Komplexe Zahlen

19.09.2007

Bisher: Körper der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (eigentlich ausreichend zur Beschreibung natürlicher Messgrößen)

Jetzt: Körper der Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ (Warum? $\rightarrow$ Hilfsmittel zur Berechnung)

Bisher: $x^2 + 1 = 0 \rightarrow$ keine Lösung

Jetzt: $z^2 + 1 = 0 \rightarrow z_{1,2} = \pm i \Leftrightarrow i^2 := -1$

Imaginäre Einheit ("erfunden" von Euler)

Allgemein:
Jedes Polynom n-ten Grades $P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k = (z-z_1)(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)$ hat genau n komplexe Nullstellen

Fundamentalsatz der Algebra!

Potenzen von i

$i := +\sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \mid i^3 = i^2 i = -i \mid i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1 \mid \ldots$

$$i^{4n+1} = i$$
$$i^{4n+2} = -1$$
$$i^{4n+3} = -i$$
$$i^{4n+4} = 1$$

$(n \in \mathbb{N})$ $n \in \mathbb{Z}$

negative Potenzen: $i\,i^{-1} = 1 = i^4 = i\,i^3$

$\Rightarrow i^{-1} = i^3$

Allgemeine Def. der komplexen Zahlen:

$$\underbrace{z := x + iy}_{\text{komplexe Zahl}} \quad \Big| \; x, y \in \mathbb{R}$$

x Reelle Zahl
y Imaginäre Zahl

$\mathrm{Re}(z) = x$ Realteil von z | $\mathrm{Im}(z) = y$ Imaginärteil von z $\hookrightarrow \in \mathbb{R}$

Eine komplexe Zahl ist "2-dimensional" (2er-Tupel, Vektor in der Ebene, ...) $\Rightarrow$

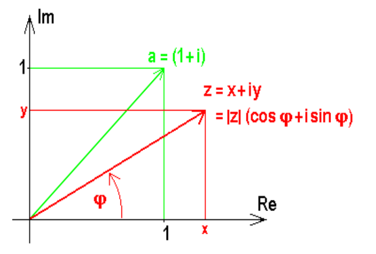
$z = w$ Gl. in $\mathbb{C}$

$\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, w$
$\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, w$ zwei Gl. in $\mathbb{R}$

$\Downarrow$ $1 := (1,0)$ $i := (0,1)$

Man trägt komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene auf:
kartesisches Koordinatensystem:
oder ebene Polarkoordinaten

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit $\tan\varphi = \frac{y}{x}$

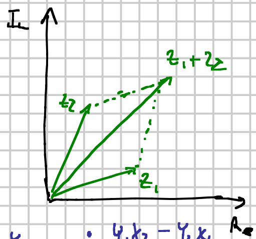


Auf dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ gelten die gleichen Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$!

(Unterschied: komplexe Zahlen lassen sich nicht anordnen $\Rightarrow$ Es gibt kein ">" oder "<")

$z_1 := x_1 + iy_1 \mid z_2 := x_2 + iy_2$

Addition / Subtraktion: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$



Multiplikation: $z_1 z_2 = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2$
$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$

Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{\underbrace{x_2 + iy_2}_{z_2}} \cdot \frac{(x_2 - iy_2)}{\underbrace{(x_2 - iy_2)}_{z_2^*}} = \underbrace{\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{\mathrm{Re}} + i \underbrace{\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}}_{\mathrm{Im}}$

Konjugiert komplex

$z^* := \mathrm{Re}\, z - \mathrm{Im}\, z$
(i wird zu (−i))

$$z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 \cancel{+xy} \cancel{-iy} - i^2 y^2 = x^2 + y^2 \quad \text{(kart.)}$$

$$= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) \quad \text{(polar)}$$

$$= |z|^2 (\cos^2\varphi + \cancel{i\sin\varphi\cos\varphi} - \cancel{i\sin\varphi\cos\varphi} \underset{+}{-} i^2 \sin^2\varphi) = |z|^2$$

→ Das Produkt einer Zahl mit ihrer konj. kompl. ergibt ihr Betragsquadrat (reell!)
(Betrag := Länge des Vektors in der Gaußschen Ebene)

Analog: $\frac{z+z^*}{2} = \mathrm{Re}\, z$, $\frac{z-z^*}{2} = \mathrm{Im}\, z$

(Im $z \neq 0$:) Und $z^2 \neq |z|^2$
z.B.: $(i)^2 = -1$
$|i|^2 = i(-i) = 1$
aber: $|z^2| = |z|^2$

