

Mathematische Methoden in der Physik

A. Klümper

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

Inhaltsverzeichnis

1	Notationen	3
2	Lineare Algebra	4
	2.1 Vektorrechnung	4
	2.2 Lineare Abbildungen	6
3	Differentialrechnung	10
4	Integralrechnung	12
5	Gewöhnliche Differentialgleichungen	16
6	Vektoranalysis	25
7	Mehrdimensionale Integrale	33
8	Kepler-Problem	43
9	Der starre Körper	50
10	Statistik	56

1 Notationen

In der naturwissenschaftlichen Literatur benutzte griechische Symbole:
Alpha α , Beta β , Gamma γ , Delta δ , Δ , Epsilon ϵ , Zeta ζ , Eta η , Theta θ ,
 Θ , Iota ι , Kappa κ , Lambda λ , Λ , My μ , Ny ν , Xi ξ , (Omikron), Pi π , Π ,
Rho ρ , Sigma σ , Σ , Tau τ , (Ypsilon), Phi ϕ , Φ , Chi χ , Psi ψ , Ψ , Omega ω ,
 Ω

2 Lineare Algebra

2.1 Vektorrechnung

Definition: Vektorraum

Ein reeller Vektorraum ist eine Menge V , deren Elemente Vektoren genannt werden, zusammen mit einer Addition $+$ und einer Multiplikation mit reellen Zahlen ("skalare Multiplikation") die folgenden Axiomen genügen

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= v_2 + v_1 && \text{(Kommutativgesetz)} \\ v_1 + (v_2 + v_3) &= (v_1 + v_2) + v_3 && \text{(Assoziativgesetz)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Es gibt einen "Nullvektor" 0 , charakterisiert durch

$$v + 0 = 0 + v = v \quad (2.2)$$

Zu jedem Vektor v gibt es einen entgegengesetzten Vektor $-v$, so daß

$$v + (-v) = (-v) + v = 0 \quad (2.3)$$

Ein solches algebraisches System heißt kommutative oder abelsche Gruppe. Ferner:

$$\begin{aligned} r(v_1 + v_2) &= (rv_1) + (rv_2) && r, s \in \mathbb{R} \\ (r + s)v &= (rv) + (sv) \\ (rs)v &= r(sv) \\ 1v &= v \end{aligned} \quad (2.4)$$

Beispiel: Der Prototyp eines (endlichdimensionalen) Vektorraums ist der Raum der n -Tupel \mathbb{R}^n , d.h. der Menge der "Schemata" (x_1, \dots, x_n) mit $x_i \in \mathbb{R}$. Alle Operationen elementweise, d.h. $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

Elemente eines Vektorraums werden häufig durch "kleine Buchstaben" $a, b (\in V)$, insbesondere mit r für Ortsvektor, v für Geschwindigkeitsvektor, gekennzeichnet. Evtl. mit Pfeil \vec{r}, \vec{v} oder auch $\underline{r}, \underline{v}$.

Definition: Basis, Dimension, Lineare (Un-) Abhängigkeit

Ein Vektorraum V heißt endlichdimensional, wenn es endlich viele Vektoren v_1, \dots, v_n gibt, die V aufspannen in dem Sinne, daß zu jedem $v \in V$ (reelle) Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ existieren, so daß $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Jedes Erzeugendensystem v_1, \dots, v_n mit minimaler Anzahl n heißt Basis, n ist die "Dimension" von V . Eine Basis besteht aus linear unabhängigen Vektoren, d.h. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ ist nur lösbar mit $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Bemerkung: Durch Auszeichnung einer Basis erfolgt die Darstellung von Vektoren irgendeines Vektorraumes (Menge der Polynome ...) in n -Tupeln.

Die Elemente des n -Tupels werden die Komponenten oder Koordinaten eines Vektors genannt.

Definition: Skalarprodukt (Inneres Produkt)

Positiv definite, symmetrische bilineare Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aus $V \times V$ in \mathbb{R} , d.h. für $v_1, v_2, v \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_2, v_1 \rangle \\ \langle \lambda v_1 + \mu v_2, v \rangle &= \lambda \langle v_1, v \rangle + \mu \langle v_2, v \rangle \\ \langle v, v \rangle &\geq 0, \quad \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Beispiel: Standard-Skalarprodukt Für n -Tupel $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \tag{2.6}$$

Beispiel: Ist im \mathbb{R}^2 folgende Form ein Skalarprodukt?

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2 \tag{2.7}$$

Antwort: Ja. Positive Definitheit: $\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2$.

Bemerkung:

Für $\vec{v}, \vec{w} \in V$ schreibt man auch $\vec{v} \cdot \vec{w}$ anstelle $\langle v, w \rangle$.

Die "Norm" (Länge, Betrag) $|v|$ eines Vektors v ist durch $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ definiert.

Wir werden häufig die Beträge von Ortsvektoren \vec{r} und Geschwindigkeitsvektoren \vec{v} durch r und v bezeichnen.

Der Winkel θ zwischen zwei Vektoren \vec{v}, \vec{w} , ist def. durch $\vec{v} \cdot \vec{w} = |v||w| \cos \theta$.

Falls $\theta = \pi/2$ heißen die Vektoren orthogonal.

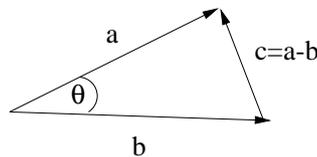
Zu einem vorgegebenen Vektor \vec{r} definieren wir den "Einheitsvektor \hat{r} in Richtung \vec{r} " durch

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.8}$$

Beispiel: Anwendung des Skalarproduktes (Cos-Satz)

Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ definieren die Seiten eines Dreiecks. Es gilt $\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$, woraus folgt

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta_{a,b} = c^2 \tag{2.9}$$



Definition: Euklidischer Raum, Orthonormale Basis

Ein euklidischer Vektorraum ist ein Vektorraum ausgestattet mit einem Skalarprodukt. Eine orthonormale Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ ist wie oben definiert mit der zusätzlichen Eigenschaft $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{i,j}$, d.h. gleich 1 für $i = j$ und 0 sonst.

Bemerkung: Nach Auszeichnung einer orthonormalen Basis und Darstellung von Vektoren durch n -Tupel bzgl. dieser Basis nimmt das Skalarprodukt von $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i \in V$ folgende Form an: $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_i y_i$, wobei in der letzten Notation die "Einsteinsche Summenkonvention" benutzt wurde.

2.2 Lineare Abbildungen**Definition:** Lineare Abbildung

Seien zwei Vektorräume V, W gegeben. Eine Abbildung $A : V \rightarrow W$ heißt linear, wenn für $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$A(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda A v_1 + \mu A v_2 \quad (2.10)$$

Hier ist die übliche verkürzte Notation $Av = A(v)$ für lineare Abbildungen benutzt worden. Beachte: V und W können unterschiedlich dimensional sein.

Die Menge aller linearen Abbildungen $V \rightarrow W$ bildet selbst einen linearen Raum (Vektorraum). Dabei ist die Summe zweier Abbildungen A und B definiert durch die Wirkung auf ein beliebiges $v \in V$

$$(A + B)v = Av + Bv \quad (2.11)$$

Analog ist für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Abbildung λA definiert, d.h. $(\lambda A)v = \lambda(Av)$.

Definition: Komposition

Die Komposition oder Verkettung AB von linearen Abbildungen $B : V \rightarrow V'$ $A : V' \rightarrow V''$ ist durch die Wirkung auf ein beliebiges $v \in V$ definiert

$$(AB)v = A(Bv) \quad (2.12)$$

Bemerkung: Die Komposition von linearen Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung. Beachte: im allgemeinen macht nur AB (wie oben) Sinn, nicht jedoch BA . Warum? Beachte: Falls $V = V' = V''$, sind BA und AB definiert, aber im allgemeinen gilt $BA \neq AB$.

Definition: Matrizen

Ein "Rechteckschema" $(A_{i,j})_{\substack{i=1,r \\ j=1,s}}$ mit $r \cdot s$ -vielen Zahlen $A_{i,j}$ heißt $r \times s$ -Matrix. Beispiel einer 3×3 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Die Indizes i und j heißen Zeilen- und Spalten-Index.

Beispiel: Einheitsmatrix, Kronecker-Delta für quadratische Matrizen
Für $r = s = 3$ (allg. Fall offensichtlich)

$$(\delta_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (2.14)$$

Definition: Produkt zweier Matrizen

Seien A und B Matrizen mit Dimension $r \times s$ und $s \times t$, dann ist das Produkt AB definiert als $r \times t$ -Schema, wobei das (i, k) -te Element gegeben ist durch

$$(AB)_{i,k} = \sum_{j=1,s} A_{i,j} B_{j,k} (= A_{i,j} B_{j,k}) \quad (2.15)$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + b & 4a - b \\ 3c + d & 4c - d \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Beachte: Das Produkt von mehr als zwei Matrizen ist in analoger Weise definiert und es gelten

$$A(BC) = (AB)C, \quad A(B + C) = AB + AC, \quad AB \neq BA \text{ (im allgemeinen)} \quad (2.18)$$

Bemerkung: Das Produkt einer $r \times s$ -Matrix mit einem s -Tupel ist definiert im obigen Sinne, wobei das s -Tupel als $s \times 1$ -Matrix verstanden wird.

Definition: Transposition, Inverse

Für jede $r \times s$ Matrix A wird eine $s \times r$ Matrix A^T durch $(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$ definiert. Falls eine Inverse zu A existiert, heißt A regulär, andernfalls singulär. Die Inverse wird durch A^{-1} bezeichnet und erfüllt $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Bemerkung: Matrizen finden große Bedeutung als Koordinatendarstellung von linearen Abbildungen im folgenden Sinn: sei $A : V \rightarrow V'$ eine lineare Abbildung wie oben und e_1, \dots, e_r eine Basis von V und e'_1, \dots, e'_r eine Basis von V' . Sei $A_{i,j}$ definiert als die i -te Komponente von Ae_j bzgl. e'_1, \dots, e'_r .

Sei nun $v \in V$ und das r -Tupel $(v_1, \dots, v_r)^T$ eine Koordinatendarstellung von v . Dann ist $\sum_{j=1}^r A_{i,j} v_j$ die i -te Komponente von Av !

Die gesamte lineare Algebra kann damit auf Matrizen-Manipulationen reduziert werden!

Definition: Determinante von quadratischen Matrizen und linearen Abbildungen $V \in V$ (“alternierende Multilinearformen der Spaltenvektoren”)
Definition für 2×2 und 3×3 -Matrizen

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (2.19)$$

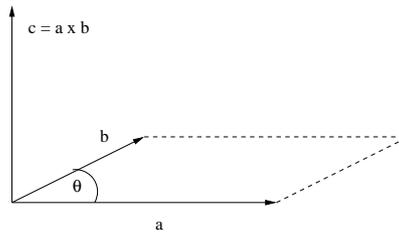
$$\text{Det} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \quad (2.20)$$

Bemerkung: Eine Matrix A ist genau dann regulär, wenn $\text{Det}A \neq 0$.

Definition: Kreuzprodukt (im 3-dim euklidischen Raum)

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} in \mathbb{R}^3 ist definiert als der Vektor \vec{c} , der

- (i) orthogonal zu \vec{a} und \vec{b} steht,
- (ii) dessen Länge c dem Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms entspricht ($= ab \sin \theta_{a,b}$), und
- (iii) dessen Vorzeichen sich aus der “Rechte-Hand-Regel” ergibt: \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} sind zueinander wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand angeordnet.



In Formeln (bzgl. orientierter Orthonormalbasis)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Beachte: aus der ersten Komponente ergeben sich die restlichen durch zyklisches Vertauschen. Das Kreuzprodukt von höherdimensionalen Vektoren ist nicht definiert. (Tatsächlich werden Sie in der Analysis im Zusammenhang von alternierenden Multilinearformen auch das allg. Kreuzprodukt kennenlernen. Dieses bildet jedoch im allg. nicht zwei n -dim. Vektoren auf einen

weiteren n -Vektor ab!)

Zerlegungssatz etc.:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})]\vec{c} - [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})]\vec{d} \\ \vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] &= (\vec{a} \times \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \times \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Definition: Spatprodukt

Für drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus dem 3-dim eukl. Raum definieren wir das Spatprodukt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \text{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad (2.23)$$

Bemerkung: Das Spatprodukt liefert das Volumen des Parallelepipeds, das durch die drei Vektoren aufgespannt wird. Die Verallgemeinerung auf n -Dimensionen ist klar!?

Schlußbemerkung: Wir haben den Schnelldurchgang der linearen Algebra an den üblichen Aufbau der Mathematik gehalten. Der Grund war letztendlich von physikalischer Natur: wir haben Vektoren und lineare Abbildungen eingeführt, wobei Vektoren physikalische Observable kodieren und Abbildungen Zusammenhänge ausdrücken. Wir haben dann n -Tupel und Matrizen als Koordinatendarstellungen von Vektoren und lin. Abbildungen eingeführt ohne weitere Kommentare.

Vielfach (insbes. in der älteren Literatur) findet man einen Aufbau, der von Beginn an n -Tupel und Matrizen in den Mittelpunkt stellt. Der physikalische Gehalt (Unabhängigkeit von speziellen Koordinaten bzw. Basen) wird dann durch Formulierungen ausgedrückt wie *ein Vektor ist ein Zahlentriplet, das sich bei einem Wechsel des Koordinatensystems so transformiert wie die Komponenten des Ortsvektors* etc. Diese obskure Beschreibung ist bei uns überflüssig.

Ausblick: Durch einen geeigneten Aufbau können Zahlen (Skalare), Vektoren und lineare Abbildungen als Tensoren 0., 1. und 2. Stufe erklärt werden. Natürlich gibt es Tensoren n . Stufe, die als multilineare Abbildungen eines Raumes $V_1 \times \dots \times V_n$ in \mathbb{R} definiert sind, oder in Koordinatendarstellung als Zahlenschemata mit n Indizes.

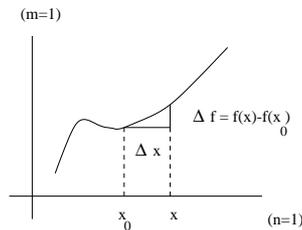
3 Differentialrechnung

Wir wollen Funktionen $f : V \rightarrow R^m$ betrachten, wobei V gleich R^n ist oder eine Untermenge davon. Sei ferner x_0 ein Punkt aus V .

Definition: f heißt differenzierbar (ableitbar) in x_0 , wenn $f(x) - f(x_0)$ bei x_0 durch eine lineare Abbildung A approximiert werden kann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0 \quad (3.1)$$

Bemerkung: Falls wir es mit skalaren Funktionen zu tun haben ($n = m =$



1) und auch allgemein für $n = 1$ kann die bekannte Formel für den Differenzenquotienten formuliert werden. In diesem Fall ist A einfach durch die Steigung der Tangente an die Funktion f gegeben.

Im allgemeinen heißt die lineare Abbildung A das *Differential* (Ableitung) von f in x_0 und wird dann mit df gekennzeichnet.

Durch diese Definition wird einer Funktion f eine neue Funktion zugeordnet überall dort, wo die Ableitung definiert ist. Für $n = 1$ wird die neue Funktion f' oder $\frac{df}{dx}$ genannt und liefert die Werte der Tangentensteigung. Für den allgemeinen Fall wird df definiert, wir werden noch andere Notationen kennenlernen.

