

Gruppen in der Physik

E. Müller–Hartmann

SS 1973, 2008

Die elektronische Version dieser Vorlesung ist die erheblich erweiterte Version einer im Sommersemester 1973 gehaltenen Vorlesung und wurde 2008 zu Zwecken der Dokumentation erstellt. Die Themenauswahl zielt hauptsächlich auf Anwendungen der Gruppentheorie in der Festkörperphysik. Hinweise auf Tippfehler und andere Unzulänglichkeiten sind willkommen (per email an: mh@thp.uni-koeln.de).

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	4
1. Die wichtigsten Definitionen zur Gruppentheorie	5
2. Bewegungsgruppen	13
Die Gruppe der eigentlichen Drehungen ϑ_n	13
Die vollständige orthogonale Gruppe \mathcal{D}_n	14
Die Bewegungsgruppe \mathcal{B}_n	16
Punktgruppen	18
Diskrete Translationsgruppen	26
Kristallographische Punktgruppen	30
3. Darstellungstheorie endlicher Gruppen	37
Familien linearer Abbildungen	37
Lineare Darstellungen von Gruppen	40
Klassenfunktionen und Charaktere	46
Zerlegung der regulären Darstellung	50
Die konjugierte Darstellung	50
Eindimensionale Darstellungen und Kommutatorgruppen	53
Berechnung von Charaktertafeln	54
Zerlegung reduzibler Darstellungen in irreduzible	55
Direkte und Kroneckerprodukte und Kroneckerpotenzen	57
Subduzierte Darstellungen	62
4. Die Darstellungen der endlichen Punktgruppen	63
Eigentliche Punktgruppen	63
Uneigentliche Punktgruppen	66
Multiplikationstafeln	70
5. Die Darstellungen der unendlichen Punktgruppen	73
Die Punktgruppe C_∞	73
Die Punktgruppe D_∞	73
Die Punktgruppe $C_{\infty h}$	75
Die Punktgruppe $C_{\infty v}$	75

Die Punktgruppe $D_{\infty h}$	76
Die volle eigentliche Drehgruppe ϑ_3	77
6. Die Doppelpunktgruppen	86
Die irreduziblen Darstellungen der Doppelpunktgruppen	86
Erweiterung der Multiplikationstafeln auf Doppelgruppen	91
Subduzierte Darstellungen von $D^{(\lambda)}$	94
7. Lie-Gruppen	100
8. Die Permutationsgruppen S_n	107
Anhänge	122
Anhang A. Ganz-algebraische Zahlen	122
Anhang B. Partitionen	124
Anhang C. Charaktertafeln der symmetrischen Gruppen S_n	131
Anhang D. Zeilensymmetrische Darstellungen von S_n	135
Literaturhinweise	138
Mathematische Notation	138
Stichwortverzeichnis	139

Vorwort

Ziel dieser Vorlesung “**Gruppen in der Physik**” ist eine Einführung in die Darstellungstheorie der Gruppen, insbesondere mit Blick auf Anwendungen in der Festkörperphysik. Daher folgt nach einer Einführung in die wichtigsten Begriffe und Definitionen der Gruppentheorie (Kapitel 1) eine ausführliche Diskussion der Drehgruppen und Galileigruppen in n Dimensionen, sowie der Punktgruppen, der diskreten Translationsgruppen und der kristallographischen Punktgruppen im dreidimensionalen Raum (Kapitel 2). Kapitel 3 enthält dann eine ausführliche Präsentation der Darstellungstheorie von Gruppen mit homogenem Maß, d.h. insbesondere von endlichen Gruppen, die in Kapitel 4 auf die endlichen und in Kapitel 5 auf die kompakten unendlichen Punktgruppen angewandt wird. Im Hinblick auf die Behandlung der Symmetrien von Spinorfeldern werden in Kapitel 6 die Darstellungen der Doppelpunktgruppen vorgestellt. Kapitel 7 widmet sich der Diskussion der Beziehung zwischen Liegruppen und deren Lie-Algebren am Beispiel der Gruppen $SU(n)$. Eine daran anknüpfende allgemeine Darstellungstheorie der Liegruppen ist allerdings ausgespart. Die Permutationsgruppen und ihre Darstellungen werden schließlich in Kapitel 8 präsentiert.

In Anhängen werden Grundlagen zu ganz-algebraischen Zahlen (Anhang A) und Partitionen (Anhang B) vorgestellt. Die Gewinnung der irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppen aus ihren zeilensymmetrischen Darstellungen wird in Anhang D diskutiert.

Großer Wert wird in dem vorliegenden Manuskript auf möglichst erschöpfende Tabellen gelegt. So sind in Kapitel 4 die Charaktertafeln und Multiplikationstafeln aller endlichen und in Kapitel 5 der fünf kompakten unendlichen Punktgruppen angegeben. Der Anhang C enthält die Charaktertafeln der Permutationsgruppen S_n für $n = 2, 3, \dots, 8$. In Kapitel 6 findet man Charaktertafeln und Multiplikationstafeln für die Doppelpunktgruppen sowie für alle irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe die Subduktionstabellen in die irreduziblen Darstellungen aller eigentlichen Punktgruppen und Doppelpunktgruppen.

1. Die wichtigsten Definitionen zur Gruppentheorie

Auf einer Menge G von Elementen f, g sei eine “**Multiplikation**” M erklärt, d.h. eine Abbildung $M : G \times G \rightarrow G$. Statt $M(f, g) = h$ schreibt man suggestiver $fg = h$. Die Menge G mit der Multiplikation M habe folgende Eigenschaften:

(1) **Assoziativität** von M , d.h.

$$\forall f, g, h \in G \text{ gelte } f(gh) = (fg)h. \quad (1.1)$$

(2) **Existenz eines Einselements**, d.h.

$$\exists e \in G \cdot / \cdot \forall f \in G \quad ef = fe = f. \quad (1.2)$$

(3) **Existenz des inversen Elements**, d.h.

$$\forall f \in G \exists g \in G \cdot / \cdot fg = gf = e. \quad (1.3)$$

Wenn die Eigenschaften (1.1-3) gelten, nennt man G eine **Gruppe**.

Bemerkung:

Es genügt die Annahme, dass es zu jedem Element $g \in G$ ein **Links inverses** $g_l \in G$ mit $g_l g = e$ gibt. Denn mit der Existenz eines Links inversen g_l zu g mit $g_l g = e$ folgt $g_l = g_l g_l g = e g = g$ und damit $g_l g_l = g g_l = e$, d.h. das Links inverse zu g ist auch **Rechts inverses** zu g .

Direkte Folgerungen dieser Definition sind:

(a) Die Eindeutigkeit des Einselements, d.h.

$$e_1 \text{ und } e_2 \text{ seien Einselemente} \Rightarrow e_1 = e_2, \quad (1.4)$$

(b) die Eindeutigkeit des Inversen, d.h.

$$fg_1 = fg_2 = g_3 f = g_4 f = e \Rightarrow g_1 = g_2 = g_3 = g_4, \quad (1.5)$$

(c) die Umkehrbarkeit der Multiplikation, d.h.

$$\forall f, g \exists x, y \in G \cdot / \cdot fx = yf = g. \quad (1.6)$$

Die wichtigsten Gruppen in der Physik bestehen aus **Abbildungen**. Mengen von Abbildungen $A : R \xrightarrow{A} R$, werden nämlich auf natürliche Weise zu Gruppen, indem als Multiplikation das Hintereinanderausführen von Abbildungen $AB : R \xrightarrow{B} R \xrightarrow{A} R$ definiert wird. Die Assoziativität dieser Multiplikation ist offensichtlich. Das Einselement ist die identische Abbildung, die jedes Element von R in sich überführt. Wenn die Abbildung umkehrbar eindeutig auf R ist, bildet die Umkehrabbildung ein Inverses. Daher gilt der

Satz 1.1:

Mengen von umkehrbar eindeutigen Abbildungen bilden unter der Operation des Hintereinanderausführens als Multiplikation eine Gruppe, wenn sie nur algebraisch abgeschlossen sind und zu jeder Abbildung die Umkehrabbildung enthalten.