Die Eulerformel ("macht das Rechnen einfach")

$$\boxed{\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}}$$

Beweis:

$$f'(x) = \lambda f(x) \;\wedge\; f(0) = 1 \implies f(x) = e^{\lambda x}$$

- $f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow f'(\varphi) = -\sin\varphi + i\cos\varphi = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = i f(\varphi)$
- $f(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 0$

$$\implies \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{\lambda x} \text{ mit } \lambda = i \qquad \text{q.e.d.}$$

Alternativ: Taylor-Reihen

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n x^n$$

n gerade, n ungerade, $\left((-1)^k = i^{2k}\right)$

$$\cos\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k!} (-1)^k \varphi^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k!} i^{2k} \varphi^{2k}$$

$$i\sin\varphi = i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k \varphi^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} i^{2k+1} \varphi^{2k+1}$$

Div. Implikationen:

K.k.: $(e^{i\varphi})^* = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^* = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}$

$e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + n2\pi)}$ (2π periodisch)

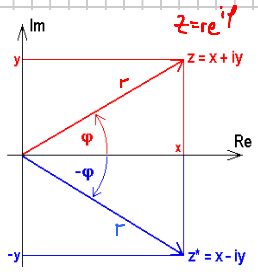
Trigon. Fkt.

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cosh i\varphi = \mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \cos\varphi$$

$$\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = -i\sinh i\varphi = \mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \sin\varphi$$

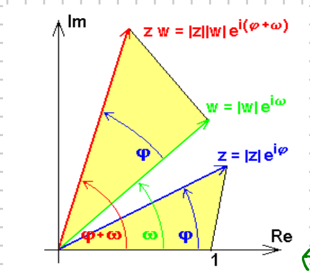
$$\boxed{z = x + iy = re^{i\varphi}} \quad \text{mit } \tan\varphi = \frac{y}{x} \text{ und } r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$z = re^{i\varphi}$



$z^* = e^{-i\varphi}$

Multiplikation komplexer Zahlen wird anschaulich:



↳ Addition der Winkel
Multiplikation der Beträge
→ "Dreh-Streckung"

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2))$$

← (Bem: Dreiecke sind kongruent!)

Wurzeln: Es gibt immer n verschiedene n-te Wurzeln:

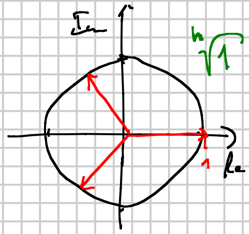
$$\left(\sqrt[n]{re^{i\varphi}}\right) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi/n} =: w e^{i\psi_k}$$

$\Rightarrow$ $w = \sqrt[n]{r}$,

wegen $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + 2\pi k)}$ 2π-Periodizität:

$$n\cdot\psi \overset{!}{=} \varphi + 2\pi k$$

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} = \psi_k \quad (k = 1, \dots, n-1)$$



$\sqrt[n]{1}$ $\quad e^{i\varphi_{1,2,3}}$

$\varphi_1 = 0$

$\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$

$\varphi_3 = \frac{2\pi}{3}\cdot 2$

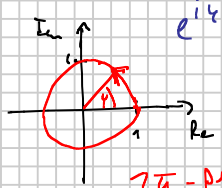
(Bem: $\sum_{k=1}^{n} w_k = 0$)

Exponentialfkt:

$(z = t + i\psi)$ $\quad w = e^z = e^{t+i\psi} = e^t e^{i\psi} = |w|\, e^{i\varphi_w}$

$\Rightarrow$ e^t

$e^{i\psi} = e^{i(\psi + 2\pi)}$



2π-periodisch

Potenzen:

(Formel von Moivre)

$$z^n = |z|^n (e^{i\varphi})^n = |z|\, e^{in\varphi}$$

$$= |z|^n (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

oder:

"Additionstheoreme der e-Fkt."

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta} \Longleftrightarrow \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

ausmultiplizieren & Re bzw. Im gleichsetzen

Trigonometrische Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Fazit: Trigonometrische Fktn. werden durch Euler-Formel viel leichter handhabbar

$e^{i\varphi}$ $\rightarrow$ "leicht abzuleiten $d/d\varphi$ ..."

