden Passanten

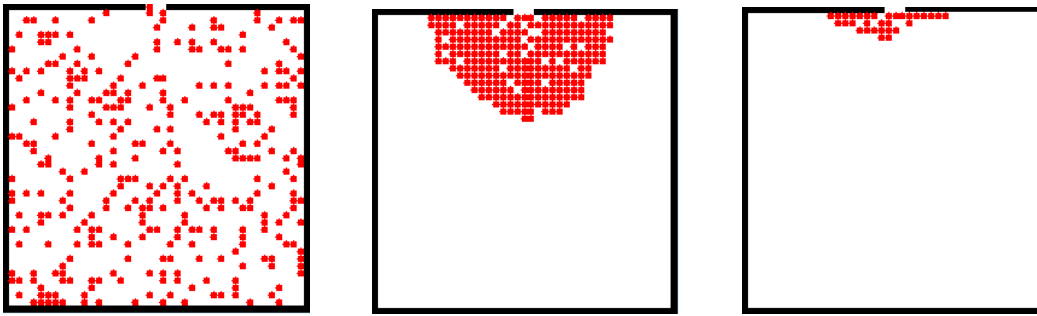


Abbildung III.6.1: Stau nahe einer Engstelle (Tür). Gezeigt sind drei typische Stadien der Dynamik (z.B. einer Evakuierung): (a) Anfangszustand mit einer zufälligen Verteilung der Fußgänger; (b) mittlere Zeiten; (c) Endstadium der Evakuierung.

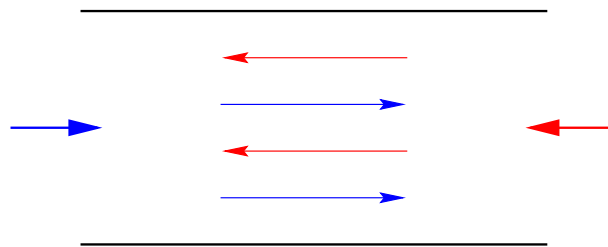


Abbildung III.6.2: Spurbildung in einem schmalen Korridor.

reduzieren lassen. Dies macht eine größere Laufgeschwindigkeit und eine angenehmere Fortbewegung möglich. Typischerweise ist die Zahl der Spuren proportional zur Breite des Korridors.

- *Oszillationen:*

An einer Tür oder anderen Engstelle, die von Fußgängern in beide Richtungen passiert werden will, kann es zu Oszillationen der Flußrichtung kommen (siehe Abb. III.6.3). Für einige Zeit können sich dann nur Leute in eine Richtung bewegen. Gelingt es jemanden, sich in diesen Fluß hineinzudrängeln und die Engstelle in die andere Richtung zu passieren, so kann die Flußrichtung wechseln. Diese Oszillationen kommen zustande, weil es für die nachfolgenden Passanten einfacher ist, dem Vorgänger zu folgen, als für jemanden auf der anderen Seite, der “gegen den Strom schwimmen” muß. Die Flußrichtung kann sich aber durch Fluktuationen ändern.

- *Flußmuster:*

An Wegkreuzungen können sich spontane spezielle Flußmuster entwickeln. Häufig entstehen z.B. kurzlebige “Kreisverkehre” (siehe Abb. III.6.4), die die Bewegung effizienter machen. Obwohl die Fußgänger hier einen kleinen Umweg machen müssen, ist dies vorteilhaft, da wieder Wechselwirkungen minimiert werden und so eine reibungslosere Fort-

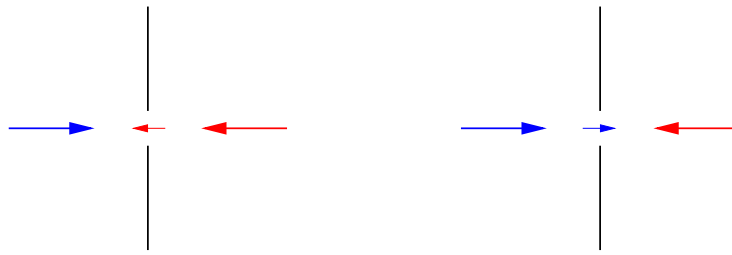


Abbildung III.6.3: Flußoszillationen an einer Tür mit Gegenverkehr.

bewegung möglich wird.

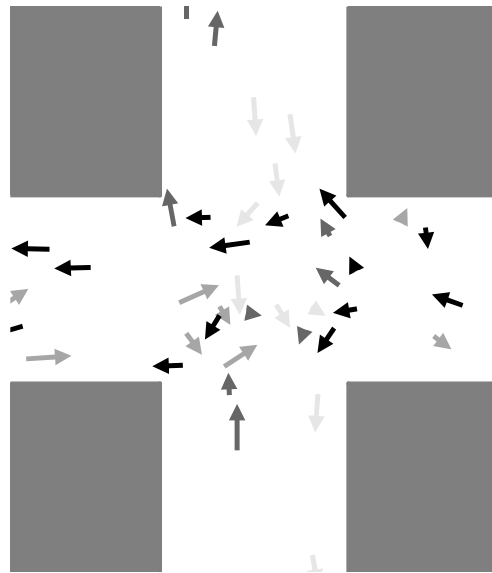


Abbildung III.6.4: Entstehung eines kleinen Kreisverkehrs an einer Wegkreuzung.

- *Entstehung von Trampelpfaden:*

Ein oft beobachtetes Phänomen ist die Entstehung von Trampelpfaden. Ab einer bestimmten prozentualen Wegersparnis³⁰ wird es attraktiv, Abkürzungen zu wählen, auch wenn diese vielleicht etwas unbequemer als ein gepflasterter Weg sind. Häufig benutzte Abkürzungen werden so attraktiver, da z.B. auf einer Wiese die Vegetation zerstört und so ein Weg sichtbar wird. Auf diese Weise können in Parks ganze Systeme von Trampelpfaden entstehen. Diese haben oft selbst eine eigene Dynamik, d.h. solche Systeme sind nicht statisch, sondern können sich verändert, wobei charakteristische Muster entstehen.

³⁰Interessanterweise scheint für die Entstehung von Trampelpfaden die relative Wegersparnis entscheidend zu sein, nicht die absolute.

Verwandt mit der Entstehung von Trampelpfaden ist das Phänomen der *Chemotaxis*. Verschiedene Insekten (z.B. Ameisen) markieren den Weg zu einem Futterplatz mit chemischen Duftstoffen, die von anderen Individuen wahrgenommen werden können. Auf diese Weise ist es möglich, dem Weg zum Futterplatz zu folgen.

- *Effekte bei Panik:*

In Paniksituationen können einige sehr überraschende Effekte auftreten.