Gruppen mit endlich vielen Elementen nennt man **endliche Gruppen**, solche mit unendlich vielen **unendliche Gruppen**. Die Zahl der Elemente einer Gruppe n_G nennt man die **Ordnung der Gruppe**. Für endliche Gruppen werden die Werte aller Produkte zweier Elemente in einer **Gruppentafel** dargestellt. Eine Teilmenge der Gruppe, aus der man durch Produktbildung die ganze Gruppe erzeugen kann, nennt man ein **Generatorsystem**. Die kleinstmögliche Zahl von Generatoren nennt man den **Rang** der Gruppe und ein System mit dieser Zahl von Generatoren ein **minimales Generatorsystem**. Endliche Gruppen mit Rang 1 nennt man **zyklisch**.

Eine Gruppe G nennt man **kommutativ oder abelsch**, wenn alle ihre Elemente paarweise vertauschen. d.h. wenn $\forall f, g \in G \quad fg = gf$.

Tatsächlich kann jede endliche Gruppe G als Abbildungsgruppe realisiert werden. Man benutzt dazu als Raum \mathcal{R}_G den linearen Raum

$$f(c) = \sum_{g \in G} c_g \cdot g \quad (1.7)$$

aller Linearkombinationen der Gruppenelemente g mit komplexen (alternativ auch mit reellen) Koeffizienten c_g , der mittels der Gruppenmultiplikation zur (für nichtabelsche Gruppen nichtkommutativen) **Gruppenalgebra** \mathcal{R}_G wird, weil Produkte $f(c_1)f(c_2)$ wieder Elemente von \mathcal{R}_G sind. Die Elemente $g \in G$ bilden dabei die Basis von \mathcal{R}_G . Das Einselement $e \in \mathcal{R}_G$ vertauscht mit allen Elementen von \mathcal{R}_G .

Nun kann man jedem Element $g \in G$ die lineare Abbildung

$$F(g) : h \longrightarrow gh \quad (h \in \mathcal{R}_G) \quad (1.8)$$

zuordnen. Diese Realisierung der Gruppe G nennt man die **reguläre Darstellung**. Da die Abbildung $F(g)$ durch Multiplikation mit g realisiert wird, werden wir sie zur Vereinfachung der Notation einfach durch g (anstelle von $F(g)$) beschreiben.

Für endliche Gruppen G mit der Ordnung n_G hat der Raum \mathcal{R}_G die Dimension n_G . Die Abbildung e bildet jedes Basiselement h auf sich ab, während alle anderen g jedes Basiselement auf ein anderes Element der Gruppe abbildet. Deshalb haben die Abbildungen in der Matrixdarstellung der Basiselemente die Eigenschaft

$$\text{Sp } g = n_G \cdot \delta_{e,g}. \quad (1.9)$$

Man kann jedem Element (1.7) von \mathcal{R}_G ein **adjungiertes Element**

$$f^\dagger(c) = \sum_{g \in G} c_g^* \cdot g^{-1} = \sum_{g \in G} c_{g^{-1}}^* \cdot g \quad (1.10)$$

zuordnen. Damit kann man in \mathcal{R}_G ein **hermitesches, positiv definites Skalarprodukt** definieren:

$$\langle f(d)|f(c) \rangle = \frac{\text{Sp}(f^\dagger(d)f(c))}{\text{Sp } e} = \frac{\text{Sp}(f(c)f^\dagger(d))}{\text{Sp } e} = \sum_{g \in G} d_g^* c_g. \quad (1.11)$$

Unter diesem Skalarprodukt ist die Menge der Basiselemente orthonormiert,

$$\langle g|h \rangle = \delta_{g,h}. \quad (1.12)$$

Weil die linearen Abbildungen g einfach eine Permutation der n_G Basiselemente $f \in \mathcal{R}_G$ vornehmen, sind sie bezüglich des Skalarproduktes (1.11) **unitär** und die inverse Abbildung g^{-1} ist die zu g **adjungierte Abbildung**. Letzteres ergibt sich aus $\text{Sp}((\sum_h d_h^* h^{-1})g(\sum_f c_f f))^* = \text{Sp}((\sum_f c_f^* f^{-1})g^{-1}(\sum_h d_h h))$, weil $h = gf$ äquivalent zu $f = g^{-1}h$ ist.

Wir fassen die obigen Bemerkungen zusammen in

Satz 1.2:

Jede endliche Gruppe G kann als Abbildungsgruppe auf dem linearen Raum ihrer Gruppenalgebra \mathcal{R}_G dargestellt werden. Man nennt diese Darstellung die reguläre Darstellung. Mit dem Skalarprodukt (1.12) wird \mathcal{R}_G ein Hilbertraum und die reguläre Darstellung ist auf diesem Raum unitär.

Eine wesentliche Aufgabe der Gruppentheorie, die auch besonders wichtig für die **physikalischen Anwendungen** ist, ist die **Darstellungstheorie**, die im Auffinden aller Realisierungen durch lineare Abbildungen besteht, die man auch **lineare Darstellungen** der Gruppe nennt.

Im folgenden stellen wir weitere wichtige Begriffsbildungen aus der Gruppentheorie vor.

Eine **Untergruppe** der Gruppe G ist jede Teilmenge $H \subset G$, die selbst bezüglich der Multiplikation in G eine Gruppe ist. Triviale Untergruppen jeder Gruppe G sind $\{e\}$ und G selbst. Jedes Element $a \in G$ erzeugt eine **zyklische Untergruppe**

$$H_a = \{a^n / n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (1.13)$$

wobei die Potenzen a^n nicht alle verschieden sein müssen. Offensichtlich gilt $H_e = \{e\}$. Alle zyklischen Untergruppen H_a einer Gruppe sind abelsch. Für endliche Gruppen existiert immer ein $n > 0$ mit $a^n = e$. Die kleinste positive Zahl ω_a mit $a^{\omega_a} = e$ nennt man die **Ordnung des Elementes a** und es gilt $H_a = \{e, a, a^2, \dots, a^{\omega_a-1}\}$.

Im folgenden werden mehrfach **Äquivalenzrelationen** zwischen Gruppenelementen betrachtet. Eine Relation $f \sim g$ nennt man eine Äquivalenzrelation, wenn sie **reflexiv** ($f \sim f$), **symmetrisch** ($f \sim g \iff g \sim f$) und **transitiv** ($f \sim g, g \sim h \implies f \sim h$) ist.