"leicht zu multiplizieren (→ Summe der Winkel)"

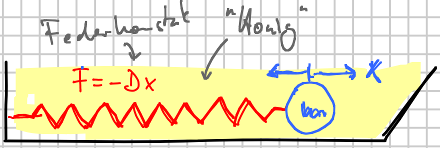
$\Rightarrow$ komplexe Zahlen sind gut geeignet um physikalische Prozesse (vor allem "Schwingungen / Wellen") zu beschreiben

z.B. Mechanik, E.-Dynamik, Quantenmechanik, ...

(wobei die eigentlichen Meßgrößen aber reell sind!)

Ein Beispiel aus der Physik:
(Und ein Ausblick auf Differentialgleichungen)

Das Federpendel:



"Kräftebilanz"
(Newtonsche Bew.-Gl.) $\quad m\cdot\ddot{x} = -Dx - \Gamma\dot{x}$

Rückstellkraft $\quad$ viskose Reibung (proport. zu v)

$\Rightarrow m\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + Dx = 0$

$\ddot{x} + \frac{\Gamma}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0$

$\Gamma/m = 2\gamma$

$D/m = \omega^2$ $\quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x$

Lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung

- Lineare: ↳ nur $x, \dot{x}, \ddot{x}$ ($\cancel{x^2}$, $\cancel{\sin x}$, $\cancel{\ldots}$)
- homogene: ↳ keine andere Fktn. $f(t)$
- Differentialgleichung: ↳ Funktion $x(t)$ und ihre Ableitungen kommen in ein und derselben Gl. vor
- 2. Ordnung: ↳ $x, \dot{x}, \ddot{x}$ bis zur 2. Ableitung

Lin. hom. DGl. 2. Ordn.

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega^2\right)x = 0 \qquad (x = x(t))$$

→ $x=0$ → "langweilig"

↳ Klammer wird nur 0 für alle t, wenn x und die Ableitungen bis auf Vorkoeff. die gleiche Fkt. sind und die Summe der Koeffizienten 0 wird!

$\Longrightarrow e^{zt}$

$(e^{zt})^{\cdot} = z e^{zt}$

mit $\frac{d}{dx} \Rightarrow z \Rightarrow z^2 + z\,2\gamma + \omega^2 \overset{!}{=} 0$

a,b,c-Formel (a = 1) $\quad z_{1,2} = -\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ $\quad$ zwei Lösungen

$$\Rightarrow x(t) = A\cdot e^{z_1 t} + B e^{z_2 t}$$

Linearkombination aus beiden Lösungen

A und B bestimmt durch Randbedingungen
(z.B. $x(t=0) = x_0$ Anfangsauslenkung)

Wir diskutieren 2 Grenzfälle:

1) $\gamma \gg \omega$: "Der Dämpfungsterm dominiert" (→ Honig)

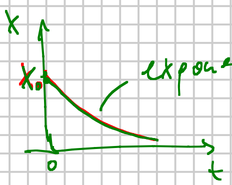
$z_{1,2} \to -\gamma \mp \gamma \Rightarrow z_1 = -2\gamma$ $\quad$ ($z_2 = 0$)
→ x = konst.
$\dot{x} = 0$
nur in Ruhelage

$x = A\cdot e^{-2\gamma t}$

$\dot{x} = -2A\gamma e^{-2\gamma t}$

$\ddot{x} = -4A\gamma^2 e^{-2\gamma t}$

Randbedingung:
z.B. $x(0) =: x_0 \to A = x_0$



exponentielles "Kriechen" hin zur Gleichgewichtslage
überdämpfte "Schwingung"
∘ aperiodische —
∘ Relaxation

2) $\omega \gg \gamma$ „Die Dämpfung ist vernachlässigbar" (Luft)

$\Rightarrow z_{1/2} \to \mp\sqrt{-\omega^2} = \mp i\omega$

↳ Drehsinn in der Gaußschen Ebene: physikalisch nicht relevant

Oszillation: $x = A e^{i\omega t}$

$\omega :=$ Kreisfrequenz

$= |A| e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = |A| \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$

Physikalisch: Realteil relevant

$$\mathrm{Re}(x) = \frac{x + x^*}{2} = |A| \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Amplitude Phase

aus Rand- bzw. Anfangsbedingungen

„Ungedämpfte harmonische Schwingung"

z.B. $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ $\Rightarrow$ $\varphi_0 = 0$, $|A| = x_0$

3) „(Schwach) gedämpfte harmonische Schwingung":

$x = x_0 e^{-2\gamma} \cos(\omega t + \varphi_0)$ mit $\omega = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$