(i): *Faster-is-slower-Effekt:* Beim Faster-is-slower-Effekt führt eine höhere Wunschgeschwindigkeit der einzelnen Fußgänger zu einer ungünstigeren Situation, d.h. einer geringeren Bewegungsgeschwindigkeit einer Menschenmenge und so z.B. zu einer längeren Evakuierungszeit. Der Grund ist z.B. eine stärkere Verstopfung an der Tür. Das Fortkommen wird dann durch einen Effekt erschwert, der ganz ähnlich der *Gewölbbildung* bei granularen Materialien ist.

(ii): *Freezing-by-heating-Effekt:*

Beim Freezing-by-heating-Effekt führt eine Erhöhung der Fluktuationen (entsprechend einer Temperaturerhöhung in der Gleichgewichtsthermodynamik) zu einem geordneteren Zustand. Dies ist in Abb. III.6.5 für den Fall einer Bewegung mit Gegenverkehr. Bei kleinen Fluktuationen beobachtet man Spurbildung. Werden die Fluktuationen verstärkt, so erfolgt ein Übergang in ein geordnetes Zustand, der sogar "kristallin" ist, d.h. die Fußgänger bewegen sich nicht mehr. Sie blockieren sich gegenseitig und befinden sich auf den Gitterpunkten eines regulären Kristallgitters.

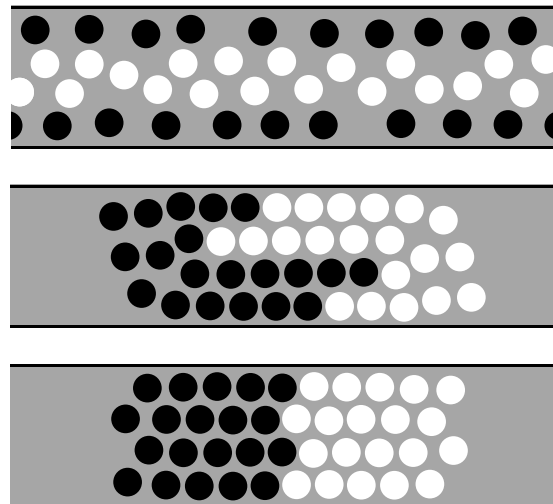


Abbildung III.6.5: Der Freezing-by-heating-Effekt. Bei relativ kleinen Fluktuationen beobachtet man Spurbildung (oben), die bei Vergrößerung der Fluktuationen über einen Zwischenzustand (mitte) in den kristallinen Zustand (unten) übergeht.

Für die Modellierung relevant sind auch quantitative empirische Resultate. Diese werden benutzt, um die Modellparameter zu kalibrieren.

Die typische Laufgeschwindigkeit eines Fußgängers bei kleinen Dichten beträgt etwa 4.83 km/h (± 0.99 km/h). Männer laufen typischerweise 10% schneller als Frauen. In einer Fußgängermenge sind die Geschwindigkeit in guter Näherung gaußverteilt, mit einem relativ scharfen Maximum. Im Gegensatz zum Autoverkehr ist die Beschleunigungsphase beim Gehen vernachlässigbar. Die mittlere Laufgeschwindigkeit wird in etwa 0.5 sec erreicht.

Bei hohen Dichten beträgt der typische Platzbedarf einer Person etwa $40 \times 40 \text{ cm}^2 = 0.16 \text{ m}^2$. Dies entspricht einer Dichte von etwa 6.6 Personen pro Quadratmeter. Auch von Wänden wird ein typischer Abstand gehalten. Dieser beträgt etwa 0.25 m, hängt aber auch leicht von der Art und dem Material der Wand ab.

III.6.2 Social-Force-Modell

Das *Social-Force-Modell* (Helbing, Molnar 1995) ist ein kontinuierliches Modell zur Beschreibung der Dynamik von Fußgängern. Es ist – neben dem in Kap. III.6.3 vorgestellten Zellularautomaten – das einzige Modell, das in der Lage ist, die in Kap. III.6.1 beschriebenen kollektiven Effekte zu reproduzieren.

Im Social-Force-Modell geht man von der Vorstellung aus, daß] zwischen den Fußgängern Kräfte wirken, die sich aus zwei Komponenten zusammensetzen. Die Kraft zwischen den Fußgängern α und β ist dabei gegeben durch

$$\vec{f}_{\alpha\beta}(t) = \vec{f}_{\alpha\beta}^{(\text{soc})}(t) + \vec{f}_{\alpha\beta}^{(\text{ph})}(t). \quad (\text{III.6.1})$$

$\vec{f}_{\alpha\beta}^{(\text{soc})}$ ist eine sozio-psychologische Kraft, die berücksichtigt, daß Fußgänger dazu tendieren, einen gewissen Abstand voneinander zu halten (Territorialeffekt, Privatsphäre etc.). $\vec{f}_{\alpha\beta}^{(\text{ph})}$ ist eine physikalische Kraft, die bei Kontakt wirksam wird. Sie wirkt der Kompression entgegen und berücksichtigt auch Reibungseffekte bei tangentialer Bewegung. Neben diesen Kräften zwischen verschiedenen Fußgänger wirken noch weitere Kräfte, die z.B. die Wechselwirkung mit Wänden beschreiben.

Die Fußgänger werden i.a. als Kreisscheiben mit Radius r_α und Schwerpunkt bei \vec{x}_α betrachtet. Die typische Form des sozio-psychologischen Anteils der Kraft ist dann

$$\vec{f}_{\alpha\beta}^{(\text{soc})} = A_\alpha \exp \left[\frac{r_{\alpha\beta} - \Delta x_{\alpha\beta}}{\xi_\alpha} \right] \left(\lambda_\alpha + (1 - \lambda_\alpha) \frac{1 + \cos \varphi_{\alpha\beta}}{2} \right) \vec{n}_{\alpha\beta} \quad (\text{III.6.2})$$

wobei $r_{\alpha\beta} = r_\alpha + r_\beta$ die Summe der Teilchenradien ist, $\Delta x_{\alpha\beta} = |\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta|$ der Abstand der Schwerpunkte, $\vec{n}_{\alpha\beta} = \frac{\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta}{\Delta x_{\alpha\beta}}$ die Richtung des Verbindungsvektors und $\varphi_{\alpha\beta}$ der Winkel zwischen der Geschwindigkeit und der “Kraftquelle” definiert durch $\cos \varphi_{\alpha\beta} = -\vec{n}_{\alpha\beta} \cdot \vec{e}_\alpha$ mit $\vec{e}_\alpha = \frac{\vec{v}_\alpha}{|\vec{v}_\alpha|}$. A_α ist die Wechselwirkungsstärke, ξ_α die Wechselwirkungsreichweite und λ_α ein Anisotropiefaktor³¹. Man beachte, daß im allgemeinsten Fall die sozialen Kräfte nicht das 3. Newtonsche Gesetz (“actio=reactio”) erfüllen.