Zu jeder Untergruppe H definiert man zwei Äquivalenzrelationen: $a, b \in G$ nennt man **links- bzw. rechtsäquivalent modulo H** genau dann, wenn für die Teilmengen aH und bH bzw. Ha und Hb von G die Beziehung $aH = bH$ bzw. $Ha = Hb$ gilt. Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser beiden Äquivalenzrelationen nennt man **links- bzw. rechtsseitige Restklassen nach H** . Die zu a gehörigen Restklassen sind einfach gleich aH bzw. Ha . Falls Links- und Rechtsäquivalenz identische Relationen sind,

$$aH = Ha \text{ oder } aHa^{-1} = H \quad (\forall a \in G), \quad (1.14)$$

d.h. links- und rechtsseitige Restklassen stimmen miteinander überein, nennt man die Untergruppe H eine **invariante Untergruppe** oder einen **Normalteiler** der Gruppe G .

Elemente $f, g \in G$ nennt man **konjugierte Elemente** in G , wenn ein Element $x \in G$ mit $xfx^{-1} = g$ existiert. Die so definierte **Konjugation** erzeugt eine **Äquivalenzrelation** $f \sim g$ in der Gruppe G . Jede Gruppe zerfällt in Untermengen konjugierter Elemente, die man die **Klassen konjugierter Elemente** nennt.

Die Klassen werden eine wichtige Rolle für die Darstellungstheorie spielen. Wir bezeichnen die Klassen einer Gruppe G mit $K_1 = \{e\}, K_2, \dots, K_q$ und mit n_κ die **Ordnung (Mächtigkeit) der Klasse K_κ** .

Das Einselement e ist nur mit sich selbst konjugiert und bildet daher immer eine Klasse $\{e\}$. Falls $f \sim g$, dann gilt auch $f^{-1} \sim g^{-1}$. Man kann daher zu jeder Klasse K_κ die **inverse Klasse** K'_κ betrachten. Wenn eine Klasse identisch mit ihrer inversen Klasse ist, nennt man sie **ambivalent**. Nicht ambivalente Klassen sind disjunkt zu ihren inversen Klassen. Neben der Klasse $\{e\}$ sind alle Klassen ambivalent, deren Elemente die Elementordnung 2 haben, weil solche Elemente mit ihrem Inversen identisch sind. Ambivalente Klassen mit Elementordnungen größer als 2 haben immer gerade Klassenordnung, weil die mit jedem Element g das Inverse $g^{-1} \neq g$ enthalten. Wir halten dies fest in

Satz 1.3:

Klassen mit Elementordnung 1 ($\{e\}$) und Elementordnung 2 sind ambivalent. Ambivalente Klassen mit Elementordnung größer als 2 haben immer gerade Ordnung. \square

Eine Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn jedes Element $f \in G$ nur mit sich selbst konjugiert ist. Wegen $g^\omega = e \iff x^{-1}g^\omega x = e$ haben alle Elemente einer Klasse dieselbe Ordnung, d.h. die **Elementordnung** ω ist eine **Klasseneigenschaft**. Die Elementordnung ω_κ muss man von der oben definierten Klassenordnung n_κ einer Klasse K_κ unterscheiden.

Man kann für Klassen ein **kommutatives Produkt** einführen durch die Definition ($g \in K_\kappa; h, ghg^{-1} \in K_\lambda : gh = (ghg^{-1})g$)

$$K_\kappa K_\lambda = K_\lambda K_\kappa = \{gh \mid g \in K_\kappa, h \in K_\lambda\} = \{hg \mid g \in K_\kappa, h \in K_\lambda\}. \quad (1.15)$$

Man sieht leicht ein, dass ein solches Produkt sich (im mengentheoretischen Sinn) aus ganzen Klassen zusammensetzt und kann es daher in Klassen zerlegen,

$$K_\kappa K_\lambda = \sum_{\mu=1}^q h_{\kappa\lambda,\mu} K_\mu. \quad (1.16)$$

Die hierbei auftretenden Faktoren $h_{\kappa\lambda,\mu}$ sind nichtnegativ ganzzahlig und heißen **Klassenmultiplikationskoeffizienten**.

Invariante Untergruppen sind offenbar genau solche, die aus ganzen Klassen konjugierter Elemente bestehen. Umgekehrt ist eine Menge von Klassen $\{K_\kappa\}$ ein Normalteiler genau dann, wenn sie eine Untergruppe bildet, d.h. wenn sie alle Klassen enthält, die in allen Produkten von Paaren von Klassen aus $\{K_\kappa\}$ vorkommen. Wir halten dies fest als

Satz 1.4:

Eine Untergruppe H der Gruppe G ist ein Normalteiler genau dann, wenn sie aus ganzen Klassen besteht. \square

Die Restklassen invarianter Untergruppen N bilden selbst eine Gruppe mit der Multiplikation

$$(aN) \circ (bN) = (ab)N, \quad (1.17)$$

die man die **Restklassengruppe** oder **Faktorgruppe** G/N nennt.

Für endliche Gruppen G der Ordnung n_G nennt man die Zahl der (links- oder rechtsseitigen) Restklassen nach einer Untergruppe H den **Index** i_H von H in G . Da alle Restklassen n_H Elemente haben und als Äquivalenzklassen disjunkt sind, gilt die **Lagrangebeziehung**

$$\boxed{n_H \cdot i_H = n_G}. \quad (1.18)$$

Danach ist insbesondere die Ordnung jeder Untergruppe ein Teiler der Gruppenordnung.

Als **Normalisator** $N_G(k)$ eines Elements k der Gruppe G bezeichnet man die Menge der Gruppenelemente, die mit k vertauschen,

$$N_G(k) = \{h \mid h \in G, h^{-1}kh = k\}. \quad (1.19)$$

Normalisatoren $N_G(k)$ sind offenbar Untergruppen von G . Mithilfe des Normalisators beweist man den folgenden

Satz 1.5:

Das Produkt $n_\kappa \omega_\kappa$ aus der Ordnung n_κ und der Elementordnung ω_κ jeder Klasse K_κ der Gruppe G ist Teiler der Gruppenordnung n_G .

Beweis:

- Der Beweis ergibt sich aus der offensichtlichen Tatsache, dass die von k erzeugte zyklische Untergruppe (1.13) eine Untergruppe der Ordnung ω_κ von $N_G(k)$ ist, und aus dem Nachweis, dass n_κ der Index des Normalisators $N_G(k)$ ist, wenn k ein Element aus K_κ ist. Damit folgt aus der Lagrangebeziehung (1.18) die Behauptung. Den genannten Nachweis führt man, indem man zeigt, dass man die Elemente von K_κ eindeutig den rechtsseitigen Nebenklassen von $N_G(k)$ zuordnen kann, sodass die Ordnung von K_κ gleich der Zahl dieser Nebenklassen ist.
- Seien g und h zwei Elemente aus G mit $gh^{-1} = n \in N_G(k)$. Dann sind die beiden konjugierten Elemente $g^{-1}kg$ und $h^{-1}kh$ identische Elemente aus K_κ , weil

$$g^{-1}kg = h^{-1} \underbrace{(n^{-1}kn)}_{=k} h = h^{-1}kh \in K_\kappa.$$

- Gelte umgekehrt für zwei Elemente g und h aus G die Gleichung $g^{-1}kg = h^{-1}kh$. Dann ist gh^{-1} wegen $(gh^{-1})^{-1}k(gh^{-1}) = k$ ein Element aus $N_G(k)$ und $N_G(k)g$ und $N_G(k)h$ sind die gleiche Restklasse. \square

Angesichts des Satzes 1.3 folgt aus Satz 1.5

Satz 1.6:

Für Gruppen G mit ungerader Ordnung ist $\{e\}$ die einzige ambivalente Klasse.