Beispiel: Ableitungen von speziellen Funktionen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^n &= nx^{n-1} \\ \frac{d}{dx} e^x &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x \\ \frac{d}{dx} \ln x &= \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx} \sin x &= \cos x \\ \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x \\ \frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x \end{aligned} \tag{3.2}$$

Rechenregeln: Produkt-, Quotienten-, Ketten-Regel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= f'(x) + g'(x) \\ \frac{d}{dx}[\lambda f(x)] &= \lambda f'(x) \\ \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ \frac{d}{dx} f[g(x)] &= f'(g(x))g'(x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Beispiel: Ableitungen von Umkehrfunktionen

Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f , d.h. $f^{-1}(f(x)) = x$. Mit $y := f(x)$ (auch $x = f^{-1}(y)$) und Kettenregel folgt $(f^{-1})'(y)f'(x) = 1$, also

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \tag{3.4}$$

Leichter zu merken:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{3.5}$$

Anwendung: $f(x) = e^x = y$ und $f^{-1}(y) = \ln y = x$,

$$\frac{d \ln y}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} \tag{3.6}$$

Bemerkung: 1. und 2. Ableitungen des Weges \vec{s} nach der Zeit t ergeben Geschwindigkeit \vec{v} und Beschleunigung \vec{a}

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{\vec{s}}, \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = \ddot{\vec{s}} \tag{3.7}$$

Die auf ein Teilchen mit Masse m wirkende Kraft \vec{F} , die zur Beschleunigung $\ddot{\vec{s}}$ führt ist $\vec{F} = m\ddot{\vec{s}}$.

Beispiel: Schraubenlinie im \mathbb{R}^3

Betrachtet werde der folgende Weg $\vec{s}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, vt)$, der eine Schraubenlinie mit Radius R um die z -Achse mit (Umlauf-) Winkelgeschwindigkeit ω und Driftgeschwindigkeit v entlang der z -Achse.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{s}} &= (-\omega R \sin \omega t, \omega R \cos \omega t, v) \\ \ddot{\vec{s}} &= -\omega^2 (R \cos \omega t, R \sin \omega t, 0) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Beispiel: Sei $\vec{r}(t)$ ein Vektor mit zeitlich konstantem Betrag (auf Sphäre), dann gilt

$$0 = \frac{d}{dt}r^2 = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)) = 2\vec{r}(t)\dot{\vec{r}}(t) \quad (3.9)$$

Die Ableitung steht \perp auf dem Vektor! Wo ist dies bei der Schraubenlinie gegeben? (Bei " $\vec{r} = \vec{s}$ ").

Bemerkung: Das Differential einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in einem Punkt (x_1, \dots, x_n) ist in Koordinatendarstellung durch eine $m \times n$ -Matrix gegeben, wobei der j -te Spaltenvektor durch die "partielle Ableitung" gegeben ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} =: \left. \frac{df}{dx_j} \right|_{\substack{\text{alle } x_1, \dots, x_n \\ \text{bis auf } x_j \text{ fest}}} \quad (3.10)$$

Beachte: für "praktische" Rechnungen ist hierdurch das allgemeine Differential auf die Ableitung von "skalaren Funktionen" einer "skalaren" Variablen zurückgeführt.

Definition: Höhere Ableitungen

Durch $f^{(n)}$ wird die n . Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ gekennzeichnet, die rekursiv durch $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ definiert ist. Alternative Notation $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Definition: Stammfunktion

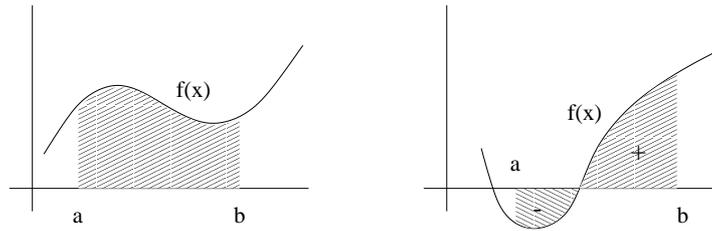
Sei $f(x)$ eine gegebene Funktion, dann heißt eine Funktion $F(x)$ Stammfunktion von f , wenn $F'(x) = f(x)$. Falls eine Stammfunktion existiert, gibt es unendlich viele, die sich alle nur durch eine Konstante unterscheiden.

4 Integralrechnung

Wir betrachten hier Funktionen f von \mathbb{R} in \mathbb{R} . Wir werden auch annehmen, daß derartige Funktionen hinreichend "regulär" sind, d.h. im wesentlichen stetig. Derartige Funktionen können durch Treppenfunktionen (stückweise konstant) approximiert werden. Über diesen Umweg kann in naheliegender Weise das Integral $\int_a^b f(t)dt$ als Fläche unter dem Graphen zwischen den Argumenten a und b definiert werden.

In der Mathematik werden Sie einen allgemeineren Integralbegriff kennenlernen, den des Riemann- und vor allem des Lebesgue-Integrals, die auch für nicht-stetige Funktionen erklärt sind.

Wir wollen uns nicht mit Details der Existenz und Eindeutigkeit beschäftigen, sondern direkt den Fundamentalsatz der Analysis:



- (i) Jede stetige Funktion $f(x)$ hat eine Stammfunktion, nämlich das Integral $\int_a^x f(t)dt$.
- (ii) Ist F eine beliebige Stammfunktion, so ist das Integral von f gegeben durch $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Bemerkung: Wir können nicht einen vollständigen Beweis liefern. Zur Einsicht in die allg. Zusammenhänge ist jedoch folgender Physikerbeweis instruktiv.

(a) Wir überlegen zunächst daß für a, b, c aus dem Definitionsbereich einer integrierbaren Funktion f gilt

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt, \tag{4.11}$$

diese Beziehung gilt auch, wenn in einem der Integrale die "untere Grenze $>$ obere Grenze" gilt, durch folgende Setzung

$$\int_a^b f(t)dt := - \int_b^a f(t)dt, \quad (a > b) \tag{4.12}$$

und offenbar $\int_a^a f(t)dt = 0$.

(b) Sei eine Funktion $g(x) := \int_a^x f(t)dt$ gegeben. Wir wollen den Differenzenquotienten berechnen

$$g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt \simeq (x - x_0)f(x) \Rightarrow g'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f(x), \tag{4.13}$$

damit ist g eine Stammfunktion von f wie behauptet. Aus dem Physikerbeweis wird ein Mathematikerbeweis, wenn der Mittelwertsatz benutzt wird und oben im Differenzenquotienten $f(x)$ durch $f(x_m)$ ersetzt wird, wobei sich x_m zwischen x_0 und x befindet und statt \simeq dann $=$ geschrieben werden kann.

Beispiel:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$$

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) \Big|_a^b = \arctan(b) - \arctan(a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad (4.14)$$

Bemerkung: Im letzten Beispiel wurde ein “uneigentliches Integral” als Grenzprozeß eines “bestimmten Integrals” berechnet.

In der Praxis läuft die Berechnung des Integrals auf das Aufsuchen der Stammfunktion hinaus. Im Gegensatz zum Differenzieren, wobei “jede Kombination von elementaren Funktionen” abgeleitet werden kann, stellt man häufig fest, daß das Integral selbst von “einfachen Funktionen” nicht in “geschlossener Weise” angegeben werden kann. Ausnahmen:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x \quad (+C) \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x \text{ oder } -\arccos x \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x \\ \int \frac{1}{\sin x} dx &= \ln \tan \frac{x}{2} \\ \int \sinh x dx &= \cosh x \\ \int \cosh x dx &= \sinh x \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ \int \frac{1}{1-x^2} dx &= \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \\ \int \tanh x dx &= \ln \cosh x \\ \int \tan x dx &= -\ln \cos x \\ \int \coth x dx &= \ln \sinh x \\ \int \cot x dx &= \ln \sin x \\ \int \frac{1}{\sinh x} dx &= \ln \tanh \frac{x}{2} \\ \int \frac{1}{\sinh^2 x} dx &= -\coth x \\ \int \frac{1}{\cosh^2 x} dx &= \tanh x \end{aligned} \quad (4.15)$$

Rechenregeln

$$\int_a^b [f_1(t) \pm f_2(t)] dt = \int_a^b f_1(t) dt \pm \int_a^b f_2(t) dt \quad (4.16)$$

$$\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt \quad (4.17)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad \frac{d}{dx} \int_x^a f(t) dt = -f(x) \quad (4.18)$$

Substitutionsregel

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = \int_a^b f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt \quad (4.19)$$

Grund: Sei $F(x)$ die Stammfunktion zu $f(x)$, dann ist die linke Seite $F(x(b)) - F(x(a))$. Ferner ist $F(x(t))$ Stammfunktion zu $f(x(t)) \frac{dx}{dt}$ und damit ist die rechte Seite gleich $F(x(b)) - F(x(a))$ und die Identität bewiesen.

Beispiel:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt \quad (4.20)$$

Partielle Integration

$$\int_a^b \frac{df}{dx} g dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b f \frac{dg}{dx} dx \quad (4.21)$$

Grund: Nach Produktregel der Differentialrechnung sind die Ableitungen beider Seiten, betrachtet als Funktionen von b , identisch. Ferner liefern beide Seiten für $b = a$ das Ergebnis 0. Damit gilt Gleichheit für alle b .

Beispiel:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \sin(t) \cos(t) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sin^2(t)) dt \quad (4.22)$$

Es folgt $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(t) dt$. Da $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, folgt $2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dt = \pi$ und ferner $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \pi/2$.

Logarithmische Integration (Anwendung der Substitutionsregel mit $f(x) \rightarrow 1/x$ und $x(y) \rightarrow f(y)$)

$$\int_a^b \frac{f'(y)}{f(y)} dy = \ln f(y) \Big|_a^b \quad (4.23)$$

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition: Sei $f(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion (evtl. def. auf offener Teilmenge D von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$), dann heißt

$$y' = f(x, y) \quad (5.24)$$

(gewöhnliche) Differentialgleichung 1. Ordnung (DGL). Unter einer Lösung versteht man eine Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, deren Graph im Definitionsbereich von f liegt, und ferner erfüllt $y'(x) = f(x, y(x))$.

Beispiel: DGL $y' = 2xy$ hat Lösung $y(x) = \lambda \exp(x^2)$ mit beliebigem, aber festem $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definition: Das sog. "Anfangswertproblem" besteht aus DGL und der Vorgabe einer Anfangsbedingung (x_0, y_0) aus D . Dabei hat eine Lösung $y(x)$ sowohl die DGL als auch $y(x_0) = y_0$ zu erfüllen.

Beispiel: Offenbar ist mit obiger DGL jede Anfangsbedingung eindeutig erfüllbar mit $\lambda = y_0 \exp(-x_0^2)$.

Die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu Anfangswertproblemen ist interessant. Wir notieren:

- (i) Ist f wie oben stetig, so existiert mindestens eine Lösung $y(x)$, wobei der Definitionsbereich von $y(x)$ evtl. ein (kleines) Intervall um x_0 ist.
- (ii) Ist $f(x, y)$ außerdem nach y stetig partiell differenzierbar (d.h. $\partial f / \partial y$ existiert und ist eine stetige Funktion von (x, y)), so ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig.

Beispiel: DGL $y' = 2\sqrt{|y|}$ und Anfangsbedingung $(0, 0)$, d.h. Forderung $y(0) = 0$, hat unendlich viele Lösungen, z.B. $y_1(x) = 0$ für alle x und $y_2(x)$ stückweise definiert durch

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \end{cases} \quad (5.25)$$

Wir wollen nun spezielle DGL-Typen besprechen, die häufig eine konkrete Lösung erlauben.

Lineare DGL " $f(x, y) = -a(x)y + g(x)$ " bzw. " $y' + a(x)y = g(x)$ "

Ist $g(x) = 0$ für alle x , so spricht man auch von "linear homogener", sonst von "linear inhomogener" DGL.

Wir überlegen zunächst, daß die allgemeine Lösung schrittweise gefunden werden kann:

- (i) Auffinden irgendeiner speziellen Lösung y_{sp} zum inhomogenen Problem $y' + a(x)y = g(x)$.
- (ii) Auffinden aller Lösungen zum homogenen Problem $y' + a(x)y = 0$.

Die allgemeinste Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich als Summe aus spezieller Lösung und bel. homogener Lösung (Superpositionsprinzip).

Ein **wichtiger Spezialfall** liegt vor mit:

$a(x) = a$, d.h. konstant, und $g(x) = \text{Exponentialfunktion} = g_0 \exp(-\mu x)$.
Lösung:

- (i) Ansatz für spezielle Lösung:

Exponentialfunktion proportional zur Inhomogenität $y_{sp}(x) = C \exp(-\mu x)$.
Einsetzen $(-\mu + a)C \exp(-\mu x) = g_0 \exp(-\mu x)$, folglich $C = g_0 / (a - \mu)$ und

$$y_{sp}(x) = \frac{g_0}{a - \mu} \exp(-\mu x) \quad (5.26)$$

- (ii) Ansatz für Lösung der homogenen DGL:

Exponentialfunktion $\exp(-\nu x)$ mit zu bestimmendem Exponenten. Einsetzen in hom. DGL liefert $(-\nu + a) \exp(-\nu x) = 0$, also $\nu = a$.

Die allgemeinste Lösung der inhomogenen DGL lautet:

$y(x) = y_{sp}(x) + \lambda \exp(-ax)$ mit beliebigem, aber festem λ .

Beispiel: Wir wollen eine radioaktive Substanz "I" betrachten, die zur Zeit $t = 0$ aus N_I Kernen besteht und sich mit der Rate a_I in eine Substanz "II" umwandelt, die selbst mit der Rate a_{II} zerfällt. Wir sind an der Anzahl $N_{II}(t)$ der Kerne der Substanz "II" als Funktion der Zeit interessiert.

Anzahl $N_I(t)$ nach Übungsaufgabe oder wie folgt:

Ratengleichung $\dot{N}_I(t) = -a_I N_I(t)$, linear homogen, also Lösung $N_I(t) = N_I \exp(-a_I t)$ (da $\dot{N}_I(t) = -a_I N_I \exp(-a_I t) = -a_I N_I(t)$). Der Koeffizient ist so gewählt, daß die Anfangsbedingung $N_I(0) = N_I$ erfüllt ist.

Ratengleichung für $N_{II}(t)$:

$$\dot{N}_{II}(t) = -a_{II} N_{II}(t) + a_I N_I(t) = -a_{II} N_{II}(t) + a_I N_I \exp(-a_I t) \quad (5.27)$$

Offenbar ist dies eine lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Inhomogenität vom Exponentialtyp.

- (i) Spezielle Lösung der inhomogenen DGL:

$$N_{sp}(t) = \frac{a_I N_I}{a_{II} - a_I} \exp(-a_I t) \quad (5.28)$$

- (ii) Lösung der homogenen DGL:

$$\exp(-a_{II}t) \quad (5.29)$$

Wir wollen nun kurz das Lösungsverfahren der **allgemeinen linearen DGL 1. Ordnung** besprechen.

zu (i): Sei $A(x)$ eine Stammfunktion zu $a(x)$. Ansatz: $y(x) = \exp(-A(x))z(x)$. Einsetzen in DGL

$$\begin{aligned} [-a(x) \exp(-A(x))z(x) + \exp(-A(x))z'(x)] + a(x) \exp(-A(x))z(x) &= g(x) \\ \Rightarrow z'(x) &= \exp(A(x))g(x) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Die letzte DGL wird gelöst durch bel. Stammfunktion $B(x)$ zu $\exp(A(x))g(x)$. Ergebnis: $y_{sp}(x) = B(x) \exp(-A(x))$. Verfahren bekannt als "Variation der Konstanten".

zu (ii): $y' + a(x)y = 0$ wird durch die Fkt. $\lambda \exp(-A(x))$ mit bel. konst. λ erfüllt.

Bemerkung: In der Terminologie der lin. Algebra stellt der Lösungsraum zum homogenen Problem einen 1-dim. Unterraum des (unendlichdimensionalen) Raumes aller Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dar. Der Lösungsraum zum inhomogenen Problem stellt einen 1-dim. affinen Unterraum des Raumes aller Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Aufpunkt y_{sp} dar. (Bem.: falls DGL 1. Ordnung für m -dim. vektorwertige Funktionen formuliert ist, ist der Lösungsraum sogar m -dimensional.)