³¹ $\lambda_\alpha = 1$ entspricht dem isotropen Fall.

Bei Kontakt zwischen zwei Fußgängern, d.h. für $\Delta x_{\alpha\beta} \leq r_{\alpha\beta}$, wird die physikalische Kraft $\vec{f}_{\alpha\beta}^{(\text{ph})}$ wichtig. Ihre allgemeine Form ist

$$\vec{f}_{\alpha\beta}^{(\text{ph})} = \left(k\vec{n}_{\alpha\beta} + \kappa\Delta v_{\beta\alpha}^{(t)} \cdot \vec{t}_{\alpha\beta} \right) (r_{\alpha\beta} - \Delta x_{\alpha\beta}) \Theta(r_{\alpha\beta} - \Delta x_{\alpha\beta}). \quad (\text{III.6.3})$$

Dabei ist $\Delta v_{\beta\alpha}^{(t)} = (\vec{v}_{\beta} - \vec{v}_{\alpha}) \cdot \vec{t}_{\alpha\beta}$ und $\vec{t}_{\alpha\beta}$ ein Einheitsvektor in Tangentialrichtung, d.h. orthogonal zu $\vec{n}_{\alpha\beta}$. Θ ist die Heavisidesche Sprungfunktion. Der erste Term in Gleichung (III.6.3) ist eine Körperkraft, die einer Kompression entgegen wirkt. Der zweite Term ist eine Gleitreibungskraft. Wie schon erwähnt, gelingt es dem Social-Force-Modell, die zuvor beschriebenen kollektiven Phänomene nachzustellen. Insgesamt zeigt es, bei geeigneter Wahl der Modellparameter, ein sehr realistisches Verhalten.

III.6.3 Bionisches Zellularautomatenmodell

Vor kurzem wurde ein Zellularautomatenmodell entwickelt, das die beobachteten kollektiven Phänomene simulieren kann. Die zugrundeliegende Idee für die Modellierung der Wechselwirkung zwischen den Fußgängern macht dabei Anleihen bei der Chemotaxis. In dem Modell hinterlassen die Fußgänger beim Laufen eine Spur. Im Gegensatz zur Chemotaxis oder Entstehung von Trampelpfaden ist diese Spur aber rein virtuell und kann nicht gemessen oder beobachtet werden. Sie entspricht eher der abstrakten Vorstellung, die man sich vom Weg der anderen macht.

Der entscheidende Vorteil dieser Modellierung ist, daß man es nicht mehr mit langreichweitigen Kräften im Raum zu tun hat. Diese werden nämlich in kurzreichweitige Kräfte “mit Erinnerung” übersetzt. Damit wächst die Zahl der Wechselwirkungsterme, die in jedem Zeitschritt zu berechnen sind, nur proportional zur Zahl N der Fußgänger. Beim Social-Force-Modell mit langreichweitigen Kräften hat man im Prinzip N^2 Wechselwirkungen zu berechnen. Außerdem muß man für jedes Paar überprüfen, ob die Wechselwirkung nicht z.B. durch eine dazwischen liegende Wand abgeschirmt wird. Dies erschwert die effiziente Simulation großer Menschenmengen in komplexen Geometrien.

In dem von Burstedde, Klauck, Schadschneider und Zittartz (2001) entwickelten Zellularautomatenmodell werden die Spuren zu sogenannten *Bodenfeldern* verallgemeinert. Neben dem Gitter, das aus den Zellen gebildet wird, in denen sich die Teilchen (Fußgänger) befinden, gibt es ein zweites Gitter, das das Bodenfeld enthält. Für dieses Feld gilt i.a. nicht die Einschränkung, daß eine Zelle nur durch ein Teilchen besetzt sein darf. Stattdessen können sich dort in jeder Zelle beliebig viele Teilchen befinden. Man bezeichnet das Feld daher auch als Bosonenfeld, während das Gitter der Fußgängerzellen in diesem Sinne fermionisch ist. Die Stärke des Bodenfeldes an einer gegebenen Stelle ist nun proportional zur Zahl der Bosonen, die sich in der entsprechenden Zelle befinden.

Das Bodenfeld modifiziert nun die Übergangswahrscheinlichkeiten der Teilchen so, daß eine Bewegung in Richtung eines höheren Bodenfeldes wahrscheinlicher ist. Dies entspricht dem Fall der Chemotaxis, wo die Bewegung längs der chemischen Spur erfolgt. Weiterhin wird das Bodenfeld durch die Bewegung der Fußgänger modifiziert. Bewegt sich nämlich ein Teilchen zu einer

Nachbarzelle, so wird das Bodengefeld der Ausgangszelle um eine Einheit (Boson) erhöht. Außerdem ist es natürlich, dem Bodengefeld eine eigene Dynamik zu geben, nämlich durch Diffusion und Zerfall. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit bewegt sich ein Boson zu einer Nachbarzelle (Diffusion) oder stirbt (Zerfall). Dies führt zu einer Verbreiterung und Ausdünnung der Spur, die schließlich nach einiger Zeit verschwindet. Dieses Bodengefeld wird daher auch als *dynamisches Bodengefeld* bezeichnet.

Daneben ist es nützlich, auch ein *statisches Bodengefeld* einzuführen. Dieses kann z.B. dazu verwendet werden, um die Geometrieeffekte zu modellieren. Wie die Bezeichnung schon andeutet, ist das statische Feld zeitlich konstant und wird insbesondere nicht von der Bewegung der Teilchen beeinflusst. Abb. III.6.6 zeigt eine typische Anwendung. Um einen Raum mit einer Tür zu modellieren, wählt man ein Bodengefeld, dessen Stärke mit zunehmender Distanz von der Tür abnimmt. Dies führt dazu, daß sich die Fußgänger automatisch (im Mittel) in Richtung des Ausgangs bewegen.

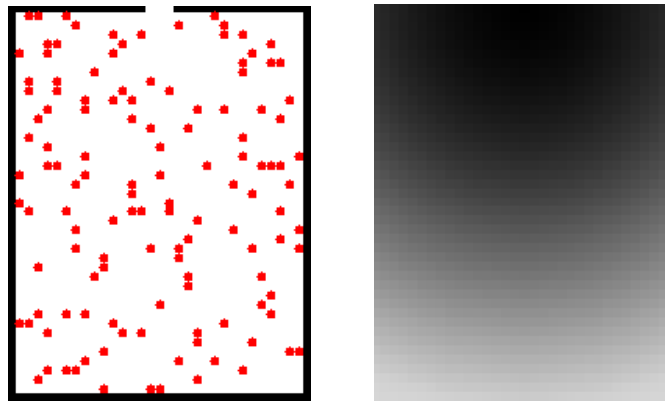


Abbildung III.6.6: Statisches Bodengefeld (rechts) für einen Raum mit einer Tür (links). Die Stärke des Feldes wächst in Richtung der Tür. Eine dunklere Schattierung entspricht einem stärkeren Feld.