Beweis:

Wenn G eine ambivalente Klasse K_κ mit Elementordnung $\omega_\kappa = 2$ enthielte, müsste die Gruppenordnung n_G durch ω_κ teilbar sein. Wenn G eine ambivalente Klasse mit Elementordnung $\omega_\kappa > 2$ enthielte, müsste die Gruppenordnung n_G durch die nach Satz 1.3 gerade Klassenordnung n_κ teilbar sein. \square

Seien G und F zwei Gruppen. Eine Abbildung $\mathcal{H} : G \xrightarrow{\mathcal{H}} F$ nennt man einen **Homomorphismus**, wenn für alle $g_1, g_2 \in G$ die Beziehung $\mathcal{H}(g_1 g_2) = \mathcal{H}(g_1) \mathcal{H}(g_2)$ gilt, d.h. wenn die Abbildung bezüglich der Gruppenmultiplikation **treu** ist. Die Bildmenge $\mathcal{H}(G)$ ist eine Untergruppe von F . Es ist dann für unsere Zwecke sinnvoll, F so einzuschränken, dass $\mathcal{H}(G) = F$ gilt. Man spricht dann auch von einem **Epimorphismus**. Die Bildgruppe F nennt man ein **homomorphes Bild** von G . Ist F eine **Gruppe linearer Abbildungen**, dann nennt man F eine **lineare Darstellung** von G . Eine homomorphe Abbildung einer Gruppe G auf sich selbst nennt man einen **Automorphismus**. Jede Konjugation $x^{-1} G x \rightarrow G$ mit einem beliebigen $x \in G$ erzeugt einen Automorphismus, den man **inneren Automorphismus** nennt.

Mit jedem Normalteiler N einer Gruppe G erzeugt man einen Epimorphismus, indem man jedes Element g der Gruppe auf seine Restklasse gN abbildet, die ein Element der Faktorgruppe G/N ist,

$$\mathcal{H}_N : g \longrightarrow gN \in G/N \quad (g \in G). \quad (1.20)$$

Umgekehrt kann man jeden Epimorphismus $G \xrightarrow{\mathcal{E}} F$ auf diese Weise entstanden denken. Dazu definiert man als den **Kern** K des Epimorphismus die Menge der Elemente von G , die auf das Einselement e_F von F abgebildet werden,

$$K = \{g \mid \mathcal{E}g = e_F, g \in G\}. \quad (1.21)$$

Dieser Kern ist ein Normalteiler der Gruppe G und die Bildgruppe F ist isomorph zur Faktorgruppe G/K .

Falls die Abbildung \mathcal{H} umkehrbar eindeutig ist, $\mathcal{H} : G \longleftrightarrow F$, spricht man von einem **Isomorphismus**. Ist F eine mit G isomorphe Gruppe von linearen Abbildungen, so nennt man die Darstellung **treu**. Isomorphe Gruppen G, F sind hinsichtlich ihrer Gruppenstruktur als identisch anzusehen.

Zu zwei Gruppen G_1 und G_2 kann man eine Gruppe $G = G_1 \times G_2$ definieren, die man das **direkte Produkt** von G_1 und G_2 nennt. Elemente der Produktgruppe G sind alle Paare (g_1, g_2) mit $g_i \in G_i$. Die Multiplikation ist durch

$$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2) \quad (1.22)$$

definiert, das Einselement in G durch (e_1, e_2) und das Inverse zu (g_1, g_2) ist (g_1^{-1}, g_2^{-1}) .

Für den Fall, dass die Elemente der beiden Gruppen G_1 und G_2 Abbildungen sind, die in einem gemeinsamen Raum wirken und damit Untergruppen einer umfassenderen Abbildungsgruppe \mathcal{A} sein müssen, bietet sich eine modifizierte Form der obigen Definition von direkten Produkten an. Man wird fordern, dass die beiden Gruppen keine gemeinsamen nichttrivialen Elemente haben, d.h. $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ und dass ihre Elemente paarweise kommutieren, d.h. $g_1 g_2 = g_2 g_1$ ($g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$). Unter diesen Voraussetzungen nennen wir die beiden Gruppen G_1 und G_2 **unabhängige Untergruppen von \mathcal{A}** und definieren das **direkte Produkt** durch

$$G = G_1 \times G_2 = \{g_1 g_2 \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}. \quad (1.23)$$

Ein für die Darstellungstheorie nützlicher Begriff ist die Kommutatorgruppe G_K einer Gruppe G . Dazu definieren wir zunächst **Kommutatoren** als Elemente einer Gruppe G , die sich als

$$[g, h] \doteq g^{-1} h^{-1} g h \quad (g, h \in G) \quad (1.24)$$

darstellen lassen. Offenbar ist $e = [g, g]$ ein Kommutator, mit $g = [i, j]$ auch $g^{-1} = [j, i]$ ein Kommutator und mit einem Element einer Klasse jedes Elemente

der Klasse ein Kommutator ($g = [a, b] \in K \Rightarrow h^{-1}gh = [h^{-1}ah, h^{-1}bh] \in K$). Solche Klassen nennt man **Kommutatorklassen**. Es gilt der

Satz 1.7:

Eine Klasse K_κ ist eine Kommutatorklasse genau dann, wenn es eine Klasse K_λ gibt, sodass der Klassenmultiplikationskoeffizient $h_{\kappa\lambda,\lambda} \neq 0$.

Beweis:

- Mit $g \in K_\lambda$ und $gu = h^{-1}gh \in K_\lambda$ folgt $u = [g, h] \in K_\kappa$.
- Mit $h = [u, v] \in K_\kappa$ und $u \in K_\lambda$ gilt $uh = v^{-1}uv \in K_\lambda$. \square

Die Menge aller Kommutatoren einer Gruppe kann zu einer Gruppe ergänzt werden. Dies führt zu der

Definition 1.1:

Die Kommutatorgruppe G_K einer Gruppe G ist ihre kleinste Untergruppe, die alle Kommutatoren enthält.

Die **Kommutatorgruppe** einer Gruppe G enthält neben allen ihren Kommutatoren alle endlichen Produkte von Kommutatoren. Sie ist ein Normalteiler, weil sie aus ganzen Klassen besteht. Die Klassen der Kommutatorgruppe, die nicht Kommutatorklassen sind, kann man leicht mittels der Klassenmultiplikationskoeffizienten ermitteln. Mit (1.16) und wegen $gh[h, g] = hg$ gilt

$$(gG_K) \circ (hG_K) = (gh) \circ G_K = (hg) \circ G_K \quad (\forall g, h \in G) \quad (1.25)$$

und daraus folgt der

Satz 1.8:

Die Faktorgruppe der Kommutatorgruppe $F = G/G_K$ ist abelsch.

2. Bewegungsgruppen

Als in der Physik wichtiges Beispiel und zur Erläuterung der eingeführten gruppentheoretischen Begriffe diskutieren wir in diesem Kapitel **Bewegungsgruppen** in linearen Räumen \mathcal{R}_n , mit besonderer Betonung der Dimensionen $n = 2$ und $n = 3$.