DGL mit getrennten Variablen " $f(x, y) = g(x)h(y)$ " (mit $h(y_0) \neq 0$)

Die DGL $y' = f(x, y)$ kann umgeformt werden in

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x) \Rightarrow \int_{y_0}^x \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^x g(x) dx \quad (5.31)$$

Dies ergibt eine implizite Bestimmungsgleichung für $y(x)$, die "nur" Integrationen und Umkehrungen involviert.

Beispiel: Exakte Differentialgleichungen, integrierender Faktor: später

Definition: Gewöhnliche Differentialgleichung n . Ordnung

Sei $f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion (evtl. def. auf offener Teilmenge D von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \dots \times \mathbb{R}^m$), dann heißt

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (5.32)$$

(gewöhnliche) Differentialgleichung n . Ordnung (DGL).

Beispiel: Sei $\vec{r}(t)$ die Raumkurve eines Punktes mit Masse m und $\vec{F}(\vec{r})$ eine (ortsabhängige) Kraft, dann gilt nach Newton

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \quad (5.33)$$

\vec{F} kann prinzipiell auch geschwindigkeits- und zeitabhängig sein, was jedoch zumindest in fundamentalen Theorien ausgeschlossen wird.

Beispiel: Lösung von “ $m\ddot{r}(t) = F(r(t))$ ” mittels “Energiesatz”

Hier wird zunächst der 1-dimensionale Fall betrachtet. Durch Multiplikation mit $\dot{r}(t)$ und Benutzung der Stammfunktion $-U(r)$ (Potential) zu $F(r)$ folgt

$$m\ddot{r}(t)\dot{r}(t) = F(r(t))\dot{r}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2}(\dot{r}(t))^2 + U(r(t)) \right] = 0 \quad (5.34)$$

Die letzte Differentialgleichung wird durch eine Konstante E (Gesamtenergie) gelöst

$$\frac{m}{2}(\dot{r}(t))^2 + U(r(t)) = E, \quad (5.35)$$

d.h. Summe aus kinetischer Energie und potentieller Energie ist zeitlich konstant.

Wir werden bald für den allgemeinen Fall $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$ das höherdimensionale Pendant des Potentials $U(\vec{r})$ zu einem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ kennenlernen. Auch in diesem Fall werden wir schließen $\frac{m}{2}(\dot{\vec{r}}(t))^2 + U(\vec{r}(t)) = E$.

Eine explizite Lösung mittels Energiesatz ist jedoch nur im 1-dimensionalen Fall möglich durch Rückführung von (5.35) auf “getrennte Variable”:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)]} \Rightarrow t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)]}} \quad (5.36)$$

Bemerkung: Prinzipiell ist eine DGL n . Ordnung äquivalent zu einer DGL 1. Ordnung für einen Satz von n Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$:

$$y_1'(x) = y_2(x), \dots, y_{n-1}'(x) = y_n(x), \quad y_n'(x) = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (5.37)$$

Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen können direkt übernommen werden.

Beachte: lineare DGL n . Ordnung haben einen n -dimensionalen Lösungsraum (falls DGL für m -dim. vektorwertige Funktionen formuliert ist, ist der Lösungsraum sogar $n \cdot m$ -dimensional).

Beispiel: Lineare DGL n . Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad (5.38)$$

(i) Spezielle Lösung für $g(x) = \text{Exponentialfunktion} = g_0 \exp(\mu x)$. Achtung: hier wurde kein $-$ Vorzeichen im Exponenten gewählt. Lösung durch Ansatz $y_{sp}(x) = C \exp(\mu x)$

$$(a_n \mu^n + a_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + a_1 \mu + a_0) C = g_0 \quad (5.39)$$

was offenbar im allgemeinen direkt nach C auflösbar ist.

(ii) Lösung der homogenen DGL durch Ansatz $y(x) = \exp(zx)$ führt auf Nullstellengleichung eines Polynoms n . Ordnung in z

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (5.40)$$

mit im allgemeinen n Lösungen, die auch komplex sein können/werden. Falls Nullstellen entartet sind, d.h. von höherer als 1. Ordnung, so muß der obige Ansatz modifiziert werden [$y(x) = \text{Polynom}(x) \exp(zx)$].

Beispiel:

Erzwungene Schwingungen des **harmonischen Oszillators** mit Reibung
Hier haben wir zwei konkrete Realisierungen

Mechanik

Ein Körper der Masse m sei an einer harmonischen Feder aufgehängt, d.h. es wirkt eine Rückstellkraft streng *proportional* zur Auslenkung x mit Federkonstante k : $-kx$. Ferner erfolge die Bewegung in einem Medium mit Reibungskonstante r , d.h. es wirkt eine Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit: $-r\dot{x}$. Zu guter letzt kann eine externe Kraft $f(t)$ wirken, so daß nach Newton gilt

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \text{Summe aller Kräfte} = -kx - r\dot{x} + f(t) \\ \Leftrightarrow m\ddot{x} + r\dot{x} + kx &= f(t) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Elektrodynamik/Elektronik

Hier betrachten wir eine Reihenschaltung aus Kondensator (Kapazität C), Widerstand (Widerstand R) und Spule (Induktivität L). Die Kenngrößen drücken einen linearen Zusammenhang aus zwischen individuell am Baustein anliegender Spannung $U_{C,R,L}$ und: Ladung Q , Strom I , zeitliche Stromänderung \dot{I}

$$\begin{aligned} Q &= C \cdot U_C \\ U_R &= R \cdot I \\ U_L &= L \cdot \dot{I} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Bei einem geschlossenen Schaltkreis ist die Summe aller Einzelspannungen 0 bzw. – wenn eine externe Spannungsquelle vorliegt – gleich $U(t)$

$$U_C + U_R + U_L = U(t) \quad (5.43)$$

Wir leiten diese Gleichung einmal nach t ab und benutzen $I = \dot{Q}$

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{U}(t) \quad (5.44)$$

Auch diese Gleichung ist von der Form (5.41).

Allgemeine Lösung der homogenen DGL

Ansatz: $x(t) = e^{zt}$, führt auf

$$\begin{aligned} mz^2 + rz + k &= 0 \\ z^2 + \frac{r}{m}z + \frac{k}{m} &= 0 \\ z_{1,2} &= -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = Ae^{z_1 t} + Be^{z_2 t} \quad (5.46)$$

Durch Vorgabe der Anfangsbedingung für $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ (zwei für DGL 2. Ordnung!) können A und B fixiert werden.

Wir müssen **drei Fälle** unterscheiden:

Gedämpfter Fall (starke Reibung) $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$

Hier gibt es nicht mehr viel zu sagen. Jede Lösung der homogenen DGL ist eine Summe von exponentiell abfallenden Termen.

Schwingungs-Fall (schwache Reibung) $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$

Hier sehen wir "ein Problem in der Quadratwurzel". Tatsächlich können wir mit Quadratwurzeln aus negativen (reellen) Zahlen arbeiten, wobei wir i mit $i \cdot i = -1$ einführen. Die Gleichung $z^2 = -r$, r positiv, hat dann die Lösungen $\pm i\sqrt{r}$. Wir schreiben also um

$$z_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} = -\frac{1}{\tau} \pm i\Omega \quad (5.47)$$

wobei

$$1/\tau := \frac{r}{2m}, \quad \Omega := \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} \quad (5.48)$$

Den Ansatz schreiben wir:

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} e^{i\Omega t} + Be^{-t/\tau} e^{-i\Omega t} \quad (5.49)$$

Wir sehen wieder, daß A und B eindeutig durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden können (evtl. komplex). In jedem Fall ergibt sich für reelle Anfangswerte eine reelle Lösungsfunktion! Zur Deutung beachte (siehe Übungen):

$$e^{i\Omega t} = \cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t) \quad (5.50)$$

Also beschreibt die gefundene Lösung eine gedämpfte Schwingung mit Kreisfrequenz Ω und Relaxationszeit τ .

Aperiodischer Grenz-Fall $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$

Hier beschreibt der rein exponentielle Ansatz nicht mehr alle Lösungen, da $z_1 = z_2 = -\frac{r}{2m} =: z$. Es "fehlt eine Lösung". Wir machen den Ansatz

$$te^{zt} \quad (5.51)$$

mit $z = -\frac{r}{2m}$ wie schon bestimmt. Wir sehen

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = (mz^2 + rz + k)te^{zt} + (2mz + r)e^{zt} = 0 + 0 = 0 \quad (5.52)$$

da die erste Klammer aufgrund des ursprünglichen Ansatzes 0 ist und die zweite Klammer aufgrund der Bedingung des aperiodischen Grenzfall! Dieser Fall hat in der Technik (Stoßdämpfer etc.) eine ausgezeichnete Bedeutung, da unter dieser Bedingung Energie schnellstmöglich dissipiert wird!

Spezielle Lösung der inhomogenen DGL

a) Harmonische Kraft

Wir wollen nun eine spezielle Lösung zu (5.41) im Falle einer periodischen externen Kraft mit Winkelfrequenz ω bestimmen

$$f(t) = f_0 e^{i\omega t} \quad (5.53)$$

Beachte, daß $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$. M.a.W.: Wir sind nur an dem Real-Teil interessiert, arbeiten aber mit der um den Imaginärteil vervollständigten "einfacheren" Exponentialfunktion.

Wir setzen an $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ und erhalten

$$x_0 = \frac{f_0}{-m\omega^2 + ir\omega + k} \quad (5.54)$$

Zerlegung nach Betrag und Phase:

$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + (r\omega)^2}} e^{i\phi}, \text{ wobei } \tan \phi = \frac{r\omega}{m\omega^2 - k} \quad (5.55)$$

Dies bedeutet, daß eine harmonische externe Kraft mit Stärke f_0 zu einer Schwingung mit Amplitude $|x_0|$ (Betrag) und Phasenverschiebung ϕ (Phase) führt.

Bemerkung: Im Falle des elektronischen Schaltkreises trägt der Koeffizient, der die Strom-Spannungs-Beziehung vermittelt den Namen *Impedanz* (Z). Aus (5.44) folgt analog zum mechanischen Fall

$$\left[(i\omega)^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right] I_0 = i\omega U_0 \quad (5.56)$$

Also gilt für $Z := U_0/I_0$

$$Z = i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C} \quad (5.57)$$

d.h. die Elemente Spule, ohmscher Widerstand, Kondensator besitzen individuell (komplexe) Widerstände $i\omega L$, R , $1/i\omega C$, die sich bei Reihenschaltung addieren.

b) *Kraftstoß*

Im Gegensatz zum obigen Fall ("dauernd wirkende Kraft") wollen wir hier eine Kraft betrachten, die nur zum Zeitpunkt $t = 0$ wirkt im folgenden Sinne

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } t \in [-a, a] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.58)$$

wobei wir an $a > 0$ im Limes $a \rightarrow 0$ interessiert sind. Beachte $\int_{-\infty}^{\infty} f_a(t) dt = 1$ für alle a . Wir wollen nun eine spezielle Lösung im Limes $a \rightarrow 0$ suchen, für die der Oszillator bei $t < 0$ in Ruhe ist $x(t) = 0$. Wir sehen, daß bei $t = 0$ augenblicklich ein Kraftstoß = Impuls = 1 übertragen wird. M.a.W.: die Geschwindigkeit \dot{x} springt bei $t = 0$ von $\dot{x}(0-) = 0$ auf $\dot{x}(0+) = 1/m$.

Nun bestimmen wir eine spezielle Lösung zur inhomogenen DGL in folgender Weise:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ Ae^{z_1 t} + Be^{z_2 t} & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (5.59)$$

Die DGL ist für $t \neq 0$ erfüllt. Nun müssen wir die Stetigkeit von $x(t)$ und den Sprung von $\dot{x}(t)$ bei $t = 0$ erzwingen:

$$\begin{aligned} 0 &= x(0-) = x(0+) = A + B \\ 1 &= m[\dot{x}(0+) - \dot{x}(0-)] = Az_1 + Bz_2 \end{aligned} \quad (5.60)$$

Diese Gleichungen sind eindeutig durch $A = -B = [m(z_1 - z_2)]^{-1}$ lösbar.

Wir halten fest: für einen Kraftstoss bei $t = 0$ von der Stärke 1 wird durch (5.59) eine spezielle Lösung gegeben. Diese wird auch mit $G(t)$ bezeichnet und heißt "retardierte Green-Funktion"

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{e^{z_1 t} - e^{z_2 t}}{m(z_1 - z_2)} & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (5.61)$$

Als Anwendung wollen wir notieren: für eine beliebige Kraft $f(t)$ läßt sich eine spezielle Lösung $x_{sp}(t)$ der inhomogenen DGL in folgender Form angeben

$$x_{sp}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (5.62)$$

weitere Lösungsmethoden: Fourier-Transformation (später)

Schlußbemerkung: wir werden an geeigneter Stelle *partielle Differentialgleichungen* untersuchen; dies sind Gleichungen für Funktionen von “mehreren Veränderlichen” und ihren (partiellen) Ableitungen.

6 Vektoranalysis

Wegintegrale

Wir wollen uns mit der Newton'schen Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$ in drei (beliebigen) Dimensionen befassen: Bahnkurve eines Teilchens unter dem Einfluß einer ortsabhängigen Kraft $\vec{F}(\vec{r})$. Hier ist \vec{F} eine Funktion, die für Vektoren \vec{r} aus dem \mathbb{R}^3 (oder einem Teil) definiert ist. Dies ist ein Beispiel einer vektorwertigen Funktion und wird *Vektorfeld*, im konkreten Fall *Kraftfeld* genannt.

Die erste Frage, die wir uns stellen, ist: welches ist die am Teilchen auf der Bahn $\vec{r}(t)$ geleistete Arbeit? Dies führt uns auf das Weg- oder Kurvenintegral:

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} dt \quad (6.1)$$

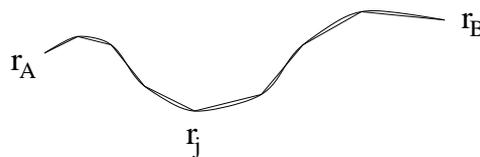
wobei $\vec{r}_{A,B} = \vec{r}(t_{A,B})$.

Motivation: Der Weg sei in kleine Stücke zerlegt mit zugehörigen Zeiten $t_A = t_1 < t_2 < \dots < t_N = t_B$ und Raumpunkten $\vec{r}(t_j) =: \vec{r}_j$. Dann ist die zwischen den Zeiten t_j und t_{j+1} geleistete Arbeit (approximativ)

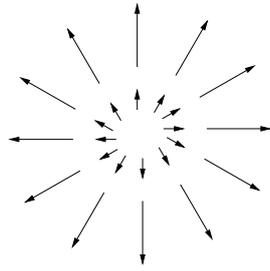
$$\Delta W_j = \vec{F}(\vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j) \quad (6.2)$$

wobei durch das Skalarprodukt „ \cdot “ gewährleistet ist, daß die Parallelkomponente der Kraft mit dem Weg multipliziert wird. Im Limes $N \rightarrow \infty$

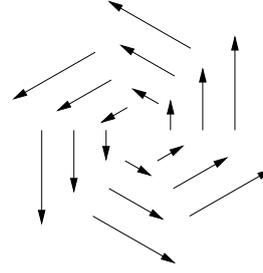
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \Delta W_j &= \sum_{j=1}^{N-1} \vec{F}(\vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \vec{F}(\vec{r}(t_j)) \cdot \dot{\vec{r}}(t_j) \Delta(t_j) \rightarrow \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} dt \end{aligned} \quad (6.3)$$



Beispiel 1: Sei $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ gegeben (radialsymmetrisch). Der Massenpunkt m durchlaufe folgende Bahn (nicht notwendigerweise gemäß Newton) $\vec{r}_1(t) = (t, t, t)$, die von Zeit $t = 0$ bis $t = 1$ verfolgt wird. In dieser Zeit wird folgende Arbeit geleistet



Beispiel 1



Beispiel 2

$$W_1 = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot \dot{\vec{r}}_1 dt = \int_0^1 (t, t, t) \cdot (1, 1, 1) dt = 3 \int_0^1 t dt = \frac{3}{2} t^2 \Big|_0^1 = 3/2 \quad (6.4)$$

Wir können andere Wege von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 1)$ betrachten, z.B. $\vec{r}_2(t) = (t/2, t/2, t^2/4)$, mit Anfangs- und Endzeitpunkt 0 und 2

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_0^2 \vec{F}(\vec{r}_2) \cdot \dot{\vec{r}}_2 dt = \int_0^2 (t/2, t/2, t^2/4) \cdot (1/2, 1/2, t/2) dt \\ &= \int_0^2 (t/2 + t^3/8) dt = (t^2/4 + t^4/32) \Big|_0^2 = 1 + 1/2 = 3/2 \quad (6.5) \end{aligned}$$

Beide Wege (mit identischen Anfangs- und Endpunkten) liefern identische Ergebnisse.