Ein drittes Element ist die *Präferenzmatrix*. Sie enthält Informationen über die Wunschrichtung der Fußgänger. Abb. III.6.7 zeigt eine Zelle mit ihren 8 Nachbarn. Die Elemente der Präferenzmatrix kodieren nun die Wahrscheinlichkeit einer Bewegung zu der entsprechenden Zelle. Man kann sie sogar mit meßbaren Größen, nämlich dem Wunschgeschwindigkeitsvektor $\vec{v} = (v_x, v_y)$ und den Schwankungsquadraten Δv_x und Δv_y der Geschwindigkeit, in Verbindung setzen.

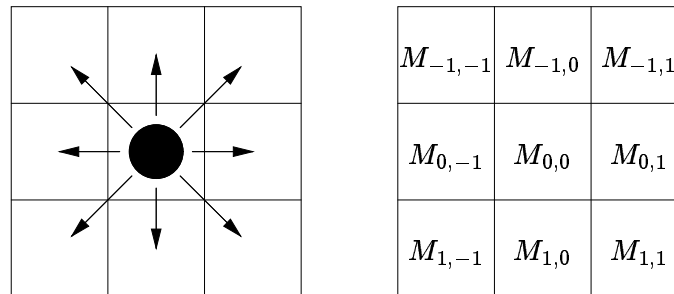


Abbildung III.6.7: Die Präferenzmatrix M kodiert Wunschgeschwindigkeit und -bewegungsrichtung der Fußgänger.

Anhang A

Ergänzungen

A.1 Numerische Lösung von hydrodynamischen Gleichungen

Die Gleichungen der hydrodynamischen Verkehrsmodelle lassen sich, wie schon erwähnt, i.a. nur numerisch lösen. In diesem Anhang wollen wir die grundlegenden numerischen Methoden zu ihrer Untersuchung vorstellen und diskutieren. Wir folgen dabei einer Arbeit von Helbing und Treiber (1999).

Ausgangspunkt sind die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = \alpha(x, t) - \beta(x, t), \quad (\text{A.1.1})$$

d.h. wir erlauben Quell- und Senken-Terme α bzw. β , und eine Geschwindigkeitsgleichung, die wir in der Form

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial (J^2/\rho + P)}{\partial x} = \frac{\rho V - J}{\tau} + \alpha V_+ - \beta V_-, \quad (\text{A.1.2})$$

schreiben. V_{\pm} ist dabei die mittlere Geschwindigkeit der Autos, die auf die Straße auf- bzw. von ihr abfahren.

Mit den Abkürzungen

$$\mathbf{u} = (\rho, J), \quad (\text{A.1.3})$$

$$\mathbf{f} = \left(J, \frac{J^2}{\rho} + P \right), \quad (\text{A.1.4})$$

$$\mathbf{s} = \left(\alpha - \beta, \frac{\rho V - J}{\tau} + \alpha V_+ - \beta V_- \right) \quad (\text{A.1.5})$$

können wir die beiden fundamentalen Gleichungen in der Form

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{s}(\mathbf{u})} \quad (\text{A.1.6})$$

schreiben. Gleichung (A.1.6) hat formal die Struktur einer Erhaltungsgleichung mit Quell- und Senkentermen. Natürlich verbirgt sich dahinter ein gekoppeltes System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen. Die Struktur (A.1.6) ist aber so etwas wie die Standardform für derartige Probleme.

Der erste Schritt zur numerischen Lösung ist nun die Diskretisierung der kontinuierlichen Variablen x und t mit (konstanten) Schrittweiten Δx und Δt :

$$(j\Delta x, n\Delta t) \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_j^n := \mathbf{u}(j\Delta x, n\Delta t). \quad (\text{A.1.7})$$

Als nächstes müssen wir die Ableitungen diskretisieren. Dazu gibt es eine Reihe verschiedener Verfahren¹:

1. Vorwärtsiteration:

Hier wird die Ableitungen durch den Differenzenquotienten ersetzt:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\Delta t}. \quad (\text{A.1.8})$$

Als diskretisierte Gleichung ergibt sich damit

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_j^n - \mathbf{f}_{j-1}^n) + \Delta t \mathbf{s}_j^n. \quad (\text{A.1.9})$$

Im allgemeinen Fall ist dieses Verfahren nicht stabil. Für Verkehrsmodelle funktioniert es aber.

2. **Lax-Friedrichs-Methode:** Hier wird in der Zeitableitung (A.1.8) \mathbf{u}_j^n durch den Mittelwert $\frac{1}{2} (\mathbf{u}_{j-1}^n + \mathbf{u}_{j+1}^n)$ ersetzt. Dies führt zu einer Glättung und hat somit einen ähnlichen Effekt wie ein Diffusionsterm. Die diskretisierte Form von Gl. A.1.6 ist dann

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \frac{\mathbf{u}_{j-1}^n + \mathbf{u}_{j+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_{j-1}^n) + \Delta t \mathbf{s}_j^n. \quad (\text{A.1.10})$$

3. MacCormack-Verfahren:

Dieses Verfahren gehört zu den sog. Prädiktor-Korrektor-Methoden.

$$\tilde{\mathbf{u}}_j^n = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_j^n - \mathbf{f}_{j-1}^n) + \Delta t \mathbf{s}_j^n, \quad (\text{Prädiktor}) \quad (\text{A.1.11})$$

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\tilde{\mathbf{u}}_j^n + \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\mathbf{f}}_{j+1}^n - \tilde{\mathbf{f}}_j^n) + \Delta t \tilde{\mathbf{s}}_j^n \right]. \quad (\text{Korrektor}) \quad (\text{A.1.12})$$

4. Lax-Wendroff-Verfahren:

Hierbei handelt es sich um ein weiteres Prädiktor-Korrektor-Verfahren.

$$\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j+1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_j^n) + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{s}_j^n + \mathbf{s}_{j+1}^n) \right] \quad (\text{Prädiktor}) \quad (\text{A.1.13})$$

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\mathbf{f}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] + \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{s}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{s}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right]. \quad (\text{Korrektor}) \quad (\text{A.1.14})$$

¹Mehr Details findet man z.B. in *Numerical Recipes* von Press et al.

Ein wichtiges Kriterium zur Charakterisierung der Qualität eines Verfahrens ist die sog. Ordnung. Diese beschreibt die Änderung des (lokalen) Fehlers bei Reskalierung $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (\alpha \Delta x, \alpha \Delta t)$ mit dem Faktor α . Verschwindet der lokale Fehler dann schneller als α^n , so sagt man, daß das Verfahren von n -ter Ordnung ist.