Die Gruppe der eigentlichen Drehungen ϑ_n

Wir beginnen mit der Menge ϑ_n aller **Drehungen** um einen festen Punkt \mathcal{O} im n -dimensionalen Raum \mathcal{R}_n . Drehungen sind längenerhaltende Abbildungen des \mathcal{R}_n auf sich, die sich stetig aus der identischen Abbildung entwickeln lassen. Die Menge ϑ_n bildet nach Satz 1.1 eine Gruppe. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Punkt \mathcal{O} als Ursprung werden Drehungen daher durch **eigentliche reelle orthogonale Matrizen** D ($DD^t = E, \det D = +1$; D^t ist die zu D transponierte Matrix) beschrieben. Die Eigenwerte reeller orthogonaler Matrizen sind komplexe Zahlen vom Betrag 1. Zu jedem solchen Eigenwert $e^{i\varphi}$, der nicht ± 1 ist, muss auch $e^{-i\varphi}$ Eigenwert sein, damit die Matrix reell ist. Jeder Eigenwert -1 muss eine gerade Vielfachheit haben, damit $\det D = +1$ gilt. Somit lassen sich für gerade Dimensionen $n = 2p$ alle Eigenwerte zu p komplex konjugierten Paaren (eventuell unter Einschluss von Paaren von -1 und Paaren von $+1$) gruppieren, während für ungerade Dimensionen $n = 2p + 1$ wegen $\det D = +1$ ein weiterer einzelner Eigenwert $+1$ dazukommt. Mit der zweidimensionalen Drehmatrix

$$D_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

haben die Drehmatrizen im \mathcal{R}_n daher die reelle Normalform

$$D_{2p} = \begin{pmatrix} D_2(\varphi_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_2(\varphi_p) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

bzw.

$$D_{2p+1} = \begin{pmatrix} D_2(\varphi_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_2(\varphi_p) \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

In **ungeraden Dimensionen** besitzen also alle Drehmatrizen eine **Drehachse**, die bei der Drehung fest bleibt. In geraden Dimensionen existiert eine solche Achse nicht. Ansonsten kann man für jede Drehung p zueinander orthogonale Ebenen \mathcal{E}_r ($r = 1, \dots, p$) finden, in denen zweidimensionale Drehungen $D_2(\varphi_r)$ ($0 \leq \varphi_r < 2\pi$) durchgeführt werden. Die Gruppen ϑ_n sind unendlich. Abelsch ist nur die Gruppe ϑ_2 .

Wir fassen die Drehgruppe ϑ_n als eine **Menge geometrischer Objekte** auf, losgelöst von einer algebraischen Darstellung in einem Koordinatensystem.

Jede Realisierung einer Drehgruppe in einem rechtwinkligen Koordinatensystem durch eigentlich orthogonale Matrizen stellt eine treue lineare Darstellung der Drehgruppe dar, die isomorph zur dargestellten Drehgruppe ist. Die Darstellung hängt von der Wahl des Koordinatensystems ab, aber wir werden sehen, dass die verschiedenen Darstellungen zu allen Koordinatensystemen in einem später zu erklärenden Sinne äquivalent sind, und die Gesamtheit dieser äquivalenten Darstellungen wird die **Vektordarstellung von ϑ_n** genannt.

Wie aus (2.3) ersichtlich hat jede Drehung der **Drehgruppe ϑ_3** eine Drehachse und besteht aus einer Rotation um einen Winkel φ in der zur Drehachse senkrechten Ebene. Indem man einen Einheitsvektor in Richtung der Drehachse \mathbf{k} nennt, bezeichnet man die Drehung mit $C_{\mathbf{k}}(\varphi)$, wobei die Rotation um den Winkel φ rechtshändig erfolgen soll. Da mit einer beliebigen Drehung $g \in \vartheta_3$ die Beziehung

$$gC_{\mathbf{k}}(\varphi)g^{-1} = C_{g\mathbf{k}}(\varphi) \quad (2.4)$$

gilt, bestehen die **Äquivalenzklassen von ϑ_3** aus allen Drehungen mit einem festen Drehwinkel φ . Sie bestehen also aus der Menge

$$\boxed{C^\varphi = \{C_{\mathbf{k}}(\varphi) \mid \mathbf{k} \text{ beliebig}\} \quad (\varphi \in [0, \pi]),} \quad (2.5)$$

wobei die Einschränkung des Drehwinkels auf das Intervall $\varphi \in [0, \pi]$ sich wegen $C_{\mathbf{k}}(-\varphi) = C_{-\mathbf{k}}(\varphi)$ ergibt. Man beachte, dass die Klasse $C^0 = \{e\}$ natürlich nur aus einem Element besteht und dass für $\varphi = \pi$ die Vektoren \mathbf{k} und $-\mathbf{k}$ dieselbe Drehung ergeben.

Die vollständige orthogonale Gruppe \mathcal{D}_n

Die vollständige orthogonale Gruppe \mathcal{D}_n hat als Elemente alle längentreuen Abbildungen des \mathcal{R}_n auf sich, die einen Punkt \mathcal{O} festhalten. Die Vektordarstellung dieser Gruppe besteht aus allen reellen orthogonalen Matrizen, enthält also außer den Elementen (2.2) oder (2.3) auch solche, deren Determinante den Wert -1 hat. Eine analoge Betrachtung wie die vor Gleichung (2.1) ergibt, dass solche Matrizen eine ungerade Zahl von Eigenwerten -1 haben und ihre reelle Normalform in geraden Dimensionen ist daher mit $p - 1$ Drehwinkeln φ_r

$$S_{2p} = \begin{pmatrix} D_2(\varphi_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_2(\varphi_{p-1}) \\ & & & \sigma \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

und in ungeraden Dimensionen mit p Drehwinkeln

$$S_{2p+1} = \begin{pmatrix} D_2(\varphi_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_2(\varphi_p) \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Das in geraden Dimensionen neu auftretende zweidimensionale Element

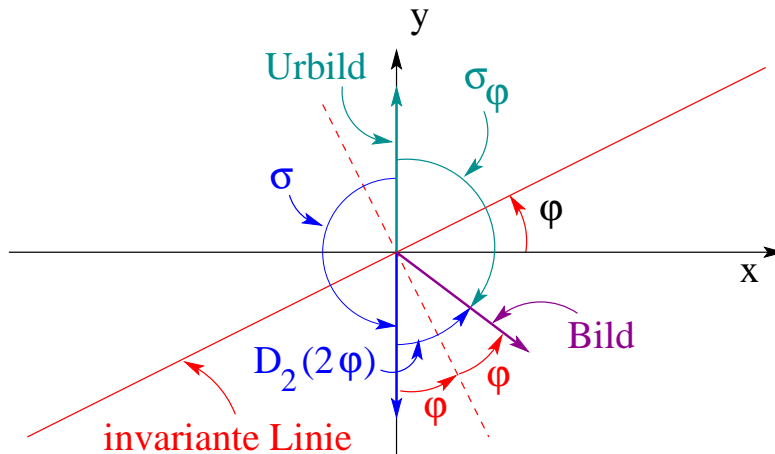
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

hat die Bedeutung einer **Spiegelung** einer Koordinate in einer Ebene, die orthogonal zu den $p-1$ Rotationsebenen ist und in der die dazu senkrechte Koordinate festgehalten wird. In ungeraden Dimensionen bewirkt der einzelne Eigenwert -1 ebenfalls die Spiegelung einer Koordinate, die orthogonal zu den p Rotationsebenen steht, ohne dass eine andere festzuhaltende Koordinate ins Spiel kommt.