Bemerkung: Wir haben oben eine Notation für Kurvenintegrale benutzt, die explizit eine Parametrisierung des Weges $\vec{r}(t)$ benutzte. Häufig wird auch einfach

$$\int_c \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (6.6)$$

geschrieben, wobei mit $c : t \rightarrow \vec{r}(t)$ die Kurve bzw. *Contour* spezifiziert wird. Oft wird auch „.“ in der Notation fallengelassen: $\int_c \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$. Wir werden jetzt ein Beispiel mit Weg- (Contour)-abhängigen Integralen kennenlernen.

Beispiel 2: Sei $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ ein 2-dim Kraftfeld auf einer 2-dim Geometrie. Wir wollen den Kreisweg $\vec{r}_1(t) = R(\cos t, \sin t)$ in der Zeit von 0 bis 2π und Anfangs- gleich Endpunkt $\vec{r}_1(0) = \vec{r}_1(2\pi) = (R, 0)$ betrachten. Außerdem wollen wir den trivialen Weg $\vec{r}_2(t) = (R, 0)$ für alle t betrachten.

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot \dot{\vec{r}}_1 dt = \int_0^{2\pi} (-R \sin t, R \cos t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2 \end{aligned}$$

$$W_2 = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_2) \cdot \dot{\vec{r}}_2 dt = 0 \quad (6.7)$$

Die Integrale sind nicht gleich!

Definition: Ein Kraftfeld \vec{F} für das alle Integrationswege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten denselben Wert des Wegintegrals liefern wird *konservativ* genannt. Insbes. geschlossene Wege liefern 0. Grund für Terminologie: in konservativen Kraftfeldern gilt Energieerhaltung (genauer später). Wir haben oben ein Beispiel eines nichtkonservativen Feldes gesehen. In einem derartigen Feld kann ein Prozeß durchgeführt werden mit Energiegewinn und Restaurierung des Anfangszustandes.

Potential

Charakterisierung:

Konservative Felder sind genau solche, die ein Potential besitzen.

Definition: Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Feld, dann heißt $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Potential zu \vec{F} , wenn gilt

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (6.8)$$

wobei $\vec{\nabla}U$, "Nabla U ", der Gradient von U ist, definiert als der Spaltenvektor des Differentials zu U , konkret der Spaltenvektor aus allen partiellen Ableitungen

$$\vec{\nabla}U := \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Offenbar sind Potentiale (sofern sie überhaupt existieren) nur bis auf eine additive Konstante definiert.

Beispiel: Das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ wie oben hat das Potential $U(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\vec{r}^2$, denn

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -x_j \quad (6.10)$$

(A) Wir zeigen nun: jedes Feld der Gestalt $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ ist konservativ!

Beweis: Wir haben die Kettenregel für höherdimensionale Funktionen $d(f \circ g) = df \circ dg$

$$\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla}U(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \quad (6.11)$$

Daher folgt für das Wegintegral

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} dt &= \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}(-U(\vec{r})) dt \\ &= U(\vec{r}(t_A)) - U(\vec{r}(t_B)) \end{aligned} \quad (6.12)$$

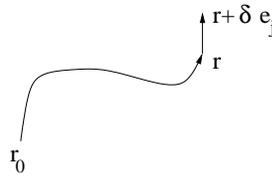
(B) Nun wollen wir zeigen, daß für jede konservative Kraft ein Potential existiert. Idee: definiere zu \vec{F} eine Funktion U , die obige Beziehung erfüllt. Zeichne irgendeinen Startpunkt \vec{r}_0 aus und integriere \vec{F} von \vec{r}_0 bis \vec{r} , dabei hängt das Ergebnis nicht von der konkreten Wahl des Weges ab (“Wohldefiniertheit”)

$$U(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (6.13)$$

Nun müssen wir zeigen $\vec{\nabla}U = -\vec{F}$. Wir wollen die partielle Ableitung nach x_j berechnen:

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{U(\vec{r} + \delta \cdot \vec{e}_j) - U(\vec{r})}{\delta} = -\frac{1}{\delta} \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \delta \cdot \vec{e}_j} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \simeq -\frac{F_j(\vec{r})\delta}{\delta} = -F_j(\vec{r}) \quad (6.14)$$

alles im Limes $\delta \rightarrow 0$ zu verstehen.



Bemerkung: Der Gradient gibt die Richtung und den Betrag des stärksten Anstiegs einer Funktion an.

Beispiel: Die Funktion $f(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$ mit konstantem Vektor \vec{a} hat Gradienten

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{a} \quad (6.15)$$

da $\frac{\partial}{\partial x_j} f = a_j$.

Beispiel: Die Gravitationskraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (6.16)$$

hat als Potential

$$U(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r} \quad (6.17)$$

Ganz allgemein hat eine radialsymmetrische Kraft (Betrag nur abhängig vom Abstand, und Richtung radial bzgl. Aufpunkt)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \phi(r) \hat{r} \quad (6.18)$$

als Potential

$$U(\vec{r}) = -\Phi(r) \quad (6.19)$$

wobei $\Phi(r)$ eine Stammfunktion von $\phi(r)$ ist (im Sinne der Funktionen einer Veränderlichen).

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Phi(r) = \frac{d}{dr} \Phi(r) \frac{\partial}{\partial x_j} r(x_1, \dots, x_n) \quad (6.20)$$

Nun gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} r(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \frac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_j}{r} \quad (6.21)$$

Also

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Phi(r) = \Phi'(r) \frac{x_j}{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \Phi(r) = \Phi'(r) \hat{r} \quad (6.22)$$

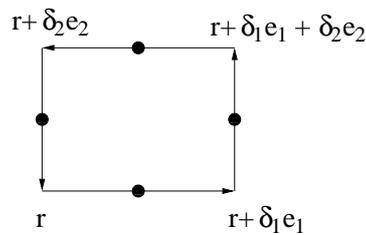
Elementare Rechenregeln des Gradienten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\phi + \psi) &= \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\psi \\ \vec{\nabla}(\phi\psi) &= \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi \end{aligned} \quad (6.23)$$

Rotation $\vec{\nabla} \times$ differentieller Stokesscher Satz

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wie man das Abweichen eines Kraftfeldes von der Eigenschaft "konservativ" quantifizieren kann. Insbesondere suchen wir ein einfaches "lokales" Kriterium, das das umständliche Integralkriterium ersetzt durch "einfachere" Differential-Ausdrücke.

Dazu betrachten wir ein beliebiges vorgegebenes Kraftfeld \vec{F} und integrieren dies über einen kleinen geschlossenen Weg, der Quadratform haben möge mit Kantenlängen δ_1 und δ_2 entlang der Richtungsvektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 .



$$\begin{aligned} \int_{\square} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} &= \delta \left[F_1 \left(\vec{r} + \frac{\delta_1}{2} \vec{e}_1 \right) - F_1 \left(\vec{r} + \frac{\delta_1}{2} \vec{e}_1 + \delta_2 \vec{e}_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + F_2 \left(\vec{r} + \delta_1 \vec{e}_1 + \frac{\delta_2}{2} \vec{e}_2 \right) - F_2 \left(\vec{r} + \frac{\delta_2}{2} \vec{e}_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (6.24)$$

Nun linearisieren wie die auftretenden Terme, d.h. Ausdrücke $f(x + \Delta) - f(x)$ ersetzen wir durch $f'(x)\Delta$. Dies ist nur eine Approximation, der entstehende Fehler ist jedoch “von höherer Ordnung als Δ ”. Allgemein sagt man, daß ein Fehler “von höherer Ordnung als Δ^n ” ist, wenn die Differenz zwischen “gewünschtem” und approximiertem Term dividiert durch Δ^n gegen 0 geht im Limes $\Delta \rightarrow 0$. Wir erhalten in “führender” Ordnung

$$\int_{\square} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_1 \delta_2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} F_2(\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(\vec{r}) \right] \quad (6.25)$$

Moral: Das Wegintegral um das Quadrat hat als Wert den Flächeninhalt des Quadrates multipliziert mit dem Ausdruck [...].

Bemerkung: Die vorgeführte Rechnung liefert das richtige Ergebnis, wird aber nicht den Kriterien eines strengen Beweises gerecht. Wir werden später im Zusammenhang mit der Taylor-Entwicklung Methoden kennenlernen, die diese Lücke zu stopfen gestatten.

Definition: Wir definieren für ein beliebiges (3-dimensionales) Kraftfeld \vec{F} die sogenannte *Rotation* “rot $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ ”, in Komponenten

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Mit der Definition der Rotation läßt sich unser obiger Befund kompakter und allgemeiner formulieren

$$\int_{\text{inf. Kurve } c} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} \quad (\text{infinitesimaler Stokesscher Satz}) \quad (6.27)$$

wobei c eine “kleine” (infinitesimale) Fläche umschließt und $d\vec{A}$ der Flächenvektor ist, d.h. senkrecht zur Fläche mit Betrag gleich dem Inhalt der von c umlaufenden Fläche. Ferner soll der Umlaufsinn von c bzgl. $d\vec{A}$ einer Rechten-Hand-Regel folgen.

Für eine beliebige “endliche” Kurve c gilt der Stokessche Satz

$$\int_{\text{Kurve } c} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\text{Fläche}} \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} \quad (6.28)$$

wobei das Integral auf der rechten Seite über eine (beliebige) von c eingespante Fläche zu nehmen ist. Eine systematische Definition und Behandlung von Flächen- und höherdimensionalen Integralen erfolgt im nächsten Kapitel.

Wir sind jedoch schon in der Lage folgende Charakterisierung vorzunehmen:

Eine Kraft \vec{F} ist konservativ genau dann, wenn $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

Bemerkung: “ \Rightarrow ” gilt immer, “ \Leftarrow ” gilt, wenn die zugrunde liegende Geometrie einfach zusammenhängend ist, d.h. in einem gewissen Sinne keine Löcher aufweist.

Beispiel 1: Sei $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} y - \frac{\partial}{\partial y} x, \frac{\partial}{\partial z} x - \frac{\partial}{\partial x} z, \frac{\partial}{\partial x} y - \frac{\partial}{\partial y} x \right) = (0, 0, 0) \quad (6.29)$$

Beispiel 2: Sei $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) = (0, 0, 2) \quad (6.30)$$

Bemerkung: In den Übungen wird ausgehend von den Newton’schen Gleichungen

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \quad (6.31)$$

für konservative Kräfte \vec{F} mit Potential $U(\vec{r})$ die Energieerhaltung, d.h.

$$\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r}) = \text{zeitlich konstant} = E \quad (6.32)$$

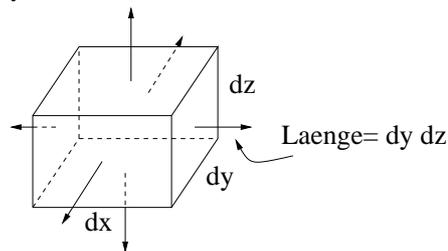
gezeigt.

**Divergenz $\vec{\nabla}$.
differentieller Gauß’scher Satz**

Wir wollen den “Fluß” eines Vektorfeldes \vec{F} “aus” einen “kleinen” Quader mit Kantenlängen dx, dy, dz berechnen. Konkret ist damit das Oberflächenintegral

$$\int_{\text{Oberfläche}} \vec{F} d\vec{A} \quad (6.33)$$

gemeint. Für einen “infinitesimalen” Quader ist dies elementar



$$\int_{\text{Oberfläche}} \vec{F} d\vec{A} = \sum_{\text{Flächen}} \vec{F}(\text{Flächenmitte}) d\vec{A}$$

$$\begin{aligned}
&= F_1(x+dx, y, z)dydz - F_1(x, y, z)dydz \\
&+ F_2(x, y+dy, z)dx dz - F_2(x, y, z)dx dz \\
&+ F_3(x, y, z+dz)dx dy - F_3(x, y, z)dx dy \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3 \right) dx dy dz \quad (6.34)
\end{aligned}$$

Definition: Wir definieren für eine beliebiges Vektorfeldes \vec{F} die *Divergenz* “ $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ ” durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x_1} F_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} F_n \quad (6.35)$$

Insbesondere ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ eine reellwertige Funktion (“skalar=einkomponentig”). Mit der Definition der Divergenz läßt sich unser obiger Befund kompakter und allgemeiner formulieren

$$\int_{\substack{\text{inf. geschloss.} \\ \text{Fläche}}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) dV \quad (\text{infinitesimaler Gauß'scher Satz}) \quad (6.36)$$

wobei dV das von der geschlossenen Fläche umfaßte Volumen ist.
Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (a\vec{b}) &= a\vec{\nabla} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} a \\
\vec{\nabla} \times (a\vec{b}) &= a\vec{\nabla} \times \vec{b} + (\vec{\nabla} a) \times \vec{b} \\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} a) &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= 0 \\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} \quad (6.37)
\end{aligned}$$

dabei ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (= \Delta)$ der sogenannte Laplace-Operator, definiert durch

$$\Delta f := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) f \quad (6.38)$$

In $\Delta \vec{a}$ muß der Laplace-Operator auf jede Komponente von \vec{a} angewandt werden.

7 Mehrdimensionale Integrale

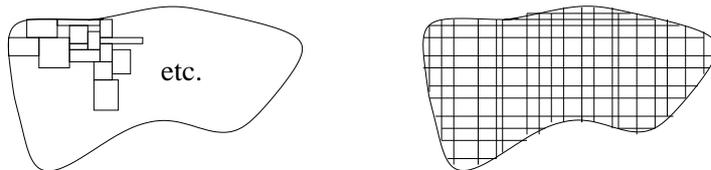
Wir wollen uns jetzt mit mehrdimensionalen Integralen beschäftigen. Diese werden uns häufig in der Physik begegnen, angefangen mit den Volumina ausgedehnter Körper, der Gesamtmasse, die im Falle inhomogener Dichten auf das Integral über die Dichtefunktion führt, etc.

Wir betrachten hier Funktionen f von \mathbb{R}^n in \mathbb{R} . Wir werden wieder annehmen, daß derartige Funktionen hinreichend "regulär" sind, d.h. im wesentlichen stetig. Derartige Funktionen können durch Stufenfunktionen (konstant auf "kleinen" n -dimensionalen Quadern) approximiert werden. Über diesen Umweg kann wieder in naheliegender Weise das Integral $\int_V f(\vec{r}) d^n r$ der Funktion f über das n -dimensionale Volumen V definiert werden.

Wir wollen für den $n = 2$ -dimensionalen Fall konkreter sein. Das 2-dimensionale Volumen heißt natürlich Fläche und wird mit A bezeichnet.

$$\int_A f(\vec{r}) d^2 r = \sum_i f(\vec{r}_i) \Delta A_i \tag{7.1}$$

im Limes immer feinerer Diskretisierung.