Von den oben beschriebenen Verfahren sind die Vorwärtsiteration und die Lax-Friedrichs-Methode von 1. Ordnung, die Verfahren von MacCormack bzw. Lax-Wendroff aber von 2. Ordnung. Dabei muß aber darauf hingewiesen werden, daß für Lösungen mit Schocks die Ordnung für alle Verfahren i.a. kleiner ist!

Die Genauigkeit der Verfahren ist meist nur schwer abzuschätzen, insbesondere für Schocklösungen. Ein weiteres wichtiges Kriterium ist aber die Stabilität. Ein Verfahren heißt *numerisch instabil*, wenn Fehler exponentiell anwachsen. Dies führt bei den betrachteten Problemen z.B. zu wild oszillierenden² Dichteprofilen, die schließlich Overflow-Fehlern verursachen. Man unterscheidet drei Arten von Instabilitäten:

- *Konvektive Instabilität:*

Eine Fehlerbetrachtung beim konvektiven Term liefert die Stabilitätsbedingung

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v_0}, \quad (\text{A.1.15})$$

wobei v_0 die maximale Durchschnittsgeschwindigkeit ist. Ein typischer Wert von $v_0 = 40 \text{ m/s} = 144 \text{ km/h}$ und eine räumliche Diskretisierung von 20 m macht daher eine Zeitdiskretisierung von $\Delta t \leq 0.5 \text{ sec}$ notwendig, um konvektive Instabilitäten zu vermeiden.

- *Diffusive Instabilität:*

Der Viskositätsterm $\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ macht aus der hyperbolischen DGL eine parabolische. In diesem Fall ergibt sich als zusätzliche Stabilitätsbedingung

$$\nu \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \leq 1. \quad (\text{A.1.16})$$

- *Relaxations-Instabilität:*

Da Δt endlich ist, können sich für räumlich homogene Felder Instabilitäten entwickeln, wenn Δt größer als die lokalen Relaxationszeiten $\frac{1}{r_k}$ wird, wobei r_k die Eigenwerte der Funktionalmatrix von s sind. Dies liefert eine zusätzliche Bedingung an Δt , die von der maximalen Dichte abhängt.

Abschließend wollen wir die Methoden miteinander vergleichen. Es zeigt sich, daß Verkehrsmodelle relativ gutmütig im Vergleich zu anderen hydrodynamischen Problemen sind. Bei den Verfahren 1. Ordnung ist die Vorwärtsiteration genauer als Lax-Friedrich. Hier führt der Diskretisierungsfehler zu "numerischer Diffusion" und somit zu einer Glättung von Schockfronten.

Die Verfahren 2. Ordnung sind durch den zusätzlichen Korrektorschritt um einen Faktor 2 weniger effizient als die 1. Ordnung. "Numerische Dispersion", d.h. Wellen mit kleinerer Amplitude

²mit kurzer Wellenlänge

breiten sich langsamer aus, führt zu Oszillationen hinter (nicht vor!) großen Gradienten. Diese Verfahren sind empfindlicher gegen nichtlineare Instabilitäten als die 1. Ordnung. Überraschenderweise sind sie i.a. auch nicht genauer als einfacheren 1. Ordnungsverfahren.

Etwas raffiniertere Verfahren verwenden eine Methode 1. Ordnung für große Gradienten und eine 2. Ordnung für kleinere Gradienten. Diese Verfahren werden manchmal als hochauflösend bezeichnet.

Wir hatten schon gesehen, daß zwischen den hydrodynamischen und gaskinetischen Modellen eine enge Verwandtschaft besteht. Tatsächlich sind die gaskinetischen Modelle stabiler, da Viskosität und Diffusion durch nichtlokale Terme beschrieben werden. Deshalb ist eine gröbere Diskretisierung ausreichend.

A.2 Theorie stochastischer Systeme

In diesem Abschnitt soll ein kurzer Abriß der Theorie stochastischer Systeme gegeben werden. Dies ist insbesondere bei der Untersuchung von probabilistischen Zellularautomaten hilfreich. Wir wollen deshalb annehmen, daß wir es mit einem diskreten stochastischen System zu tun haben, daß aus L Gitterplätzen oder Zellen besteht. Der Zustand jedes Platzes wird dabei durch eine diskrete Zustandsvariable τ_j ($j = 1, \dots, L$) charakterisiert. τ_j kann im einfachsten Fall die Besetzungszahl der Platzes sein, d.h. $\tau_j = 1$, wenn sich ein Teilchen am Platz j befindet, und τ_j sonst. Der Zustand des gesamten Systems zur Zeit t wird dann durch den Vektor $\boldsymbol{\tau}(t) = (\tau_1(t), \dots, \tau_L(t))$ beschrieben.

Ein *stochastisches System* ist nun i.a. durch seine Dynamik definiert, die dann Zufallselemente enthält. Man gibt daher z.B. die Wahrscheinlichkeit an, mit der sich ein Zustand $\boldsymbol{\tau}(t)$ in einen Zustand neuen Zustand $\boldsymbol{\tau}(t+1)$ entwickelt. Dies unterscheidet sich deutlich von dem Vorgehen in der Gleichgewichtsphysik, wo die Systeme durch eine Energiefunktion $H(\boldsymbol{\tau})$ charakterisiert werden.

Genauer wird die Dynamik definiert durch Angabe von *Übergangswahrscheinlichkeiten* $W(\boldsymbol{\tau} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\tau}})$ für Systeme in kontinuierlicher Zeit bzw. durch *Übergangsraten*³ $w(\boldsymbol{\tau} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\tau}})$ für Systeme in kontinuierlicher Zeit.

A.2.1 Mastergleichung

Da die Dynamik selbst stochastisch ist, ist eine Beschreibung des Systems durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung sinnvoll. Die zentrale Größe zur Charakterisierung eines stochastischen Systems ist daher

$$P(\boldsymbol{\tau}; t) = P(\tau_1, \dots, \tau_L; t) = \text{Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit } t \text{ im Zustand } \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_L) \text{ zu finden.} \quad (\text{A.2.1})$$

Die zeitliche Entwicklung dieser Funktion wird durch die *Master-Gleichung*

³d.h. Übergangswahrscheinlichkeiten pro Zeiteinheit

$$\frac{\partial P(\boldsymbol{\tau}; t)}{\partial t} = \sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} w(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \rightarrow \boldsymbol{\tau}) P(\tilde{\boldsymbol{\tau}}; t) - \sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} w(\boldsymbol{\tau} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\tau}}) P(\boldsymbol{\tau}; t) \quad (\text{A.2.2})$$

beschrieben, wobei wir angenommen haben, daß die Zeit t kontinuierlich ist⁴. Die Master-Gleichung ist ein Bilanzgleichung. Die erste Summe beschreibt alle Übergänge in den betrachteten Zustand $\boldsymbol{\tau}$ hinein, d.h. den ‘‘Gewinn’’, der zur einer Erhöhung von $P(\boldsymbol{\tau}; t)$ führt. Die zweite Summe sind die Verlustterme, d.h. alle Übergänge aus dem Zustand $\boldsymbol{\tau}$ heraus in einen beliebigen anderen Zustand $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$. Jeder Term ist dabei natürlich zum einen proportional zur entsprechenden Übergangsrate und zum anderen zur Wahrscheinlichkeit, daß der entsprechende Ausgangszustand überhaupt vorliegt.