Die **Gruppe \mathcal{D}_2** besteht aus den eigentlichen Drehungen $C(\varphi)$, deren Vektordarstellung die in (2.1) definierten Matrizen $\mathcal{D}_2(\varphi)$ sind, und uneigentlichen Drehungen $\sigma(\varphi)$, die sich durch die Matrizen

$$\sigma_\varphi \doteq D_2(2\varphi)\sigma = \sigma D_2(-2\varphi) \quad (2.9)$$

darstellen lassen. In der folgenden Figur ist die Definition der Abbildung $\sigma(\varphi)$ illustriert, die eine Spiegelung an der um den Winkel φ entgegen dem Uhrzeigersinn rotierten x-Achse (invariante rote Linie) ist. Die Figur zeigt das Bild des auf der y-Achse liegenden grünen Pfeils.



Die **Klassen der Gruppe \mathcal{D}_2** folgen aus den Beziehungen

$$\sigma(\psi)C(\varphi)\sigma^{-1}(\psi) = C(-\varphi), \quad C(\varphi)\sigma(0)C(-\varphi) = \sigma(\varphi), \quad (2.10)$$

die sich leicht aus (2.9) herleiten lassen. Danach hat \mathcal{D}_2 die folgenden Klassen:

$$\boxed{\{C(0)\}, \quad \{C(\pi)\}, \quad \{C(\varphi), C(-\varphi)\} \ (0 \leq \varphi < \pi), \quad \{\sigma(\psi) | \psi \in [0, \pi)\}.} \quad (2.11)$$

Für die Diskussion der Gruppe \mathcal{D}_3 erweist sich die Inversion als ein nützliches Element der Gruppe. Die **Inversion I** des \mathcal{R}_n bezüglich des Punktes \mathcal{O} ist diejenige Operation, die jeden von \mathcal{O} ausgehenden Vektor \mathbf{r} in $-\mathbf{r}$ überführt. Sie wird in der Vektordarstellung durch die Matrix $-E$ repräsentiert, woran man besonders

einfach erkennt, dass sie mit jeder Drehung um \mathcal{O} vertauscht: $\forall g \in \vartheta_3 \ gI = Ig$. Die Inversion ist eine **involutorische** Operation: Es gilt $I^2 = e$, d.h. $I^{-1} = I$.

Da $\det I = (-1)^n$ gilt, ist die Inversion für ungerade Dimensionen ein uneigentliches Element von \mathcal{D}_n . Daher kann man \mathcal{D}_{2p+1} auch als **direktes Produkt** der Gruppe $\mathcal{S}_2 = \{e, I\}$ mit $I\vartheta_{2p+1}$ oder als Vereinigung von ϑ_{2p+1} mit der zweiten Restklasse $I\vartheta_{2p+1}$ bezüglich \mathcal{S}_2 darstellen,

$$\mathcal{D}_{2p+1} = \mathcal{S}_2 \times \vartheta_{2p+1} = \vartheta_{2p+1} \cup I\vartheta_{2p+1}. \quad (2.12)$$

Für gerade Dimensionen ist eine solche Darstellung nicht möglich, weil I eine eigentliche Drehung ist.

Um in drei Dimensionen, d.h. im Falle von \mathcal{D}_3 die anschauliche Bedeutung der uneigentlichen Operationen $I\vartheta_{2p+1}$ zu verstehen, betrachtet man zunächst das Element

$$IC_{\mathbf{k}}(\pi) = \sigma_{\mathbf{k}}, \quad (2.13)$$

das offenbar die Spiegelung an der zum Einheitsvektor \mathbf{k} senkrechten Ebene darstellt. Ein beliebiges Element

$$IC_{\mathbf{k}}(\pi + \varphi) = IC_{\mathbf{k}}(\pi)C_{\mathbf{k}}(\varphi) = \sigma_{\mathbf{k}}C_{\mathbf{k}}(\varphi) = C_{\mathbf{k}}(\varphi)\sigma_{\mathbf{k}} \doteq S_{\mathbf{k}}(\varphi) \quad (2.14)$$

hat dann die Bedeutung einer **Drehspiegelung**, eines Produktes einer Drehung mit einer Spiegelung an der zur Drehachse senkrechten Ebene. Daher besteht die **vollständige orthogonale Gruppe in drei Dimensionen** aus allen Drehungen und Drehspiegelungen im \mathcal{R}_3 .

Um die Klassen der Gruppe \mathcal{D}_3 zu finden, muss man neben der Gleichung (2.4) mit $g \in \vartheta_3$ und $h = Ig$ die Beziehungen

$$hC_{\mathbf{k}}(\varphi)h^{-1} = C_{-h\mathbf{k}}(\varphi), \quad gS_{\mathbf{k}}(\psi)g^{-1} = S_{g\mathbf{k}}(\psi), \quad hS_{\mathbf{k}}(\psi)h^{-1} = S_{-h\mathbf{k}}(\psi) \quad (2.15)$$

beachten. Damit hat \mathcal{D}_3 neben den Klassen (2.5) die Klassen

$$\boxed{\mathcal{S}^\psi = \{S_{\mathbf{k}}(\psi) \mid \mathbf{k} \text{ beliebig}\} \quad (\psi \in [0, \pi])}. \quad (2.16)$$

Hier besteht die Klasse $\mathcal{S}^\pi = \{I\}$ nur aus einem einzigen Element.

Die Bewegungsgruppe \mathcal{B}_n

Die Gruppe \mathcal{B}_n besteht aus allen abstandserhaltenden Transformationen des \mathcal{R}_n . Untergruppen sind die vollständige orthogonale Gruppe $\mathcal{D}_n^{\mathcal{O}}$ bezüglich irgendeines Punktes \mathcal{O} im \mathcal{R}_n sowie die Gruppe \mathcal{T}_n der **Translationen** $t_{\mathbf{a}}$ um einen beliebigen Vektor \mathbf{a} . Angesichts

$$t_{\mathbf{a}} \cdot t_{\mathbf{b}} = t_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = t_{\mathbf{b}} \cdot t_{\mathbf{a}} \quad (2.17)$$

ist die Translationsgruppe \mathcal{T}_n abelsch.

Jede Bewegung $g \in \mathcal{B}_n$ lässt sich mit einem beliebigen $\mathcal{O} \in \mathcal{R}_n$ als

$$g = t_{\mathbf{a}} \cdot r_{\mathcal{O}} \text{ mit } r_{\mathcal{O}} \in \mathcal{D}_n^{\mathcal{O}} \text{ und } t_{\mathbf{a}} \in \mathcal{T}_n \quad (2.18)$$

schreiben. Denn wenn der Punkt \mathcal{O} durch g in den Punkt \mathcal{O}' überführt wird und wenn \mathbf{a} der Vektor von \mathcal{O} nach \mathcal{O}' ist, dann lässt die (eigentliche oder uneigentliche) Rotation $t_{\mathbf{a}}^{-1}g = r_{\mathcal{O}}$ den Punkt \mathcal{O} fest und ist damit ein Element aus $\mathcal{D}_n^{\mathcal{O}}$.