Wenn wir ein regelmäßiges Gitter unterlegen, können wir die Summation über zwei Indizes i, j durchführen, die die x - und y -Achsen separat diskretisieren

$$\int_A f(\vec{r}) d^2 r = \sum_j \sum_k f(x_j, y_k) \Delta x_j \Delta y_k \tag{7.2}$$

Hier sehen wir, daß die Summe über k im Limes feinerer Diskretisierung gegen das Integral $\int dy$ über y bei festem x_j geht. Die Summe über j im Limes feinerer Diskretisierung gegen das Integral $\int dx$ über x . Das Endergebnis lautet

$$\int_A f(\vec{r}) d^2 r = \int \left(\int f(x, y) dy \right) dx. \tag{7.3}$$

Das 2-dimensionale und allgemeiner das n -dimensionale Integral führt daher auf ein Mehrfachintegral, d.h. einer sukzessiven Auswertung von üblichen 1-dimensionalen Integralen.

Beispiel 1: $f : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konstant vom Wert 1 ($A = [0, a] \times [0, b]$)

$$\int_A f(\vec{r}) d^2 r = \int_0^a \int_0^b 1 dy dx = \int_0^a b dx = ab \tag{7.4}$$

Das Ergebnis entspricht gerade der Fläche des rechteckigen Definitionsbereichs.

Beispiel 2: $f : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy + y^2$ ($A = [0, a] \times [0, b]$)

$$\begin{aligned} \int_A f(\vec{r}) d^2 r &= \int_0^a \int_0^b (xy + y^2) dy dx \\ &= \int_0^a \left(x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^b dx = \int_0^a \left(x \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} \right) dx \\ &= \left(\frac{b^2}{4} x^2 + \frac{b^3}{3} x \right) \Big|_0^a = \frac{a^2 b^2}{4} + \frac{a b^3}{3} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Beispiel 3: $f : [-R, R] \times [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |\vec{r}| \leq R \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.6)$$

also gleich 1 innerhalb der Kreisscheibe mit Radius R , 0 außerhalb. Das Integral über $A = [-R, R] \times [-R, R]$ wird definitionsgemäß den Flächeninhalt der Kreisscheibe liefern

$$\begin{aligned} \int_A f(\vec{r}) d^2 r &= \int_{-R}^R \int_{-R}^R f(x, y) dy dx = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 dy dx \\ &= \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2-x^2} dx \\ &= 2R^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} ds = 2R^2 \frac{\pi}{2} = \pi R^2 \end{aligned} \quad (7.7)$$

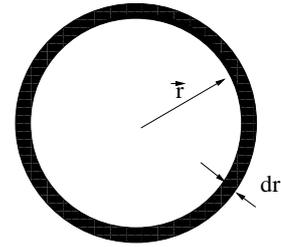
die (vor-)letzte Beziehung nach (4.20,22).

In dem letzten Beispiel wurde insbes. gezeigt, wie mit nichtrechteckigen Geometrien verfahren wird.

Wichtige Spezialfälle:

Radialsymmetrie

Integration von Funktionen, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängen, über Flächen (Volumina), deren Grenzen ebenfalls nur von r abhängen. Wir stellen uns jetzt vor, der Raum werde durch radialsymmetrische Schalen der Dicke dr überdeckt, d.h. durch in 2-Dimensionen durch Ringe vom Radius r und Fläche $2\pi r dr$ (in 3-Dimensionen Volumen $4\pi r^2 dr$).



Wir erhalten die Ersetzung

$$\begin{aligned} \int_{r \leq R} f(r) d^2 r &= \int_0^R f(r) 2\pi r dr \\ \int_{r \leq R} f(r) d^3 r &= \int_0^R f(r) 4\pi r^2 dr \end{aligned} \tag{7.8}$$

Beispiel: Wir rechnen schnell das Beispiel 3 von oben:

$$\int_A f(\vec{r}) d^2 r = \int_0^R 1 \cdot 2\pi r dr = \pi r^2 \Big|_0^R = \pi R^2 \tag{7.9}$$

Faktorisierung

Wenn $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$, dann gilt

$$\int f(\vec{r}) d^n r = \int f_1(x_1) dx_1 \cdot \dots \cdot \int f_n(x_n) dx_n \tag{7.10}$$

Die Faktorisierung liegt selten vor. Weiter unten werden wir Funktionen mit speziellen Symmetrien kennenlernen, die in geeigneten Koordinaten auf Faktorisierung hinauslaufen. Hier konstruieren wir ein Beispiel, das uns die Berechnung des Gauß-Integrals erlaubt.

Beispiel: Integriere $f(\vec{r}) = \exp(-r^2)$ über die gesamte 2-dimensionale Ebene.

Berechnung als radialsymmetrisches Integral:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{r}) d^2 r = \int_0^\infty \exp(-r^2) \cdot 2\pi r dr = -\pi \exp(-r^2) \Big|_0^\infty = \pi \tag{7.11}$$

Berechnung als faktorisiertes Integral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{r}) d^2 r &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) dx dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^\infty \exp(-y^2) dy \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx \right)^2 \end{aligned} \tag{7.12}$$

Konkreter geht an dieser Stelle die Auswertung nicht, da wir keinen elementaren Ausdruck für die Stammfunktion von $\exp(-x^2)$ haben. Aus der Gleichheit der Ergebnisse muß aber für das (uneigentliche) Integral folgen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} \quad (7.13)$$

Wir wollen nun die letzte Überlegung auf den allgemeinen n -dimensionalen Fall ausdehnen. Wir gehen aus von dem bekannten Integral (7.13) und fragen uns, wie groß die Oberfläche einer n -dimensionalen Kugel vom Radius r ist. Wir wissen/setzen voraus, daß

$$S_n(r) = O_n r^{n-1} \quad (7.14)$$

Hiermit reduziert sich das n -dimensionale radialsymmetrische Integral zu einem 1-dimensionalen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-r^2) d^n r &= \int_0^{\infty} \exp(-r^2) S_n(r) dr = O_n \int_0^{\infty} \exp(-r^2) r^{n-1} dr \\ &= \frac{O_n}{2} \int_0^{\infty} \exp(-r^2) r^{n-2} dr^2 = \frac{O_n}{2} \int_0^{\infty} x^{n/2-1} \exp(-x) dx \\ &= \frac{O_n}{2} \Gamma(n/2) \end{aligned} \quad (7.15)$$

wobei für $z > 0$ die Gammafunktion $\Gamma(z)$ eingeführt wurde mit der Definition

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} \exp(-x) dx \quad (7.16)$$

Nun gilt aber auch Faktorisierung des Integrals

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-r^2) d^n r &= \int [\exp(-x_1^2) \cdot \dots \cdot \exp(-x_n^2)] dx_1 \dots dx_n \\ &= \left(\int \exp(-x_1^2) dx_1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\int \exp(-x_n^2) dx_n \right) \\ &= \pi^{n/2} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Aus der Gleichheit der Ergebnisse folgt

$$O_n = 2 \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad (7.18)$$

Wir wissen, $O_1 = 2$ (warum!?) und $O_2 = 2\pi$, also

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad \Gamma(1) = 1 \quad (7.19)$$

Wir wollen nun eine Rekursionsbeziehung für die Gammafunktion herleiten, die es gestattet, in einfacher Weise die Funktionswerte von ganz- und halbzahlgigen Argumenten zu berechnen. Partielle Integration liefert (für $z > 1$ verschwindet der "Oberflächenterm")

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x) dx \\ &= -x^{z-1} \exp(-x) \Big|_0^\infty + (z-1) \int_0^\infty x^{z-2} \exp(-x) dx \\ &= (z-1) \Gamma(z-1) \end{aligned} \tag{7.20}$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \Gamma(3/2) &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} & \Gamma(2) &= 1 \\ \Gamma(5/2) &= \frac{3}{4} \sqrt{\pi} & \Gamma(3) &= 2 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Insbesondere sehen wir: $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Damit gilt für die Flächen der 3- und 4-dimensionalen Kugeln

$$O_3 = 4\pi \quad O_4 = 2\pi^2 \tag{7.22}$$

Nun berechnen wir das Volumen einer n -dimensionalen Kugel mit Radius R

$$V_n(R) = \int_{r \leq R} 1 d^n r = \int_0^R S_n(r) dr = O_n \int_0^R r^{n-1} dr = O_n \frac{r^n}{n} \Big|_0^R = \frac{O_n}{n} R^n \tag{7.23}$$

Man sieht, wie die vertrauten Fälle $n \leq 3$ sich einfügen.

Spezielle Koordinatensysteme

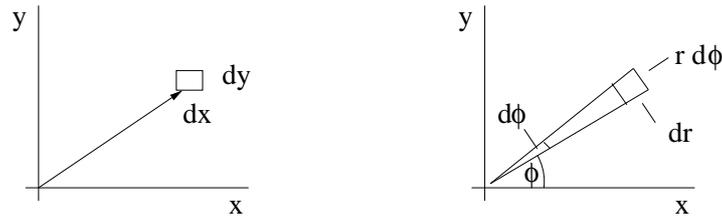
Wir haben schon den wichtigen Spezialfall der radialsymmetrischen Funktionen kennengelernt und eine Methode, das Mehrfachintegral auf ein einfaches 1-dimensionales Integral zurückzuführen. Manchmal zeigen Funktionen nur teilweise Symmetrien, die in geeigneten Koordinaten bzw. Parametrisierungen immer noch zu Vereinfachungen führen. Mathematisch entspricht die Einführung geeigneter Koordinaten zur Berechnung von Integralen einer höherdimensionalen Substitutionsregel.

2-Dim: Polarkoordinaten

Wir parametrisieren die beiden Koordinaten $\vec{r} = (x, y)$ durch

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, & \text{wobei } 0 &\leq r < \infty, \\ y &= r \sin \phi, & 0 &\leq \phi < 2\pi \end{aligned} \tag{7.24}$$

Nun müssen wir uns Gedanken über das Volumen der Fläche machen, die von $\vec{r}(r, \phi)$ überstrichen wird, wenn r und ϕ um "kleine" dr und $d\phi$ variieren. Man mache sich an Hand der Skizzen klar, daß kleine Rechtecke mit Kantenlängen dr und $r d\phi$ aufgespannt werden, die eine Fläche $r dr d\phi$ haben.



Also gilt

$$\int f(x, y) dx dy = \int f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr d\phi \quad (7.25)$$

Beispiel 1: Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes der Kreisscheibe bzgl. der y -Achse werden Sie auf das Integral von x^2 über die Scheibe stoßen, d.h.

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{x^2+y^2} \leq R} x^2 dx dy &= \int_0^R \int_0^{2\pi} (r \cos \phi)^2 r dr d\phi \\ &= \left(\int_0^R r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right) = \frac{R^4}{4} \pi \quad (7.26) \end{aligned}$$

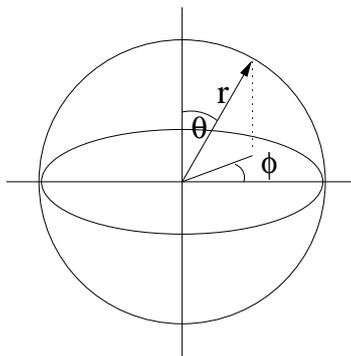
Machen Sie sich klar, daß die Vereinfachung darin bestand, daß in den neuen Koordinaten eine Faktorisierung vorliegt!

Beispiel 2: Wir hatten oben schon Funktionen behandelt, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängen, wollen aber diesen Fall nochmals schnell in Polarkoordinaten abhandeln

$$\int_{r \leq R} f(r) d^2 r = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r) r dr d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R f(r) r dr = 2\pi \int_0^R f(r) r dr \quad (7.27)$$

3-Dim: Kugelkoordinaten

Wir parametrisieren die drei Koordinaten $\vec{r} = (x, y, z)$ mittels Abstand r , geographischer Länge $0 \leq \phi \leq 2\pi$ und geographischer Breite $0 \leq \theta \leq \pi$ durch



$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\y &= r \sin \theta \sin \phi, \\z &= r \cos \theta,\end{aligned}\tag{7.28}$$

Nun müssen wir uns Gedanken über das Volumen der Fläche machen, die von $\vec{r}(r, \phi, \theta)$ überstrichen wird, wenn r , ϕ und θ um "kleine" dr , $d\phi$ und $d\theta$ variieren. Wie bei den Polarkoordinaten stehen die partiellen Ableitungen von $\vec{r}(r, \phi, \theta)$ nach r , ϕ und θ orthogonal aufeinander. Die Kantenlängen des infinitesimalen Quaders sind $dr \times r \sin \theta d\phi \times r d\theta$. Also ist das 3-dim. Volumenelement $d^3r = \sin \theta dr d\phi r d\theta$. Damit gilt für die Integration einer Funktion $f(\vec{r})$ über eine Kugel vom Radius R

$$\int f(\vec{r}) d^3r = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \sin \theta dr d\phi d\theta\tag{7.29}$$

Im Vergleich zu den Polarkoordinaten ist die "Theta-Integration" hinzu gekommen. Hier kann häufig mit Gewinn von der Integrationsvariablen θ auf $\xi := \cos \theta$ transformiert werden

$$\int_0^\pi (\dots) \sin \theta d\theta = \int_1^{-1} (\dots) [-d(\cos \theta)] = \int_{-1}^1 (\dots) d\xi\tag{7.30}$$

Beispiel 3: Wir hatten oben schon Funktionen behandelt, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängen, wollen aber diesen Fall nochmals schnell in Polarkoordinaten abhandeln

$$\begin{aligned}\int_{r \leq R} f(r) d^3r &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r) \sin \theta dr d\phi d\theta \\&= \left(\int_0^R f(r) r^2 dr \right) \left(\int_{-1}^1 d\xi \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \\&= 4\pi \int_0^R f(r) r^2 dr\end{aligned}\tag{7.31}$$

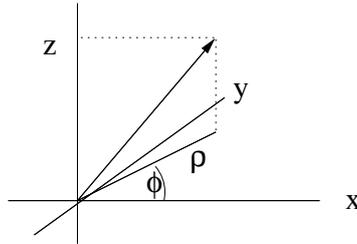
Beispiel 4: Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes einer homogenen Kugel bzgl. der z -Achse stoßen Sie auf das Integral

$$\begin{aligned}\int_{r \leq R} (x^2 + y^2) d^3r &= \int_{r \leq R} (r \sin \theta)^2 d^3r \\&= \left(\int_0^R r^2 r^2 dr \right) \left(\int_{-1}^1 \sin^2 \theta d \cos \theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \\&= \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) d\xi = \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \left(\xi - \frac{\xi^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 \\&= \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{5} V R^2\end{aligned}\tag{7.32}$$

Die Vereinfachung bei Benutzung der Kugelkoordinaten bestand darin, daß in den neuen Koordinaten eine Faktorisierung stattfand!