Meistens interessiert man sich vor allem für den *stationären Zustand*, bei dem die Wahrscheinlichkeitsverteilung zeitunabhängig wird: Dies entspricht dem Zustand, den das System im Limes $t \rightarrow \infty$ annimmt:

$$P(\boldsymbol{\tau}) := \lim_{t \rightarrow \infty} P(\boldsymbol{\tau}; t). \quad (\text{A.2.3})$$

Dann erhalten wir aus (A.2.2) die *stationäre Master-Gleichung*

$$\sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} w(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \rightarrow \boldsymbol{\tau}) P(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} w(\boldsymbol{\tau} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\tau}}) P(\boldsymbol{\tau}). \quad (\text{A.2.4})$$

Eine einfache Möglichkeit, wie man Gleichung (A.2.4) erfüllen kann, ist das sog. *detaillierte Gleichgewicht* (*detailed balance*)

$$w(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \rightarrow \boldsymbol{\tau}) P(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = w(\boldsymbol{\tau} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\tau}}) P(\boldsymbol{\tau}) \quad (\text{A.2.5})$$

für alle $\boldsymbol{\tau}$ und $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$. Dies bedeutet also, daß jeweils zwei korrespondierende Summanden in (A.2.4) gleich sind. Diese Bedingung wird z.B. vom kanonischen Ensemble erfüllt, wo ja bekanntlich $P(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(\boldsymbol{\tau})}$ ist und die Übergangswahrscheinlichkeiten von der Energiedifferenz der Zustände abhängen. Man nutzt die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts z.B. bei klassischen Monte-Carlo-Simulationen aus, um eine Dynamik zu definieren (durch geeignete Wahl der Übergangsraten w), die garantiert ins Gleichgewicht führt.

Ein *Nichtgleichgewichtssystem* ist nun dadurch definiert, daß seine Dynamik nicht das detaillierte Gleichgewicht erfüllt. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Systeme, die ins thermodynamische Gleichgewicht relaxieren. Hier ist P noch zeitabhängig. Ein extremes Beispiel ist die Glasdynamik, bei der auf experimentell realisierbaren Zeitskalen nie das Gleichgewicht erreicht wird.
2. Systeme, die sich in einem stationären Zustand befinden, der aber kein thermodynamischer Gleichgewichtszustand ist. Hier ist also P zeitunabhängig, erfüllt aber nicht das detaillierte Gleichgewicht. Ein wichtiges Beispiel sind *getriebene Systeme*, d.h. Systeme, denen ein Strom aufgeprägt wird. Dies ist insbesondere beim Nagel-Schreckenberg-Modell der Fall.

⁴Den für die Beschreibung von Zellularautomaten relevanteren Fall einer diskreten Zeit t diskutieren wir weiter unten!

In der Vorlesung zur statistischen Physik haben sie die *Lineare Response-Theorie* kennengelernt. Diese gilt für Systeme in der Nähe des Gleichgewichts, womit eine Beschreibung mit Hilfe der Sprache der Gleichgewichtsphysik möglich wird. Wir haben es im Rahmen dieser Vorlesung allerdings mit *Systemen fernab vom Gleichgewicht* zu tun, die sich nicht durch linearen Response beschreiben lassen.

Wir wollen nun noch Systeme in diskreter Zeit $t = n\Delta t$ betrachten, was ja gerade für die Zellularautomaten relevant ist. Dazu diskretisieren wir die Zeitableitung in (A.2.2)

$$\frac{\partial P}{\partial t} \rightarrow \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}. \quad (\text{A.2.6})$$

Setzen wir dies in die Master-Gleichung ein, so folgt

$$P(\boldsymbol{\tau}; t + \Delta t) = P(\boldsymbol{\tau}; t) + \sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} W(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \rightarrow \boldsymbol{\tau})P(\tilde{\boldsymbol{\tau}}; t) - \sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} W(\boldsymbol{\tau} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\tau}})P(\boldsymbol{\tau}; t) \quad (\text{A.2.7})$$

wobei wir schon die Übergangswahrscheinlichkeit

$$W(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \rightarrow \boldsymbol{\tau}) := w(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \rightarrow \boldsymbol{\tau})\Delta t \quad (\text{A.2.8})$$

eingeführt haben. Die zweite Summe läßt sich noch weiter vereinfachen:

$$\sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} W(\boldsymbol{\tau} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\tau}})P(\boldsymbol{\tau}; t) = P(\boldsymbol{\tau}; t) \sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} W(\boldsymbol{\tau} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\tau}}) = P(\boldsymbol{\tau}; t), \quad (\text{A.2.9})$$

da natürlich die Wahrscheinlichkeit $\sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} W(\boldsymbol{\tau} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\tau}})$, daß das System in irgendeinen Zustand übergeht, gleich Eins sein muß. Somit erhalten wir die *Master-Gleichung in diskreter Zeit*

$$\boxed{P(\boldsymbol{\tau}; t + \Delta t) = \sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} W(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \rightarrow \boldsymbol{\tau})P(\tilde{\boldsymbol{\tau}}; t).} \quad (\text{A.2.10})$$

Diese Gleichung gilt für unterschiedliche Formen der Dynamik in diskreter Zeit. Üblicherweise ist es nämlich so, daß man die Dynamik lokal definiert, d.h. über das Verhalten eines einzelnen Teilchens, unter Berücksichtigung der Wechselwirkung mit den anderen. Ein gutes Beispiel ist das Nagel-Schreckenberg-Modell, bei dem wir nur angegeben haben, wie sich der Zustand eines einzelnen Autos ändert. In einem solchen Fall muß zusätzlich noch die Reihenfolge spezifiziert werden, in der die Regeln auf die Teilchen des Systems anzuwenden sind. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten:

Parallele Dynamik (synchrone Dynamik):

Bei der parallelen Dynamik, die ja für das NaSch-Modell relevant ist, werden die dynamischen Regeln auf alle Teilchen oder Gitterplätze gleichzeitig angewendet.

Untergitterparallele Dynamik:⁵

Bei der untergitterparallelen Dynamik werden abwechselnd gleichzeitig alle ungeraden Plätze ($j = 1, 3, \dots$) und dann alle geraden Plätze ($j = 2, 4, \dots$) aktualisiert.