Zur anschaulichen Interpretation der Elemente g von \mathcal{B}_n betrachten wir deren Fixpunkte. In einem Koordinatensystem mit Ursprung \mathcal{O} sei

$$g\mathbf{x} = D\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{x}, \text{ d.h. } (E - D)\mathbf{x} = \mathbf{a}. \quad (2.19)$$

Die Gesamtheit der Lösungen dieser Gleichung hängt von den Eigenwerten der Matrix D ab. Wir betrachten zunächst den zweidimensionalen Fall \mathcal{B}_2 :

- (1) Für $D = E$ gibt es keinen Fixpunkt, die Bewegung g ist eine **reine Translation**.
- (2) Für $D = C(\varphi)$ ($\varphi \neq 0$) hat D die Eigenwerte $e^{\pm i\varphi} \neq 1$ und $E - D$ ist invertierbar. Der Punkt $\mathbf{x} = (E - D)^{-1}\mathbf{a}$ ist eindeutiger Fixpunkt und g ist eine **eigentliche Drehung** um diesen Fixpunkt.
- (3) Für $D = \sigma(\psi)$ hat D die Eigenwerte ± 1 . Dann stehen die normierten Eigenvektoren $D\mathbf{e}_{\pm} = (\pm 1) \cdot \mathbf{e}_{\pm}$ in Richtung der invarianten Spiegelungsgerade (\mathbf{e}_+) von $\sigma(\psi)$ und senkrecht dazu (\mathbf{e}_-). Wir benutzen für \mathbf{a} die Darstellung $\mathbf{a} = \alpha_+\mathbf{e}_+ + \alpha_-\mathbf{e}_-$. Für $\mathbf{a} \perp \mathbf{e}_+$ (d.h. $\alpha_+ = 0$) gibt es eine Gerade von Fixpunkten, $\mathbf{x} = \mathbf{a}/2 + \xi\mathbf{e}_+$ ($-\infty < \xi < \infty$) und g ist eine Spiegelung an dieser Fixgeraden. Im allgemeinen Fall $\mathbf{a} \not\perp \mathbf{e}_+$ gibt es keinen Fixpunkt, weil die Spiegelung durch eine Translation um $\alpha_+\mathbf{e}_+$ parallel zur Fixgeraden ergänzt wird. Die Bewegung g ist eine **Gleitspiegelung**. Die Gleitgerade ist durch den Vektor $\mathbf{k} = \alpha_-\mathbf{e}_-/2$ gekennzeichnet, an dessen Spitze sie orthogonal aufliegt, und der in der Gleitgeraden liegende Gleitvektor ist durch $\mathbf{v} = \alpha_+\mathbf{e}_+$ gegeben. (Die reine Spiegelung ist als Spezialfall einer Gleitspiegelung zu betrachten.)

Zusammengefasst gilt der **Satz 2.1**:

$$\begin{aligned} &\text{Die Bewegungsgruppe } \mathcal{B}_2 \text{ besteht aus Translationen,} \\ &\text{Drehungen und Gleitspiegelungen.} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Als zweiten Fall betrachten wir die Bewegungsgruppe \mathcal{B}_3 näher:

- (1) Für $D = E$ haben wir wieder **reine Translationen**.
- (2) $D = C_{\mathbf{k}}(\varphi)$ ($\varphi \neq 0$) hat genau einen Eigenwert $+1$. Wenn $\mathbf{a} \perp \mathbf{k}$, gibt es eine Fixgerade parallel zum Vektor \mathbf{k} und die Bewegung g ist eine Drehung um diese Fixgerade. Eine Komponente von \mathbf{a} parallel zum Vektor \mathbf{k} erzeugt dann eine zusätzliche Verschiebung längs der Fixgeraden und die Bewegung ist eine **Schraubung**. Reine Drehungen sind als Spezialfälle von Schraubungen zu betrachten.

- (3) $D = S_{\mathbf{k}}(\psi)$ ($\psi \neq 0$) hat die Eigenwerte $e^{\pm i\psi}$ und -1 , $E - D$ ist regulär und es gibt einen eindeutigen Fixpunkt. Die Bewegung g ist eine **Drehspiegelung** an der zu \mathbf{k} senkrechten Ebene, die diesen Fixpunkt enthält.
- (4) $D = S_{\mathbf{k}}(0)$ hat zwei Eigenwerte $+1$ und einen Eigenwert -1 , dessen Eigenvektor parallel zu \mathbf{k} ist. Es gibt eine Fixebene senkrecht zu \mathbf{k} mit der Funktion einer Spiegelebene, deren Lage durch die Komponente von \mathbf{a} parallel zu \mathbf{k} bestimmt wird. Die Komponenten von \mathbf{a} senkrecht zu \mathbf{k} erzeugen eine Verschiebung parallel zur Fixebene und die Bewegung g ist eine **Gleitspiegelung**.

Zusammengefasst gilt der **Satz 2.2**:

Die Bewegungsgruppe \mathcal{B}_3 besteht aus Translationen,
Schraubungen, Drehspiegelungen und Gleitspiegelungen. (2.21)

Um die Klassen konjugierter Elemente in den Gruppen \mathcal{B}_2 und \mathcal{B}_3 zu finden, benutzen wir, neben der Aussage in (2.11) für \mathcal{B}_2 und in (2.5) und (2.16) für \mathcal{B}_3 , mit den Elementen $h = t_{\mathbf{a}} \cdot r_{\mathcal{O}}^h$ und $g = t_{\mathbf{b}} \cdot r_{\mathcal{O}}^g$ die Beziehungen

$$g t_{\mathbf{a}} g^{-1} = t_{r_{\mathcal{O}}^g \mathbf{a}} \quad \text{und} \quad t_{\mathbf{b}} r_{\mathcal{O}}^h t_{-\mathbf{b}} = r_{\mathcal{O}+\mathbf{b}}^h. \quad (2.22)$$

Durch die erste Beziehung wird ein Translationsvektor rotiert und durch die zweite wird der Aufpunkt einer Rotation verschoben.

Die meisten **Klassen von \mathcal{B}_2** ergeben sich aus den Klassen (2.11) von \mathcal{D}_2 durch die Verschiebung des Aufpunktes: $\{C(0)\}$ wird davon natürlich nicht berührt, aber die Klassen der anderen eigentlichen Drehungen werden unendliche Klassen, weil der Aufpunkt beliebig ist. Die Klasse aller Spiegelungen wird zu einer Familie von Klassen von Gleitspiegelungen mit beliebiger Wahl der Spiegelgeraden, aber jeweils fester Länge des Gleitvektors in jeder Klasse. Zusätzliche Klassen ergeben sich aus den Translationen, nämlich die Klassen $\{t_{\mathbf{a}} \mid |\mathbf{a}| > 0 \text{ fest}\}$.

Die Translations**klassen in \mathcal{B}_3** sind völlig analog zu denen in \mathcal{B}_2 . Die Klassen der Schraubungen enthalten alle Schraubungen mit festem Drehwinkel $\varphi \in [0, \pi]$ und fester Länge des Schraubvektors, aber beliebiger Wahl der Schraubachse einschließlich Orientierung der Drehachse relativ zum Schraubvektor. Alle Drehspiegelungen mit gleichem Drehwinkel $\varphi \in [0, \pi]$, aber beliebiger Wahl von Drehachse und dazu senkrechter Spiegelebene bilden ebenfalls Klassen sowie alle Gleitspiegelungen mit fester Länge des in der Gleitebene liegenden Gleitvektors, aber beliebiger Wahl der Spiegelebene.

Es sei bemerkt, dass die Translationen eine abelsche invariante Untergruppe von \mathcal{B}_n bilden. Die Existenz eines abelschen Normalteilers unendlicher Ordnung ist für die Theorie der Gruppe unerfreulich, weil sie die Existenz nichtvollreduzierbarer Darstellungen zur Folge hat (siehe das Beispiel (3.19,20)).