3-Dim: Zylinderkoordinaten

Wir parametrisieren die drei Koordinaten $\vec{r} = (x, y, z)$ mittels Abstand ρ von z - (Zylinder)-Achse, Winkel $0 \leq \phi \leq 2\pi$ und Höhe z durch



$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi, \\ y &= \rho \sin \phi, \\ (z &= z) \end{aligned} \quad (7.33)$$

In gewisser Weise haben wir hier eine Kombination der 2-dim. Polarkoordinaten und einer restlichen kartesischen Koordinate. Wie oben stehen die partiellen Ableitungen von $\vec{r}(\rho, \phi, z)$ nach ρ , ϕ und z orthogonal aufeinander. Die Kantenlängen des infinitesimalen Quaders sind $d\rho \times \rho d\phi \times dz$. Also ist das 3-dim. Volumenelement $d^3 r = (\rho d\rho)(d\phi)(dz)$. Damit gilt für die Integration einer Funktion $f(\vec{r})$ über einen Zylinder vom Radius R und Höhe H

$$\int f(\vec{r}) d^3 r = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) \rho d\rho d\phi dz \quad (7.34)$$

Beispiel 5: Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes eines homogenen Zylinders bzgl. der z -Achse stoßen Sie auf das Integral

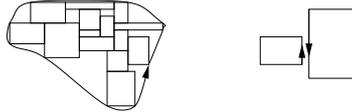
$$\begin{aligned} \int_{\text{Zylinder}} (x^2 + y^2) d^3 r &= \int_{\text{Zylinder}} \rho^2 d^3 r = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^H dz \\ &= 2\pi H \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^R = \frac{\pi}{2} R^4 H = \frac{1}{2} V R^2 \end{aligned} \quad (7.35)$$

Integralsätze

Wir hatten schon im letzten Kapitel die infinitesimalen Versionen der Integralsätze nach Stokes und Gauß kennengelernt. Nach diesen Sätzen lassen sich Integrale von Vektorfeldern über geschlossene Wege in Integrale der Rotationen über die eingeschlossenen Flächen umschreiben (Stokes). Analog gehen

Integrale von Vektorfeldern über geschlossene Flächen in Integrale der Divergenzen über die eingeschlossenen Volumina über (Gauß).

Die soeben formulierten Sätze wurden für infinitesimale Geometrien “bewiesen”. Da endliche Geometrien in geeigneter Weise diskretisiert werden können, liefert die Anwendung der Integralsätze auf die infinitesimalen Rechtecke und Quader die gewünschte Aussage für die endlichen Geometrien! Beachte: die Beiträge von aneinander stoßenden Kanten bzw. Flächen zum Weg- bzw. Flächenintegral heben sich paarweise auf!



$$\begin{aligned}
 \int_{\text{geschl. Weg}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_{\text{eingeschl. Fläche}} \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} && \text{(Stokes)} \\
 \int_{\text{geschloss. Fläche}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} &= \int_{\text{eingeschl. Volumen}} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) dV && \text{(Gauß)}
 \end{aligned}
 \tag{7.36}$$

Bemerkung: Bevor wir Beispiele angehen, soll noch auf eine anschauliche Deutung des Gauß’schen Satzes hingewiesen werden. Das Flächenintegral eines Vektorfeldes hat die Bedeutung eines Fluß’ aus dem umschlossenen Volumen durch die begrenzende Oberfläche. Nach Gauß ist dieses Integral gleich dem Volumenintegral der Divergenz des Vektorfeldes, diese charakterisiert nach Gauß die Quellen des Vektorfeldes. Daher auch der Name “Divergenz”.

Beispiel Stokes: Das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ integriert über den Kreis mit Radius R um den Ursprung in der xy -Ebene liefert $2\pi R^2$, siehe Beispiel 2 (S.25) in Kapitel 6. Nach Beispiel 2 (S.30) ist $\vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, 0, 2)$, also konstant. Hier liefert die Integration von $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ über die umrandete Kreisscheibe (Flächenvektor $(0, 0, \pi R^2)$) direkt $\pi R^2 \times 2$. Man sieht die Gleichheit!

Beispiel Gauß: Betrachte $\vec{F}(\vec{r}) = r^n \hat{r}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(r^{n-1}x) + \frac{\partial}{\partial y}(r^{n-1}y) + \frac{\partial}{\partial z}(r^{n-1}z) \\
 &= r^{n-1} + (n-1)r^{n-2} \frac{x}{r} + \dots \\
 &= 3r^{n-1} + (n-1)r^{n-2} \frac{r^2}{r} = (n+2)r^{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{7.37}$$

Integral über Kugelfläche

$$\int_{\text{Fläche}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} = 4\pi R^2 R^n = 4\pi R^{n+2}
 \tag{7.38}$$

Integral der Divergenz über Kugel (sinnvoll für $n > 2$)

$$\begin{aligned}\int_{\text{Kugel}} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) dV &= 4\pi \int_0^R (n+2)r^{n-1}r^2 dr \\ &= 4\pi r^{n+2} \Big|_0^R = 4\pi R^{n+2}\end{aligned}\tag{7.39}$$

Identität!

8 Kepler-Problem

Wir wollen nun die Bewegungsgleichung für ein Teilchen (Planet...) der Masse m im Gravitationsfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (8.1)$$

behandeln. Zu der obigen Zentralkraft gehört das Potential

$$U(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r} \quad (8.2)$$

Zunächst sehen wir davon ab, daß wir ein 2-Körperproblem zu lösen haben. Wir nehmen an, daß die Masse M des zentralen Körpers (Sonne) viel größer als m ist, so daß der zentrale Körper ruht. Wir werden jedoch noch verstehen, daß jedes 2-Körperproblem durch Einführen der sog. reduzierten Masse auf ein effektives 1-Körperproblem reduziert werden kann. Unsere Näherung stellt somit keine wirkliche Einschränkung dar.

Wir notieren zwei Erhaltungssätze:

1) Energieerhaltung

$$\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r}) = E \quad (8.3)$$

2) Drehimpulserhaltung

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} \quad (8.4)$$

Die Energieerhaltung wurde schon aus den Newton'schen Bewegungsgleichungen abgeleitet. Hier ist noch die Erhaltung des Drehimpulses zu begründen:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = 0 + 0, \quad (8.5)$$

die letzten beiden Ausdrücke werten sich zu 0 aus, da u.a. \vec{F} und \vec{r} kollinear (parallel) sind.

Wir überlegen weiter, daß die Bewegung in einem Zentralpotential immer in eine Ebene erfolgt, die durch Anfangsbedingungen festgelegt ist, nämlich durch Orts- und Geschwindigkeits-Vektor zur Zeit t_0 . Da die Kraft radial-symmetrisch ist, liegen alle Kraftvektoren und somit auch die Beschleunigungsvektoren in der Ebene, die folglich nie verlassen wird. (Dies folgt auch aus der Drehimpulserhaltung. Alle Orts- und Impulsvektoren müssen zu allen Zeiten senkrecht auf \vec{L} stehen.)

In der Ebene führen wir Polarkoordinaten ein:

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} + r \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

Hier stellen r und ϕ zeitabhängige Funktionen dar: $r(t)$, $\phi(t)$. Für $\dot{\vec{r}}$ treten zwei Summanden auf, die orthogonal zueinander stehen!

Berechnung des Drehimpulses mittels (8.6)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = mrr\dot{\phi} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = mr^2\dot{\phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

Wir sehen, daß nur die dritte Komponente von Null verschieden ist, diese nennen wir L (und führen auch $l = L/m$ ein):

$$L := mr^2\dot{\phi}, \quad l := \frac{L}{m} = r^2\dot{\phi} \quad (8.8)$$

Sowohl L als auch l sind zeitlich konstant.

Zur Energieerhaltung:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \quad (8.9)$$

Einsetzen von (8.8) liefert mit (8.3)

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) &= E \\ \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) + U(r) &= E \end{aligned} \quad (8.10)$$

Im Prinzip ist das Problem nun gelöst. Mit der letzten Gleichung kann eine DGL erster Ordnung für $r(t)$ mit getrennten Variablen hergeleitet werden $\dot{r} = f(r)$. Diese kann aufintegriert werden mit dem Ergebnis $t = t(r)$. Invertieren liefert $r = r(t)$. Danach läßt sich auch (8.8) aufintegrieren, da $\dot{\phi}(t) = l/r^2(t)$. Leider kann dieses Programm nur numerisch durchgeführt werden, da keines der beiden Integrale "tabelliert ist".

Es gibt einen Trick, wie zumindest teilweise analytisch weitergerechnet werden kann und eine "geschlossene" Form für die Bahnkurve $R(\phi)$ in Polarkoordinaten hergeleitet werden kann. Wir werden sehr schnell die Gleichungen für Kegelschnitte finden.

Wir schreiben

$$r(t) = R(\phi(t)), \quad \dot{r} = R'(\phi)\dot{\phi} = R'(\phi)\frac{l}{R^2} = -\left(\frac{1}{R(\phi)}\right)' l, \quad (8.11)$$

wobei ' die Ableitung nach ϕ bezeichnet. Damit folgt ¹

¹ In analoger Weise läßt sich jedes beliebige Zentralpotential $U(r)$ behandeln. Man sieht, daß für ein geeignetes $1/r^2$ Potential und $E = 0$ als Bahn eine logarithmische Spiralbahn ergibt, d.h. $R(\phi) = R_0 \exp(-\phi)$.

$$\left[\left(\frac{1}{R} \right)' \right]^2 + \left(\frac{1}{R} \right)^2 - \frac{2GM}{l^2} \frac{1}{R} = \frac{2E}{ml^2} \quad (8.12)$$

Quadratische Ergänzung

$$\left[\left(\frac{1}{R} \right)' \right]^2 + \left(\frac{1}{R} - \frac{GM}{l^2} \right)^2 = \frac{2E}{ml^2} + \left(\frac{GM}{l^2} \right)^2 \quad (8.13)$$

Wir können hier die Lösung in geschlossener Form angeben, da das mathematische Problem vom harmonischen Oszillator bekannt ist

$$\frac{1}{R} - \frac{GM}{l^2} = \sqrt{\frac{2E}{ml^2} + \left(\frac{GM}{l^2} \right)^2} \cos \phi \quad (8.14)$$

oder mit den Abkürzungen (p Parameter, e Exzentrizität)

$$p = \frac{l^2}{GM}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{G^2mM^2}} \quad (8.15)$$

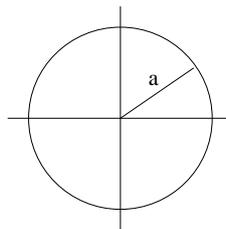
lautet die Bahnkurve

$$\frac{p}{R(\phi)} = 1 + e \cos \phi \quad (8.16)$$

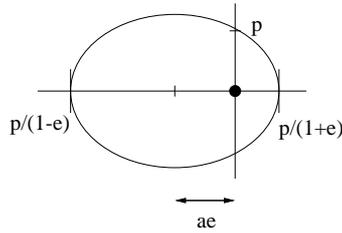
Eine trivial scheinende Beobachtung ist, daß $R(\phi)$ eine 2π -periodische Funktion ist. Dies ist alles andere als trivial, da die physikalische Bedeutung ist, daß alle endlichen Bahnen *geschlossen* sind!

Mit einem Blick zu (8.13) erkennen wir, daß die Parameter p und e unabhängig voneinander alle beliebigen Werte aus \mathbb{R}^+ annehmen können. Wir diskutieren die einzelnen Fälle.

Kreis $e = 0$



Offenbar wird durch $e = 0$ eine Bahn mit konstantem Radius p beschrieben.

Ellipse $0 < e < 1$ 

Hier wird eine geschlossene Bahn beschrieben mit Perihel und Aphel (dem Zentrum nächstgelegenen bzw. entferntesten Punkt) bei $\phi = 0$ und $= \pi$ mit Werten

$$R_{min} = \frac{p}{1+e}, \quad R_{max} = \frac{p}{1-e} \quad (8.17)$$

Das arithmetische Mittel, die sog. große Halbachse a ist

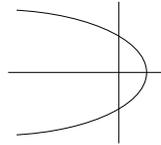
$$a = \frac{p}{1-e^2} = -\frac{GmM}{2E} \quad (8.18)$$

Der Abstand des Ellipsenmittelpunktes vom Gravitationszentrum ist

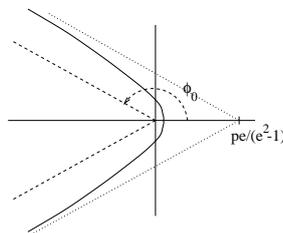
$$a - \frac{p}{1+e} = \frac{p}{2} \left(\frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e} \right) = \frac{pe}{1-e^2} = ae \quad (8.19)$$

Nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie (siehe auch Übungen) ist die kleine Halbachse b

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \quad (8.20)$$

Parabel $e = 1$ 

Hier liegt eine unbeschränkte Bahn vor, da $R(\phi)$ mit $\phi \rightarrow \pm\pi$ gegen ∞ geht.

Hyperbel $e > 1$ 

Hier liegen ebenfalls unbeschränkte Bahn vor, da $R(\phi)$ mit $\phi \rightarrow \pm\phi_0$ gegen ∞ geht. Dabei ist $\pi/2 < \phi_0 < \pi$ und gegeben durch

$$\cos \phi_0 = -\frac{1}{e} \quad (8.21)$$

Mit einem Blick zu (8.15) stellen wir fest, daß die endlichen (oder gebundenen) Bahnen, d.h. Kreis und Ellipse, bei negativer Gesamtenergie $E < 0$ auftreten. Unbeschränkte (oder ungebundene) bahnen liegen in den Fällen der Parabel und der Hyperbel vor mit Gesamtenergie $E = 0$ bzw. $E > 0$.

Bemerkung: Das Argument der Wurzel in (8.15) kann nie negativ werden! Warum?

Wir können nun die Keplerschen Gesetze zusammenfassen:

1. Gesetz (Geometrie der Bahnkurven)

Die Bahnkurven sind Kegelschnitte, im speziellen Fall der gebundenen Bahnen (negative Gesamtenergie) Ellipsen und Kreise.

2. Gesetz (Flächensatz)

Der Ortsvektor (Zentrum–Planet) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Dies folgt aus der Drehimpulserhaltung

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\phi \implies \dot{A} = \frac{r^2}{2} \dot{\phi} = \frac{l}{2} \quad (8.22)$$

Wir können diese Beziehung sogar über einen Umlauf mit Umlaufzeit (Periode) T aufintegrieren und erhalten

$$A_{ges} = \frac{l}{2} T \quad (8.23)$$

Wir setzen ein

$$A_{ges.} = \pi ab = \frac{\pi ap}{\sqrt{1-e^2}} \quad (8.24)$$

und quadrieren die resultierende Beziehung

$$\frac{\pi^2 a^2 p^2}{1-e^2} = \frac{l^2}{4} T^2 \quad (8.25)$$

Mit (8.18) und (8.15) folgt dann

$$\frac{p^2}{1-e^2} = ap = \frac{al^2}{GM} \quad (8.26)$$

und ferner

$$\frac{\pi^2 a^3}{GM} = \frac{T^2}{4} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (8.27)$$

also:

3. Gesetz (Beziehung Periode–große Halbachse)

Das Verhältnis aus Quadrat der Umlaufzeit zur dritten Potenz der großen Halbachse ist konstant.

Das Zwei-Körper-Problem und die reduzierte Masse

Hier wollen wir die angekündigte Reduzierung des Zwei-Körper- auf ein Ein-Körper-Problem durchziehen. Wir benennen die Ortsvektoren der Körper mit Massen M und m mit \vec{r}_M und \vec{r}_m . Die Bewegungsgleichungen lauten

$$M\ddot{\vec{r}}_M = \vec{F}(\vec{r}_M - \vec{r}_m), \quad m\ddot{\vec{r}}_m = -\vec{F}(\vec{r}_M - \vec{r}_m) \quad (8.28)$$

Summieren liefert für den Schwerpunkt

$$\vec{r}_S = \frac{M\vec{r}_M + m\vec{r}_m}{M + m} \quad (8.29)$$

des Systems $\ddot{\vec{r}}_S = 0$ also eine gleichmäßige unbeschleunigte Bewegung. Für die Differenzkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_m$ folgt

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \vec{F}(\vec{r}) \quad (8.30)$$

also die bekannte Bewegungsgleichung mit einer effektiven, der sog. reduzierten Masse μ , die durch

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \quad (8.31)$$

definiert ist.