⁵Diese wird leider in der Literatur manchmal nur als parallele Dynamik bezeichnet, wobei unsere parallele Dynamik dann "voll parallel" oder "synchron" heißt.

Geordnet-sequentielle Dynamik:

Hierbei wird die Aktualisierung der Zustände in einer fest vorgegebenen Reihenfolge vorgenommen, z.B. $j = 1, 2, 3, \dots, L$ bei der *vorwärts-sequentuellen Dynamik* oder $j = L, L - 1, \dots, 1$ bei der *rückwärts-sequentuellen Dynamik*. Hierbei ist noch der Unterschied zwischen einer *Teilchen-sequentuellen* und einer *Gitter-sequentuellen* Aktualisierung zu beachten. Bei der Teilchen-sequentuellen Dynamik geht man von einem Teilchen zum nächsten und aktualisiert dessen Zustand, während man bei der Gitter-sequentuellen Dynamik von einem Gitterplatz zum nächsten geht. Dies kann zu erheblichen Unterschieden führen, wenn sich die Teilchen bewegen können. Dies diskutieren wir in Aufgabe 15 der Übungen.

Zufällig-sequentielle Dynamik (random-sequential dynamics):

Bei der zufällig-sequentuellen Dynamik wird ein Gitterplatz oder Teilchen zufällig ausgewählt und sein Zustand gemäß der dynamischen Regeln aktualisiert. Hierbei kann es vorkommen, daß ein Platz auch mehrmals unmittelbar hintereinander ausgelost wird!

Die parallelen und sequentiellen Dynamiken entsprechen stochastischen Prozessen in diskreter Zeit. Hier ist offensichtlich, wie man einen Zeitschritt zu definieren hat: Jeder Platz oder jedes Teilchen muß genau einmal aktualisiert worden sein. Diese Dynamiken werden also durch eine Master-Gleichung der Form (A.2.10) beschrieben. Die zufällig-sequentielle Dynamik entspricht dagegen der Realisierung eines stochastischen Prozesses in kontinuierlicher Zeit und wird durch (A.2.2) beschrieben.

Anhang B

Übungen

1. Übung zur Physik des Straßenverkehrs

im Wintersemester 2001/2002

1. Bestimmung der Verkehrsdichte

Verkehrsmessungen werden meist nur mit lokalen Detektoren durchgeführt werden. Dies führt bei der Bestimmung von räumlichen Größen wie der Dichte zu Problemen.

- Wird die Dichte bei der in der Vorlesung behandelten Methode eher unter- oder überschätzt? Begründung?
- Das Problem liegt letztlich darin, daß die Zeitmittelung über ein Intervall ΔT und die räumliche Mittelung über eine Länge ΔX unterschiedliche Ergebnisse liefern. Begründe diese Aussage! Gibt es eine Möglichkeit der Dichtebestimmung, die diesen Effekt berücksichtigt?

2. Kontinuitätsgleichung

Leite die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

für eine Straße ohne Auf- und Abfahrten her!

3. Fundamentaldiagramme

In der Vorlesung wurde die schematische Form $J = J(\rho)$ des Fundamentaldiagramms diskutiert. Wie sieht es in der – auf Grund der hydrodynamischen Relation $J = \rho v$ – äquivalenten Form $v = v(J)$ aus, die häufig von Verkehrswissenschaftlern benutzt wird?

4. Theorie und Praxis

In der Fahrschule lernt man die Faustregel “Abstand gleich halber Tacho”.

- Welchem zeitlichen Abstand zum Vordermann entspricht dieser Regel? Wie hängt dieser von der Geschwindigkeit ab?
- Wie groß ist der Fluß in einen homogenen Zustand, bei dem sich alle Fahrer *exakt* an diese Regel halten? Vergleiche auch mit den in der Vorlesung angegebenen empirischen Werten!

5. Nichtlineare Wellengleichung

Zeige, daß $\rho(x, t) = F(x - v_g(\rho)t)$ mit einer beliebigen Funktion F eine Lösung der nichtlinearen Wellengleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_g \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

ist, wobei $v_g = v_g(\rho)$.

B.1 Lösungen zu Übung 1

2. Übung zur Physik des Straßenverkehrs

im Wintersemester 2001/2002

6. Boltzmann-Gleichung

Leite für klassische Gase die Boltzmann-Gleichung

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_r + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_p \right] f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$$

ab. Betrachte zunächst im stoßfreien Fall $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = 0$ die Bewegung eines infinitesimalen Volumenelements im Phasenraum unter der Wirkung der Kraft \vec{F} .

7. Hydrodynamische Modelle

Gibt es eine Situation, in der das allgemeine hydrodynamische Modell zu rückwärts fahrenden Autos führt?

8. Gaskinetische Modelle und Hydrodynamik

Leite aus der Prigogine-Herman-Theorie eine hydrodynamische Gleichung für die Geschwindigkeit ab.

9. Fahrzeugfolge-Modelle I

Bestimme die allgemeine Lösung für das einfachste Fahrzeugfolge-Modell $\dot{v}_n(t) = \kappa_0[v_{n+1}(t) - v_n(t)]$ für N Fahrzeuge mit periodischen Randbedingungen (d.h. Fahrzeug $N + 1$ wird mit Fahrzeug 1 identifiziert).

10. Fahrzeugfolge-Modelle II

Ein Fahrzeug folgt einem anderen, das mit der vorgegebenen Geschwindigkeit $v_0(t)$ fährt. Das Verhalten des hinteren Fahrzeugs werde durch die Bewegungsgleichung $\dot{v}(t) = \kappa_0[v_0(t) - v(t)]$ beschrieben.

a) Wie lautet die Lösung dieser Bewegungsgleichung?

b) Zeige durch geeignete Wahl von $v_0(t)$, daß Fahrzeugfolge-Modelle nicht automatisch unfallfrei sind!

11. Fahrzeugfolge-Modelle III

Bestimme die Dichteabhängigkeit der Geschwindigkeit für die verallgemeinerten Fahrzeugfolge-Modelle in den Fällen $l = 1$ oder $m = 1$. Skizziere $v(\rho)$ für beliebige l und m .

B.2 Lösungen zu Übung 2

3. Übung zur Physik des Straßenverkehrs

im Wintersemester 2001/2002

12. Optimal-Velocity-Modell numerisch

Bestimme numerisch das Fundamentaldiagramm des Optimal-Velocity-Modells. Da die Sensitivität τ lediglich die Zeit reskaliert, kann man o.B.d.A. $\tau = 1$ setzen. Benutze die in der Vorlesung angegebene Form

$$V_{\text{opt}}(\Delta x) = \tanh(\Delta x - 2) + \tanh 2$$

und diskretisiere die Zeitableitung (z.B. durch ein Runge-Kutta-Verfahren). Als Zeitdiskretisierung wähle etwa $\Delta t = 0.01$ und als Systemlänge (mit periodischen Randbedingungen) $L = 100$. Variiere dann die Zahl der Fahrzeuge. Betrachte verschiedene Anfangsbedingungen (z.B. annähernd äquidistant oder einen großen Stau).

