Differentialrechnung

Maßgeblich entwickelt durch
Theoretische Physik: → Leibniz
→ Newton

- Newton'schen Gl. d. Mechanik
- Maxwell'schen Gl. d. E-Dynamik
- Schrödinger-Gl. d. Quantenmechanik

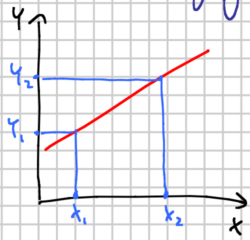
→ Differentialgleichungen!

Konzept der Ableitung:

Änderung von $y = f(x)$ mit x → Steigung

Differenzen-Quotient (Steigungsdreieck):

$$\boxed{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

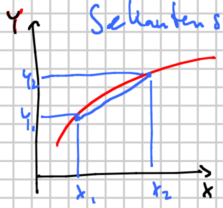


z.B. Bewegung: $s = s(t)$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v \quad \text{Geschwindigkeit}$$

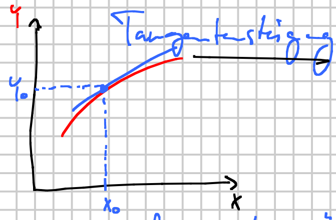
Steigung einer beliebigen Fkt:

Sekantensteigung



$x_2 \atop x_1$ → x_0

Tangentensteigung



"Steigung zwischen zwei Punkten"

"Steigung am Punkt $(x|y_0)$"

→ Übergang vom "Differenzenquotient" zum "Differential(-Quotient)"!

Ableitung:

"Fkt. differenzierbar in x_0"

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (x - x_0)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

oder $= \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ für $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

bzw. $= \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$ für $\lim_{n \to \infty} h_n = 0$

$\exists f'(x) \Leftrightarrow$ "differenzierbar"

$\Rightarrow$ "stetig"

Andere Schreibweise (→ Physik)

$$f'(x_0) = \left.\frac{d f(x)}{dx}\right|_{x_0} = \left.\left(\frac{d}{dx}\right) f(x)\right|_{x_0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$$

→ "d" im infinitesimalen Limes

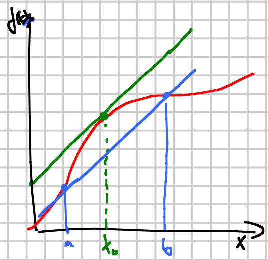
$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$f(x)$ stetig & diff.-bar in $[a, b]$

$\Rightarrow \exists\, a < x_0 < b : f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

"Es gibt einen Punkt im Intervall, dessen Ableitung gerade die Sekantensteigung ist."



Ableitung über Limes der Sekantensteigung:
→ Differentialquotient

Bsp.: Potenz-Fkt. $f(x) = x^n$

$$\rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \frac{1}{h}\left(x_0^n + n x_0^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2} h^2 + \dots + h^n\right)$$

$$= n x_0^{n-1} + \cancel{\frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2} h} + \cancel{\dots h^2} + \cancel{\dots h^3} + \dots + \cancel{h^{n-1}}$$

$$\xrightarrow{h \to 0} \boxed{f'(x_0) = n x_0^{n-1}}$$

"Standard-Ableitungen"

$f(x)$	x^a	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$
$f'(x)$	$a x^{a-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
	e^x	a^x	$\ln\lvert x\rvert$		const.			$\text{arccot}\, x$
	e^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x}$		0			$-\frac{1}{1+x^2}$

Differentiationsregeln:

- Summenregel $\quad c\left(f(x) \pm g(x)\right)' = c f'(x) \pm c g'(x) \quad \rightarrow$ Linearität

- Produkt- & Quotientenregel:
  Wenn f und g differenzierbar
  $\Rightarrow f \cdot g$ und $f/g \; (g \neq 0)$ differenzierbar
  mit $(f g)' = f' g + f g'$
  $\left(f/g\right)' = \dfrac{f' g - f g'}{g^2}$

Bsp: $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3$
$(f(x) \cdot g(x))' = f' \cdot g + f \cdot g'$
$= 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2$
$= 5x^4$
$(x^3 \cdot x^2)' = (x^5)' = 5x^4$ ✓

- Kettenregel:
  $u = h(x)$ und $g(u)$ differenzierbar
  $\Rightarrow f(x) = g(h(x))$ — u —
  $f'(x) = g(h(x))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
  "Äußere" "Innere"

Bsp: $y = f(x) = \sin^2 x$
$= g(u) = u^2, \quad u = h(x) = \sin x$
$g'(u) = 2u, \quad h'(x) = \cos x$
$f'(x) = g'(u)\, h'(x) = 2u \cos x$
$= 2 \sin x \cos x \quad = \sin 2x$

Höhere Ableitungen:

Ableitung der Ableitung der Abl...