Wir können nun alle Formeln wie oben angegeben übernehmen, wobei wir im wesentlichen m durch μ zu ersetzen haben, außer in der Kombination GMm . Wir sehen, daß die ersten beiden Kepler Gesetze unverändert gelten. Für das 3. Kepler Gesetz erhalten wir jedoch

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{\mu}{GMm} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)} \quad (8.32)$$

Wir sehen, daß für ein gegebenes Zentrum mit Masse M und zwei Planeten mit Massen m_1 , m_2 , sowie Bahnparametern T_1 , T_2 und a_1 , a_2 gilt:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{M + m_1}{M + m_2} \quad (8.33)$$

Periheldrehung

Wir hatten schon auf eine wichtige Eigenschaft der gebundenen Bahnen im $1/r$ Potential hingewiesen: Geschlossenheit (bzw. 2π -Periodizität). Diese Eigenschaft ist nicht selbstverständlich, da sie im Falle von $1/r^n$ -Potentialen nur für $n = 1$ und $n = -2$ gilt.

Abweichungen vom Fall $n = 1$ sind nicht unrealistisch, so gibt es in einer relativistischen Behandlung des Keplerproblems einen Energiesatz wie (8.10), mit einer Korrektur zum Potential $U(r)$ wie

$$U(r) \rightarrow U(r) - \frac{3}{4} \frac{mM^2 G^2}{r^2 c^2} \quad (8.34)$$

Es ergibt sich hier eine Periheldrehung (nach ordentlicher relativistischer Rechnung) von

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{3MG}{rc^2} \quad (8.35)$$

wobei r der mittlere Sonnenabstand ist. Bei Merkur ist die durch relativistische Effekte bedingte Periheldrehung am stärksten und beträgt $0.1038''$ pro Umlauf bzw. $43.11 \pm 0.45''$ pro Erdjahrhundert.

9 Der starre Körper

Wir notieren zunächst die bekannten Erhaltungssätze, Energie, Drehimpuls, Impuls. Diese Erhaltungsgrößen gelten für 1-, 2-,... N -Körpersysteme, falls die Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung eine konservative Zwei-Teilchenkraft ist, die radialsymmetrisch ist und (natürlich) dem 3. Newton'schen Gesetz (Actio=Reactio) genügt.

Die Energie ist die Summe der kinetischen Energien der einzelnen Teilchen plus potentielle Energie, die die Summe aller Zwei-Teilchen-Potentiale ist. Bei der Kraftausübung zwischen den Teilchen wird Drehimpuls übertragen, aber paarweise bleibt dieser erhalten (siehe Übungen). Analoges gilt für den Impuls.

Wir wollen nun ein spezielles N -Teilchensystem (Atome) betrachten, bei dem die 2-Teilchen-Kräfte einen festen Abstand fixieren. Offenbar gelten hier die drei Erhaltungssätze. Die Freiheitsgrade der vielen Teilchen sind aber soweit reduziert, daß nur 6 übrig bleiben: 3 Translations- und 3-Rotations-Freiheitsgrade. Generell ist jede Bewegung, die ein starrer Körper ausführen kann eine Rotation um eine geeignet zu wählende Achse (evtl. außerhalb des Körpers). Alternativ kann diese Bewegung als Überlagerung aus Translation des Schwerpunktes und Eigenrotation um eine Achse durch den Schwerpunkt beschrieben werden.

Zentral ist der Begriff der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Für starre Drehung um Achse durch Ursprung mit Richtung $\vec{\omega}$ und Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}|$ hat ein Punkt mit Ortsvektor \vec{r} die Geschwindigkeit \vec{v}

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (9.1)$$

Liegt eine Drehung um eine Achse $\vec{\omega}$ durch einen Punkt \vec{R} vor, dann ist der Zusammenhang zwischen \vec{r} und \vec{v} natürlich

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) \quad (9.2)$$

Der Deutlichkeit wegen spricht man auch von momentaner Drehachse, um u.a. auf die zeitliche Änderung der Drehachse hinzuweisen.

Impuls

Bei einer reinen Rotation um $\vec{\omega}$ durch \vec{R} ist der Impuls durch die Gesamtmasse \mathcal{M} gegeben:

$$\vec{P} = \sum m\vec{v} = \sum m\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) = \mathcal{M}\vec{\omega} \times (\vec{r}_S - \vec{R}) \quad (9.3)$$

Hier wurde benutzt

$$\sum m = \mathcal{M}, \quad \sum m\vec{r} = \mathcal{M}\vec{r}_S \quad (9.4)$$

Drehimpuls

Hier wollen wir für den Fall der reinen Rotation um eine Achse durch den Ursprung eine kompakte Formel für den Drehimpuls des starren Körpers durch Summation ($\sum m \dots$) über die einzelnen Teilchen (Atome,...) herleiten. Mit (2.22) gilt

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum m \vec{r} \times \vec{v} = \sum m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \sum m [r^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r}\vec{\omega})] \\ &= \sum m \begin{pmatrix} r^2 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \end{pmatrix} \vec{\omega} - \sum m \begin{pmatrix} x_1 x_1 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2 x_2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3 x_3 \end{pmatrix} \vec{\omega} \\ &= I \cdot \vec{\omega} \end{aligned} \tag{9.5}$$

hierbei wurde der Trägheitstensor benutzt:

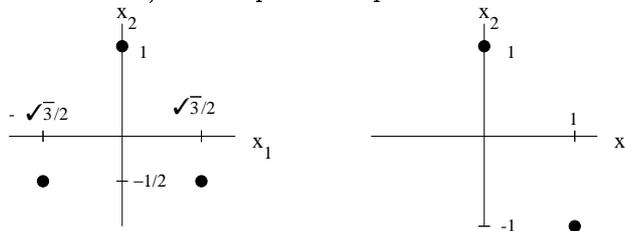
$$I = \begin{pmatrix} \sum m(x_2^2 + x_3^2) & -\sum m x_1 x_2 & -\sum m x_1 x_3 \\ -\sum m x_2 x_1 & \sum m(x_1^2 + x_3^2) & -\sum m x_2 x_3 \\ -\sum m x_3 x_1 & -\sum m x_3 x_2 & \sum m(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

Für kontinuierliche Massenverteilungen wird die Summe $\sum m$ durch das Integral $\int dm$ bzw. $\int dr^3 \rho(\vec{r})$ ersetzt, wobei $\rho(\vec{r})$ die Massendichte ist.

Beispiel: Betrachte die Anordnungen von Massenpunkten (jeweils gleiche Masse m) wie in der Figur. Die Trägheitstensoren lauten

$$I_1 = m \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I_2 = m \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

I_1 ist diagonal, ferner sind die ersten beiden Diagonalelemente identisch. Interpretation: ist die Winkelgeschwindigkeit parallel zur z -Achse, oder liegt sie in der $x - y$ -Ebene, so sind Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit kollinear. (Hauptträgheitsachsen bzw. Eigenvektoren von I !). Bei Abwesenheit äußerer Kräfte ist die Rotation um Hauptträgheitsachsen leicht zu beschreiben: Drehachse und Drehimpulsachse sind zeitlich konstant. Ist eine (momentane) Drehachse nicht identisch mit einer Hauptträgheitsachse, so beschreibt der starre Körper eine Rotation um die (momentane) Drehachse, die selbst um die (zeitlich konstante) Drehimpulsachse präzediert.



Im Fall I_2 ist die Matrix nichtdiagonal. Liegt hier die Winkelgeschwindigkeit parallel zur x -Achse, so ist der Drehimpuls nicht parallel! Es lassen sich aber bei allen symmetrischen reellen Matrizen orthogonale Eigenvektoren finden. Man prüfe, daß für I_2 folgende Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (-1 + \sqrt{5})/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ (-1 - \sqrt{5})/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

Eigenvektoren zu den Eigenwerten $(3 + \sqrt{5})/2$, $(3 - \sqrt{5})/2$, 3 sind und damit Hauptträgheitsachsen definieren.

Bemerkung: (i) Der Drehimpuls ist abhängig vom Aufpunkt!

(ii) Oben wurde angenommen, daß die Drehachse durch den Koordinatenursprung laufe. Falls die Drehachse $\vec{\omega}$ durch \vec{R} laufe, gilt für den Drehimpuls bezgl. des Koordinatenursprungs

$$\vec{L} = \sum m\vec{r} \times \vec{v} = \sum m\vec{R} \times \vec{v} + \sum m(\vec{r} - \vec{R}) \times \vec{v} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_R \quad (9.9)$$

wobei $\vec{L}_R = I_R\vec{\omega}$ den Drehimpuls bezgl. \vec{R} bezeichnet bzw. I_R der Trägheitstensor des starren Körpers bezgl. \vec{R} .

Da die Drehachse eines starren Körpers sich allgemein bei der Bewegung ändert, ist es sinnvoll von der Beschreibung der Bewegung als reine Rotation um die momentane Drehachse abzurücken und die Bewegung als Translation des Schwerpunktes mit gleichzeitiger Rotation um Achse durch den Schwerpunkt mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zu behandeln.

Sei die Geschwindigkeit des Schwerpunktes \vec{r}_S gleich \vec{v}_S , dann ist die Geschwindigkeit \vec{v} eines beliebigen Punktes mit Ortsvektor \vec{r}

$$\vec{v} = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_S) \quad (9.10)$$

Der Drehimpuls ist gleich

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum m\vec{r} \times \vec{v} = \sum m\vec{r} \times (\vec{v}_S + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_S)) \\ &= \mathcal{M}\vec{r}_S \times \vec{v}_S + \sum m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_S)) \\ &= \mathcal{M}\vec{r}_S \times \vec{v}_S + \sum m\vec{r}_S \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_S)) + \sum m(\vec{r} - \vec{r}_S) \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_S)) \\ &= \vec{r}_S \times \vec{P} + 0 + \vec{L}_S \end{aligned} \quad (9.11)$$

erfüllt also eine Beziehung analog zu (9.9). Worin besteht der Unterschied?

Kinetische Energie

Die kinetische Energie stellt sich wieder als einfacher Ausdruck bei Benutzung des Trägheitstensors dar. Mit (2.22) folgt

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \sum m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \frac{1}{2} \sum m [\vec{\omega}^2 \vec{r}^2 - (\vec{\omega} \vec{r})^2] = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} \quad (9.12)$$

Liegt eine Rotation um eine Achse durch \vec{R} vor, so ist oben in den Formeln \vec{r} durch $\vec{r} - \vec{R}$ zu ersetzen, bzw. I durch I_R , den Trägheitstensor bzgl. \vec{R}

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I_R \vec{\omega} \quad (9.13)$$

Sei nun wieder die allgemeine Bewegung als Überlagerung aus Translation des Schwerpunktes \vec{r}_S und Rotation um Achse durch \vec{r}_S beschrieben, dann gilt

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} \sum m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \sum m (\vec{v}_S + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_S))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum m \vec{v}_S^2 + \sum m \vec{v}_S (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_S)) + \frac{1}{2} \sum m (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_S))^2 \\ &= \frac{\mathcal{M}}{2} \vec{v}_S^2 + 0 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I_S \vec{\omega} \end{aligned} \quad (9.14)$$

Aus der letzten Beziehung folgt der Satz von Steiner, siehe auch Übungen.

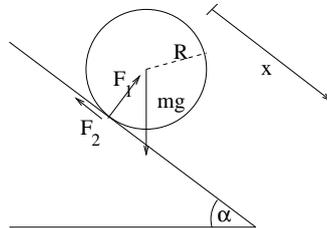
Bewegungsgleichungen

Die Aufspaltung der Bewegung in Translation und Eigenrotation ist die Grundlage zur Behandlung der Bewegung des starren Körpers bei Einwirken von äußeren Kräften \vec{F}_i an Punkten \vec{r}_i . Sei $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ die Gesamtkraft und $\vec{M} = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_S) \times \vec{F}_i$ das Gesamtdrehmoment bzgl. des Schwerpunktes. Dann gilt

$$\dot{\vec{P}} = \mathcal{M} \ddot{\vec{r}}_S = \vec{F}, \quad \dot{\vec{L}} = \vec{M} \quad (9.15)$$

(Achtung: hier gilt $\dot{\vec{L}} = I \dot{\vec{\omega}}$ nur ausnahmsweise. $\dot{I} = 0$ gilt natürlich immer für vollständig symmetrische Kreisel.)

Beispiel: Es rolle eine Kugel mit Masse m und Trägheitsmoment I (isotrop) eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α hinunter, siehe Figur. Die Haftreibung sei hinreichend starke, so daß kein "Schlupf" vorliege, d.h. die relative Geschwindigkeit zwischen Kugeloberfläche und Unterlage sei null. Die Ebene übt am Kontaktpunkt eine Kraft mit Vertikal- und Horizontalkomponenten F_1 und F_2 aus. Die Schwerkraft hat Komponenten $mg \cos \alpha$ und $mg \sin \alpha$.



Translationsfreiheitsgrad

Die Vertikalkomponenten kompensieren sich, die Horizontalkomponenten sind Ursache der Beschleunigung \ddot{x} parallel zur Ebene:

$$\begin{aligned} -F_1 + mg \cos \alpha &= 0 \\ -F_2 + mg \sin \alpha &= m\ddot{x} \end{aligned} \quad (9.16)$$

Rotationsfreiheitsgrad

Das Drehmoment bezogen auf den Schwerpunkt ist $M = R \cdot F_2$. Die Winkelbeschleunigung (zeitl. Ableitung der Winkelgeschwindigkeit) ist \ddot{x}/R , da kein Schlupf vorhanden. Gleichsetzen von M und $\dot{L} = I\ddot{x}/R$:

$$F_2 = I \frac{\ddot{x}}{R^2} \quad (9.17)$$

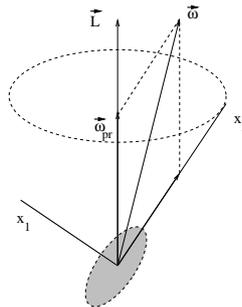
Eliminieren von F_2 :

$$mg \sin \alpha = \left(m + \frac{I}{R^2} \right) \ddot{x} \quad (9.18)$$

Beispiel: Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Wir betrachten nun einen starren Körper mit einer Rotations-Symmetrieachse ("Figurenachse"), d.h. einen Körper mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten $I_1 = I_2$ und einem i.a. verschiedenen I_3 . Siehe hierzu das Beispiel 1 dieses Kapitels. Wir überlegen uns zunächst, daß bei einer Rotation um eine momentane Drehachse $\vec{\omega}$ durch den Schwerpunkt (die Schwerpunktsbewegung werde als abgespalten betrachtet), die momentane Drehachse $\vec{\omega}$, die Figurenachse und die Drehimpulsachse in einer Ebene liegen. Dazu gehe in ein momentanes Bezugssystem, das als x_3 -Achse die Figurenachse habe, als x_1 -Achse eine dazu senkrechte Achse, die in der Ebene aus \vec{L} und Figurenachse liege. Die x_2 -Achse sei senkrecht zu den x_1 -, x_3 -Achsen.

Die Winkelgeschwindigkeit ist in diesen Koordinaten (=Hauptträgheitsachsen) $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ und $\vec{L} = I\vec{\omega} = (I_1\omega_1, I_1\omega_2, I_3\omega_3)$. Andererseits gilt $\vec{L} = (L_1, 0, L_3)$, also folgt $\omega_2 = 0$, d.h. die Behauptung.



Da die Drehimpulsachse i.a. nicht mit der Figurenachse zusammenfällt, besteht die Gesamttrotation aus einer Rotation um die Figurenachse mit überlagerter Drehung bzw. Präzession der Figurenachse. Um die beiden Anteile zu

bestimmen, zerlegen wir $\vec{\omega}$ in zwei linear unabhängige (aber nicht notwendig orthogonale) Komponenten bzgl. \vec{L} und der Figurenachse:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \lambda \vec{L} + \mu \hat{x}_3 = \lambda \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ 0 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

Es muß $\lambda = 1/I_1$ sein! Also ist

$$\vec{\omega}_{pr} = \vec{L}/I_1 = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \frac{I_3}{I_1} \omega_3 \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

Unter der weiteren Bewegung bleibt \vec{L} zeitlich konstant, nicht jedoch die Figurenachse und die momentane Drehachse $\vec{\omega}$. Unverändert wird die Anordnung in einer gemeinsamen Ebene mit den gleichen Winkeln zwischen \vec{L} , Figurenachse und $\vec{\omega}$ sein. (Keine Nutations-Bewegung.) Grund: die Präzession bewegt die Figurenachse senkrecht aus der augenblicklichen gemeinsamen Ebene heraus.