Bestimme den Fluß nach etwa 1000 Zeitschritten Aufwärmphase (um den stationären Zustand zu erreichen) durch Mittelung über die nächsten 10000 Zeitschritte. Vergleiche die Ergebnisse, die man durch a) Messung der mittleren Umrundungszeit T und b) durch Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit in jedem Zeitschritt erhält.

Überprüfe auch, ob nach 1000 Zeitschritten wirklich schon der stationäre Zustand erreicht ist. Welche Auswirkungen hat die Größe der Diskretisierung Δt bzw. das Diskretisierungsschema?

13. Optimal-Velocity-Modell analytisch

Betrachte das Optimal-Velocity-Modell mit der OV-Funktion

$$V_{\text{opt}}(\Delta x) = v_{\text{max}} \Theta(\Delta x - d)$$

mit einer Konstanten d . $\Theta(x)$ ist dabei die Heavisidesche Sprungfunktion mit $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$.

a) Bestimme die Lösung der Bewegungsgleichung für $x(t = 0) = x_0$ und $v(t = 0) = v_0$.

(Tip: Unterscheide die Fälle $\Delta x < d$ und $\Delta x > d$.)

b) Untersuche die Auflösung eines Staus mit N Fahrzeugen bei $x_n(t = 0) = -n\Delta x_J$ mit dem mittleren Abstand $\Delta x_J \leq d$ im Stau. Es sei t_n der Zeitpunkt, zu dem der Abstand zum Vordermann den Wert d erreicht: $\Delta x_n(t_n) = d$. Leite unter der Annahme $\Delta t := t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_N - t_{N-1}$ die Beziehung $\Delta x_J + v_{\text{max}} \Delta t = \Delta x_F$ ab, mit $\Delta x_F := \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x_n(t)$.

c) Untersuche analog zu b) das Wachstum eines Staus und zeige so:

$$\Delta x_F = d + \frac{v_{\text{max}} \Delta t}{2}, \quad \Delta x_J = d - \frac{v_{\text{max}} \Delta t}{2}.$$

Leite folgende Gleichung zur Bestimmung von τ ab:

$$\frac{\Delta t}{\tau} = 2(1 - e^{-\Delta t/\tau}).$$

14. Unfallfreiheit im Krauß-Modell

Begründe die Beziehung

$$d(v_n) + v_n\tau \leq d(v_{n+1}) + s_n \quad (*)$$

wobei $d(v)$ der Bremsweg bei der Geschwindigkeit v und konstanter Verzögerung b ist.

Betrachte den Fall der Gleichheit in $(*)$ und entwickle beide Seiten in 1. Ordnung um $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_n + v_{n+1})$. Leite hieraus die in der Vorlesung angegebene Bedingung für Unfallfreiheit her.

15. Geordnet-sequentielle Dynamik

Begründe, daß i.a. die Teilchen-sequentielle und die Gitter-sequentielle Dynamik zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.

Tip: Es genügt, ein Teilchen zu betrachten.

16. Master-Gleichung für den Random Walk

Wie lautet die Master-Gleichung (in kontinuierlicher Zeit) für die Bewegung *eines* Teilchens, das mit der Rate D_R nach rechts (zu $x + 1$) und mit der Rate D_L nach links (zu $x - 1$) hüpf.

Bestimme die erzeugende Funktion

$$\tilde{P}(k, t) := \frac{1}{L} \sum_{x=1}^L P(x, t) e^{i2\pi kx/L}$$

für ein periodisches System mit L Gitterplätzen.

Was ergibt sich im stationären Zustand?

Tip: $P(x, t)$ = Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t am Ort x zu finden.

B.3 Lösungen zu Übung 3

4. Übung zur Physik des Straßenverkehrs

im Wintersemester 2001/2002

17. Detailliertes Gleichgewicht

Das in der Vorlesung angegebene Kriterium

$$w(\tilde{\tau} \rightarrow \tau)P(\tilde{\tau}) = w(\tau \rightarrow \tilde{\tau})P(\tau) \quad (*)$$

für das Vorliegen von detailliertem Gleichgewicht ist i.a. nicht sehr praktisch.

Zeige, daß das Kriterium (*) äquivalent ist zu folgender Aussage:

Für beliebige n und alle Zustände $\tau_j = (\tau_1^{(j)}, \dots, \tau_L^{(j)})$ gilt

$$\begin{aligned} w(\tau_1 \rightarrow \tau_2)w(\tau_2 \rightarrow \tau_3) \cdots w(\tau_{n-1} \rightarrow \tau_n)w(\tau_n \rightarrow \tau_1) \\ = w(\tau_1 \rightarrow \tau_n)w(\tau_n \rightarrow \tau_{n-1}) \cdots w(\tau_2 \rightarrow \tau_1). \end{aligned} \quad (**)$$

Die zweite Bedingung hat den Vorteil, daß der stationäre Zustand $P(\tau)$ nicht explizit bekannt sein muß!

18. Kalibrierung des NaSch-Modells

In der Vorlesung wurde aus der Freiflußgeschwindigkeit abgeleitet, daß ein Zeitschritt im NaSch-Modell einer realen Zeit von etwa einer Sekunde entspricht. Es gibt aber weitere Möglichkeiten der Kalibrierung:

- i.) Die Dichte am Flußmaximum beträgt empirisch $\rho \approx 30$ Fahrzeuge/km. Wir nehmen an, daß dies der Dichte am Maximum des Fundamentaldiagramms des NaSch-Modells (mit $p = 0$) entspricht. Wie hat man v_{\max} zu wählen, um diesen Wert zu reproduzieren?
- ii.) Der maximale Fluß beträgt empirisch etwa $J_{\max} \approx 2000$ Fahrzeuge/h. Dies soll mit dem maximalen Fluß im NaSch-Modell identifiziert werden! Bestimme die Zeitskala für den Fall $v_{\max} = 5$ und $p = 0$.
- iii.) Die empirische Staugeschwindigkeit beträgt $v_s \approx 15$ km/h. Bestimme die Staugeschwindigkeit im NaSch-Modell (für $p > 0$) und identifiziere diese mit dem empirischen Wert. Wähle dazu $p = 0.5$.

19. NaSch-Modell mit $p = 1$

Diskutiere das Fundamentaldiagramm des Nagel-Schreckenberg-Modells für den deterministischen Fall $p = 1$ und beliebiges v_{\max} . Ist der stationäre Zustand eindeutig?

B.4 Lösungen zu Übung 4