$f''(x) = f^{(2)}(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx} f\right) = \dfrac{d^2 f}{dx^2} \quad ; \quad f'''(x) = f^{(3)}(x) = \dfrac{d}{dx} f''(x)$

Bsp: Polynom n-ten Grades

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$
$f'(x) = \quad + a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$
$f''(x) = \quad 2a + \dots + n(n-1) x^{n-2}$
$\vdots$
$f^{(n)} = \quad n!\, a_n \quad \Rightarrow f^{(n+1)} = 0$

Physikalisches Bsp: $\quad s = s(t) \quad \longrightarrow \quad \dot{s}(t) = \dfrac{ds}{dt} = v$ Geschwindigkeit

$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{s} \quad \longleftarrow \quad \ddot{s}(t) = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = \dot{v} = a$ Beschleunigung

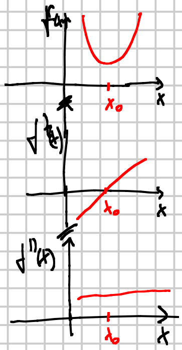
"Kraft gleich Masse mal Beschleunigung"
(Newton'sche Bewegungsgleichung, Grundgleichung der Mechanik)

Kritische Punkte und Extremwerte

$f'(x_0) = 0 \quad \rightarrow$ "kritischer Punkt", d.h. die Tangentensteigung ist 0

mehrere Möglichkeiten:

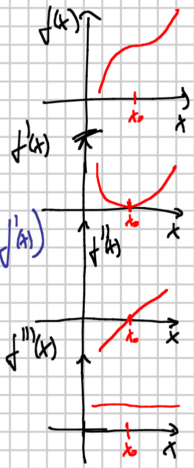
- Maximum oder Minimum (Extremwerte)



Steigung bei x_0 ist 0
Vorzeichenwechsel $- \rightarrow +$
$\rightarrow$ Minimum
$+ \rightarrow -$
$\rightarrow$ Maximum

- Sattelpunkt

Steigung bei x_0 ist 0 ohne Vorzeichenwechsel
($\rightarrow$ Extremum in $f'(x)$)
(siehe links)



- Wendepunkt

Geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung $\rightarrow$ Krümmung
$f''(x) > 0 \rightarrow$ Steigung wächst an $\rightarrow$ "Linkskurve"
$f''(x) < 0 \rightarrow$ Steigung nimmt ab $\rightarrow$ "Rechtskurve"

Wenn $f''(x) = 0 \wedge f''' \neq 0$ $\rightarrow$ Vorzeichenwechsel in der Krümmung, d.h. Wendepunkt

(Heißt auch: Extremum in der Steigung $f'(x)$!)

(Bem: Sattelpunkte sind auch Wendepunkte!)

Grenzwerte von Brüchen:

Problem: z.B.: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$?

Regel von l'Hôspital:

$f(b) = g(b) = 0$ (g, f diff-bar)

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(b)}{g'(b)} \quad (g'(b) \neq 0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$\rightarrow$ Statt im Quotienten der Funktionen kann man im Quotienten der Ableitungen nachschauen!

Taylor-Entwicklung

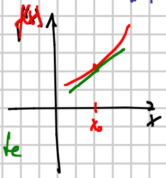
Idee: Annäherung einer Fkt. $f(x)$ durch ein Polynom $P_n(x)$

Vollständige "Nachbildung" von $f(x)$ durch unendliche Reihe $\lim_{n \to \infty} P_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

lineare Approximation: Entwicklung um x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$\rightarrow$ Annäherung durch Tangente



quadratisch: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x)}{2}(x - x_0)^2$?

(Wenn es ein optimales Polynom $p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)$ gibt, dann ist $p_2'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) \rightarrow a_1 = p_2'(x_0)$

und $p_2''(x) = 2a_2 \rightarrow a_2 = p_2''(x_0)/2$)

allgemein: $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$ Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \mathcal{O}\left((x - x_0)^{m+1}\right)$$ Taylor Entwicklung bis zur Ordnung n

$\rightarrow$ Restglied enthält mindestens Term der Ordnung $(x - x_0)^{n+1}$ $\rightarrow$ "Fehler" durch Restglied $r_m(x)$

genauer:

$$f(x) - P_m(x) =: r_m(x) \leq \max \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \qquad (0 < \theta < 1)$$

erzeugt Punkt zwischen x_0 und x

Abschätzung: "Ungünstigster Beitrag des ersten weggelassenen Gliedes zwischen x_0 und x"

Nicht jede Taylor-Entwicklung muss konvergieren!

Aber: Nach Quotientenkriterium (s. "Reihen") konvergent falls:

$$\left|\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \cdot (n+1)!}{f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}\, n!} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)} \frac{(n+1)}{(x - x_0)} \right| \geq q > 1$$

oder: $$|x - x_0| \overset{!}{<} R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)}(n+1) \right|$$

Konvergenzradius R

Bsp: $f(x) = \sin(x)$ $\longrightarrow$ Taylorentwicklung um $x_0 = 0$

$f(0) = \sin(0) = 0$

$f'(0) = \cos(0) = 1$

$f''(0) = -\sin(0) = 0$

$f^{(4)}(0) = -\cos(0) = -1$

$\vdots$

$\longrightarrow f(x) = 0 + 1\cdot x^1 - 0\cdot x^2 - 0\cdot x^3 + \mathcal{O}(x^4)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x)$

Konvergenz? Quotient aufeinander folgender Glieder: $\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \left|\frac{2k+3}{x^2}\right|$

$|x|^2 \; R^2 < \lim_{k\to\infty} |2k+1| \to \infty$ ✓

$R \downarrow \infty$ konvergiert für alle x

Fehler: $\sin x - p_n(x) \leq \max |p_{n+1}(\xi)|_{[-x,x]} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

Vorsicht!

$n=4$ | $x := 0{,}1$ | $|p_5| < \frac{1\cdot 10^{-5}}{120} < 10^{-7}$

Immer in der Nähe des gesuchten Bereichs entwickeln, sonst kann Fehler groß werden!

$x := 2$ | $|p_5| < \frac{32}{120} \approx 0{,}26$