10 Statistik

Wahrscheinlichkeit, Mittelwert

Eine Variable A nehme Werte aus einer vorgegebenen Menge $\{a_1, \dots, a_\kappa\}$ an. Man denke an Messungen einer physikalischen Größe. Es seien N Messungen durchgeführt worden mit Ergebnissen $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(N)}$, wobei n_k mal der Wert a_k gemessen wurde ($k = 1, 2, 3, \dots, \kappa$). Wir sind im allgemeinen nicht an den einzelnen Meßwerten interessiert, sondern an geeigneten Mittelwerten (Erwartungswerten), so z.B.

$$\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_k A^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\kappa} n_k a_k = \sum_{k=1}^{\kappa} \frac{n_k}{N} a_k \quad (10.1)$$

wobei im Limes $N \rightarrow \infty$ die Wahrscheinlichkeit des Meßwertes a_k definiert wird

$$w_k := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_k}{N} \quad (10.2)$$

Bemerkung: Wahrscheinlichkeitsverteilungen erfüllen offensichtlich

$$0 \leq w_k \leq 1, \quad \sum_k w_k = 1 \quad (10.3)$$

Die Meßwerte $\{a_1, \dots, a_\kappa\}$ mit Wahrscheinlichkeiten w_k definieren eine Ereignisreihe.

Beispiel 1: Würfel

Hier sind die "Meßergebnisse" die Zahlen 1,2,3,4,5,6 mit den Wahrscheinlichkeiten $w_k = 1/6$ für $k = 1, \dots, 6$.

Beispiel 2: Modifizierter Würfel mit Beschriftung 1,2,3,4,(4,4)

Hier lauten die Wahrscheinlichkeiten $w_k = 1/6$ für $k = 1, \dots, 3$ und $w_4 = 3/6 = 1/2$.

Definition: Allgemeine Mittelwerte

Sei f eine Funktion. Bisher wurde betrachtet $f(A) = A, A^2$. Aber auch allgemeiner für $f(A) = A^n$ oder jede andere Funktion ($f(A) = \sin A$) wird definiert

$$\overline{f(A)} = \sum_k w_k f(a_k) \quad (10.4)$$

Offenbar gilt Linearität unter der Mittelung

$$\overline{\lambda f(A)} = \lambda \overline{f(A)}, \quad \overline{f(A) + g(A)} = \overline{f(A)} + \overline{g(A)} \quad (10.5)$$

falls λ konstant ist.

Schwankung

Wir wollen ein Maß für die Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert definieren. Ein geeignetes Maß ist die mittlere quadratische Abweichung

$$\overline{(A - \bar{A})^2} = \sum_k w_k (A_k - \bar{A})^2 \geq 0 \tag{10.6}$$

Offensichtlich gilt folgende Identität

$$\overline{(A - \bar{A})^2} = \overline{A^2 - 2A\bar{A} + \bar{A}^2} = \overline{A^2} - 2\overline{A\bar{A}} + \bar{A}^2 = \overline{A^2} - \bar{A}^2 \tag{10.7}$$

Definition: Die Standardabweichung ist definiert durch die Quadratwurzel der mittleren quadratischen Abweichung $\Delta A := \sqrt{\overline{(A - \bar{A})^2}}$.

Definition: Relative Schwankung $\frac{\Delta A}{\bar{A}}$

Unabhängige Ereignisse

Sei neben einer Ereignisreihe a_k eine zweite Ereignisreihe b_l gegeben. Unabhängigkeit der Ereignisse soll bedeuten, daß die Wahrscheinlichkeit für eine Messung von (A, B) mit Ergebnis (a_k, b_l) einfach durch das Produkt

$$w_{k,l}^{ab} = w_k^a \cdot w_l^b \tag{10.8}$$

mit geeigneten Einzelwahrscheinlichkeiten w_k^a und w_l^b gegeben ist.

Beispiel: Zwei Würfel

Die Wahrscheinlichkeit das Ergebnis k mit dem ersten Würfel gleichzeitig l mit dem zweiten zu erzielen ist $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Für unabhängige Ereignisse A und B lassen sich Mittelwerte von Produkten wie folgt behandeln

$$\begin{aligned} \overline{f(A) \cdot g(B)} &= \sum_{k,l} w_{k,l}^{ab} f(a_k) g(b_l) = \sum_{k,l} w_k^a f(a_k) w_l^b g(b_l) \\ &= \left(\sum_k w_k^a f(a_k) \right) \left(\sum_l w_l^b g(b_l) \right) = \overline{f(A)} \cdot \overline{g(B)} \end{aligned} \tag{10.9}$$

wobei z.B. $\overline{f(A)}$ bzgl. w^{ab} oder auch w^a verstanden werden kann.

In analoger Weise definiert man die Unabhängigkeit von beliebig vielen Ereignisreihen. Ebenso ist die Verallgemeinerung der letzten Rechenregeln klar. Wir wollen diese Überlegungen auf Ensembles anwenden.

Definition: Ensemble: Menge von n vielen gleichartigen Objekten, über die Aussagen gemacht werden oder an denen Messungen vorgenommen werden sollen.

Beispiel 1: Ensemble von Molekülen eines Gases in einem Behälter. Mittlere Energie der Moleküle entspricht der Wärme.

Beispiel 2: Das Ausführen von n -maligen Messungen an der gleichen Meßapparatur kann als Ensemble aufgefaßt werden.

Wir wollen nun an den n gleichartigen Objekten die gleichen Messungen (simultan) durchführen und erhalten die Meßwerte zu den Variablen A_1, A_2, \dots, A_n . Im weiteren wollen wir annehmen, daß die Ergebnisse dieser Einzelmessungen unabhängig voneinander sind, aber der gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilung genügen mit Mittelwert a und Standardabweichung Δa .

Schätzwerte

Wir definieren als Schätzwert für den Mittelwert des einzelnen Ereignisses A_j (mit in der Praxis unbekanntem a) das arithmetische Mittel

$$A = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}, \quad (10.10)$$

das selbst eine Variable ist mit eigener Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Achtung: Formelmäßig scheint es sich hier um eine Duplizierung des oben Gesagten zu handeln. Der Unterschied ist durchaus subtil, wird aber dadurch klarer, daß wir uns überlegen, die n -vielen Einzelmessungen als "große" Gesamtmessung vorstellen, die beliebig häufig wiederholt wird. Der Erwartungswert von A ist dann

$$\overline{A} = \frac{1}{n} \sum A_i = \frac{1}{n} \sum \overline{A_i} = \frac{1}{n} \sum a = a \quad (10.11)$$

Die Standardabweichung von A ist jedoch nicht gleich Δa , sondern viel kleiner

$$\overline{A^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} A_i A_j = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \overline{A_i A_j} \quad (10.12)$$

Hier überlegen wir, daß $\overline{A_i A_j}$ unterschiedliche Ergebnisse liefert, je nachdem ob $i = j$ ($\overline{A_i^2} = (\Delta a)^2 + a^2$) oder $i \neq j$ ($\overline{A_i A_j} = \overline{A_i} \overline{A_j} = a \cdot a = a^2$) ist. Also

$$\overline{A^2} = \frac{1}{n^2} (n[(\Delta a)^2 + a^2] + (n^2 - n)a^2) = \frac{1}{n^2} (n(\Delta a)^2 + n^2 a^2) = \frac{1}{n} (\Delta a)^2 + a^2 \quad (10.13)$$

Ferner

$$(\Delta A)^2 = \overline{A^2} - \overline{A}^2 = \overline{A^2} - a^2 = \frac{1}{n} (\Delta a)^2 \quad (10.14)$$

Damit ist die Standardabweichung $\Delta A = \Delta a / \sqrt{n}$ um einen Faktor \sqrt{n} kleiner!

Wiederum gehen wir pragmatisch vor und stellen fest, daß die Standardabweichung weder von einzelnen Ereignissen A_i noch von dem arithmetischen Mittel bekannt ist. Als Schätzwert für $(\Delta a)^2$ mag man die Varianz

$$V = \frac{\sum_i A_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_i A_i}{n} \right)^2 \quad (10.15)$$

ansetzen. Der Erwartungswert der Varianz ist jedoch

$$\bar{V} = (\Delta a)^2 + a^2 - \bar{A}^2 = \left(1 - \frac{1}{n} \right) (\Delta a)^2 \quad (10.16)$$

und damit gilt

$$\Delta a = \sqrt{\frac{n}{n-1} \bar{V}} \quad (10.17)$$

Binomialverteilung

Von N vorgegebenen Plätzen seien n besetzt (und $N - n$ unbesetzt). Die Anzahl aller derartiger Kombinationen ist der Binomialkoeffizient

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} =: \binom{N}{n} \quad (10.18)$$

Falls jeder der einzelnen Plätze unabhängig mit der Wahrscheinlichkeit p besetzt wird (und mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ unbesetzt bleibt), ist die Wahrscheinlichkeit zu einer vorgegebenen Konfiguration von n besetzten und $N - n$ unbesetzten Plätzen gerade $p^n q^{N-n}$. Die Wahrscheinlichkeit, irgendeine n Plätze besetzt und die verbliebenen $N - n$ unbesetzt zu haben, ist

$$w_n = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}. \quad (10.19)$$

Offenbar gilt $0 \leq w_n \leq 1$ und

$$\sum_{i=0}^N w_n = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} p^i q^{N-i} = (p+q)^N = 1^N = 1 \quad (10.20)$$

Beispiel: Krankheitsanfälligkeit einzelner Menschen mit Wahrscheinlichkeit p führt zu einer Binomialverteilung im Krankheitsbild einer Gruppe (Gesellschaft).

Wir wollen nun allgemeine Mittelwerte (Momente) $\bar{n^m}$ berechnen, also Mittelwerte der m . Potenz der Gesamtzahl besetzter Plätze

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N w_n n^m &= \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} n^m p^i q^{N-i} = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^m p^i q^{N-i} \\ &= \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^m \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} p^i q^{N-i} = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^m (p+q)^N \end{aligned} \quad (10.21)$$

hier gehen wir von unabhängigen p und q aus und setzen erst nach dem Ableiten $p + q = 1$. Es folgt

$$\bar{n} = pN(p+q)^{N-1} = pN \quad (10.22)$$

und

$$\overline{n^2} = pN(p+q)^{N-1} + p^2N(N-1)(p+q)^{N-2} = pN + p^2N(N-1) \quad (10.23)$$

Also

$$(\Delta n)^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = p(1-p)N = pqN \quad (10.24)$$

Index

- N -Körpersysteme 50
- n -Tupel 4
- n . Ableitung 12
- n -dimensionalen Kugel 36

- abelsche Gruppe 4
- ableitbar 10
- Ableitung 10
- affiner Unterraum 18
- Amplitude 22
- Anfangswertproblem 16
- Aperiodischer Grenz-Fall 22
- Aphel 46
- Arbeit 25

- Basis 4
- Beschleunigung 11
- bestimmtes Integral 14
- Betrag 5
- bilinear 5
- Binomialverteilung 59

- Contour 26

- Determinante 8
- DGL 16
- Differential 10
- differenzierbar 10
- Dimension 4
- Divergenz $\vec{\nabla} \cdot$ 31
- Drehimpuls 51

- Eigenrotation 50
- Eigenvektoren 51
- einfach zusammenhängend 31
- Einheitsmatrix 7
- Einheitsvektor 5
- Einsteinsche Summenkonvention 6

- Ellipse 45
- Energiesatz 19
- Ensemble 57
- entartet 20
- Ereignisreihe 56
- Erhaltungssätze 50
- Erwartungswerte 56
- Erzeugendensystem 4
- Erzwungene Schwingung 20
- Euklidischer Raum 6
- Existenz und Eindeutigkeit 16

- Faktorisierung 35
- Flächeninhalt 8
- Flächensatz 47
- Freiheitsgrade 50
- Fundamentalsatz der Analysis 12

- Gammafunktion Γ 36
- Gauß 41
- Gauß'scher Satz 31
- Gauß-Integral 35
- gedämpfter Fall 21
- geschlossen 45
- Geschlossenheit 48
- Geschwindigkeit 11
- getrennte Variable 18
- Gewöhnliche Differentialgleichung n .
Ordnung 18
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
16
- Gradient 27
- Gravitationskraft 28
- Green-Funktion 23

- Halbachse; große, kleine 46
- Harmonische Kraft 22

- harmonischer Oszillator 20
- Hauptträgheitsachsen 51
- Hyperbel 46
- Impedanz 22
- Impuls 50
- inneres Produkt 5
- Integral 12, 33
- Inverse 7
- Kegelschnitte 47
- Kepler-Problem 43
- Keplersche Gesetze 47
- kinetische Energie 52
- Komponenten 5
- Komposition 6
- konservativ 27
- konstante Koeffizienten 19
- Koordinaten 5
- Kraftstoß 23
- Kreis 45
- Kreuzprodukt 8
- Kronecker-Delta 7
- Kugelkoordinaten 38
- Kurvenintegral 25
- Länge 5
- Lebesgue 12
- linear homogen 16
- lineare (Un-) Abhängigkeit 4
- lineare Abbildung 6
- lineare DGL 16
- Linearisieren 30
- logarithmische Integration 15
- Matrizen 6
- Mehrdimensionale Integrale 33
- Mittelwert 56
- momentane Drehachse 50
- Nabla ∇ 27
- Norm 5
- Nullstellengleichung 20
- Ordnung 30
- orientierte Orthonormalbasis 8
- orthogonal 5
- orthonormale Basis 6
- Parabel 46
- partielle Integration 15
- Perihel 46
- Periheldrehung 48
- Phasenverschiebung 22
- Polarkoordinaten 37
- positiv definit 5
- Potential 19, 27
- Präzession 54
- Produkt zweier Matrizen 7
- quadratische Abweichung 57
- Radialsymmetrie 34
- radialsymmetrische Kraft 28
- Ratengleichung 17
- Rechte-Hand-Regel 8
- reduzierte Masse 48
- regulär 7
- Reihenschaltung 20
- Rekursionsbeziehung 36
- Relative Schwankung 57
- relativistische Effekte 49
- Riemann 12
- Rotation 50
- Rotation $\vec{\nabla} \times$ 29, 30
- Satz von Steiner 53
- Schätzwerte 58
- Schaltkreis 20
- Schwankung 56
- Schwerpunkt 50
- Schwingungs-Fall 21
- singulär 7
- Skalar 9
- Skalarprodukt 5
- Spatprodukt 9
- spezielle Koordinatensysteme 37
- spezielle Lösung 19
- Stammfunktion 12
- Standard-Skalarprodukt 5
- Standardabweichung 57
- starrer Körper 50
- Statistik 56
- Stokesscher Satz 29, 30
- Stokes 41
- Substitutionsregel 15
- Superpositionsprinzip 17
- symmetrisch 5
- symmetrischer Kreisel 54

Tangentensteigung	10
Tensor	9
Trägheitstensor	51
Translation	50
Transposition	7
Umlaufzeit	47
unabhängige Ereignisse	57
uneigentliches Integral	14
Unterraum	18
Varianz	59
Variation der Konstanten	18
Vektoren	4
Vektorraum	4
Verkettung	6
Volumen	9
Wahrscheinlichkeit	56
Winkel	5
Winkelgeschwindigkeit ω	50
Zerlegungssatz	9
Zylinderkoordinaten	40