Punktgruppen

Als Punktgruppen bezeichnet man die echten Untergruppen der vollständigen orthogonalen Gruppen \mathcal{D}_n . Punktgruppen in ϑ_n , die nur eigentliche Drehungen enthalten, nennt man **Punktgruppen erster Art**, alle anderen **Punktgruppen**

zweiter Art. Die Untermenge der eigentlichen Drehungen einer Punktgruppe zweiter Art P_2 bildet immer eine Untergruppe, die eine Punktgruppe erster Art P_1 ist. Wir bilden mit zwei Elementen $F, G \in P_2$ die beiden linksseitigen Restklassen FP_1 und GP_1 . Wegen $\det F = \det G = -1$ ist $F^{-1}GP_1 \in P_1$ und daher folgt $FP_1 = GP_1$, d.h. es gibt nur eine einzige Restklasse neben P_1 in P_2 , die damit auch rechtsseitige Restklasse sein muss. Daher gilt der

Satz 2.3:

Die Untergruppe erster Art P_1 jeder Punktgruppe zweiter Art P_2 hat den Index 2 und ist eine invariante Untergruppe. Die Gruppe P_2 besteht aus den Elementen von P_1 und den Elementen einer zweiten Restklasse FP_1 aus den Produkten eines beliebigen uneigentlichen Elements F von P_2 mit P_1 .

Wir werden im folgenden insbesondere alle endlichen Punktgruppen in \mathcal{D}_3 aufzählen.

Enthält eine Punktgruppe eine Drehung $C_{\mathbf{k}}(\varphi)$ mit $\varphi \neq 0$, so nennt man \mathbf{k} eine **Achse der Punktgruppe**. Alle Drehungen um die Achse \mathbf{k} bilden dann eine Untergruppe der Punktgruppe. Damit diese Untergruppe endlich ist, muss der kleinste positive Drehwinkel ein Bruchteil von 2π sein. Wenn er den Wert $\varphi_n = 2\pi/n$ mit $n = 2, 3, \dots$ hat, nennt man die Untergruppe C_n . Sie ist zyklisch und besteht aus den n Elementen

$$C_n = \{e, C_{\mathbf{k}}(\varphi_n), C_{\mathbf{k}}(2\varphi_n), \dots, C_{\mathbf{k}}((n-1)\varphi_n)\}. \quad (2.23)$$

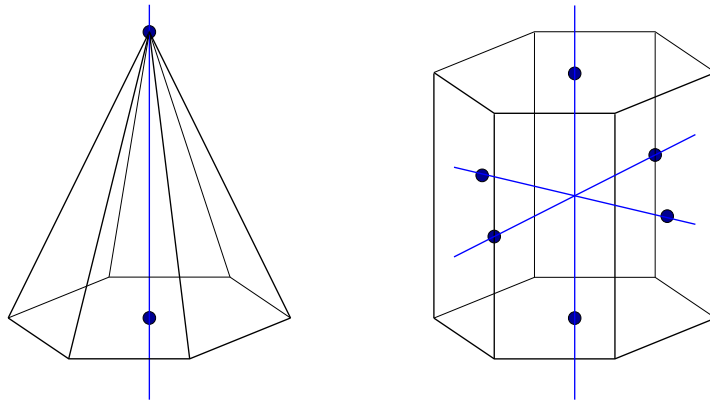
Die Achse \mathbf{k} nennt man dann auch eine **n -zählige Achse** oder eine **Achse n -ter Ordnung**. Zwei Achsen \mathbf{k} und \mathbf{k}' nennt man **äquivalente Achsen**, wenn sie durch ein Element g der Punktgruppe ineinander überführt werden, $\mathbf{k}' = g\mathbf{k}$. Die beiden Achsen müssen dann die gleiche Ordnung haben und die Drehungen $C_{\mathbf{k}}(\varphi_n)$ und $C_{\mathbf{k}'}(\varphi_n)$ sind konjugierte Elemente der Punktgruppe.

Mit jeder Achse \mathbf{k} ist auch $-\mathbf{k}$ eine n -zählige Achse wegen $C_{-\mathbf{k}}(\varphi_n) = C_{\mathbf{k}}(-\varphi_n) = C_{\mathbf{k}}((n-1)\varphi_n)$. Man nennt eine Achse \mathbf{k} **zweiseitig** (andernfalls **einseitig**), wenn sie mit der umgekehrten Achse $-\mathbf{k}$ äquivalent ist, d.h. wenn $C_{\mathbf{k}}(\varphi_n)$ und $C_{\mathbf{k}}^{-1}(\varphi_n) = C_{\mathbf{k}}((n-1)\varphi_n)$ konjugierte Elemente der Punktgruppe sind. Danach sind zweizählige Achsen immer zweiseitig, weil $C_{\mathbf{k}}(\pi) = C_{\mathbf{k}}(-\pi)$. Wegen $gC_{\mathbf{k}}(\varphi_n)g^{-1} = C_{g\mathbf{k}}(\varphi_n)$ (g Drehung aus der Punktgruppe) und $hC_{\mathbf{k}}(\varphi_n)h^{-1} = C_{-h\mathbf{k}}(\varphi_n)$ (h Drehspiegelung aus der Punktgruppe) (siehe (2.15)) sind Achsen der Ordnung $n \geq 3$ nur dann zweiseitig, wenn die Punktgruppe entweder eine Achse gerader Ordnung senkrecht zu \mathbf{k} oder eine Spiegelungsebene enthält, in der \mathbf{k} liegt. Man spricht von einer **Spiegelungsebene**, wenn die Punktgruppe eine Spiegelung an dieser Ebene enthält. Drehungen bilden **ambivalente Klassen** genau dann, wenn ihre Achsen zweiseitig sind.

Nach diesen Vorbetrachtungen zählen wir jetzt alle Punktgruppen von \mathcal{D}_3 auf. Zunächst die

Punktgruppen erster Art:

- (1) Die **zyklischen Gruppen** C_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) sind die Symmetriegruppen der senkrechten Pyramiden über einem regelmäßigen n -Eck und enthalten nur eine n -zählige Achse. Als zyklische Gruppe hat C_n den Rang 1 und ist abelsch. $C_1 = \{e\}$ ist in dieser unendlichen Serie subsumiert. Die Zahl der Klassen ist $q = n$. Die folgende Abbildung zeigt links eine Pyramide mit der Symmetrie C_6 .



- (2) Die **Diedergruppen** D_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) sind die Symmetriegruppen der senkrechten Prismen über einem regelmäßigen n -Eck, für $n = 2$ die Symmetriegruppe eines Rechtecks. Außer einer Achse \mathbf{k} der Ordnung n enthalten sie n zu \mathbf{k} senkrechte 2-zählige Achsen u_1 bis u_n , wobei die Winkel zwischen benachbarten Achsen $\varphi_n/2 = \pi/n$ sind. Elemente sind somit e , $n - 1$ Drehungen um \mathbf{k} und je eine Drehung um u_ν , insgesamt also $2n$ Elemente. Die vorige Figur zeigt rechts ein Prisma mit der Symmetrie D_6 . Die Diedergruppen haben den Rang 2 mit den Generatoren $D_3(\varphi_n)$ und $D_1(\varphi_2)$. Bei der Klasseneinteilung gibt es einen Gerade-Ungerade-Effekt:

$n = 2m$: Die Klassen $\{e\}$ und $\{C_{\mathbf{k}}(\pi)\}$ enthalten nur je 1 Element, während die anderen $n - 2$ \mathbf{k} -Drehungen Klassen in Paaren $\{C_{\mathbf{k}}(\varphi), C_{\mathbf{k}}(-\varphi)\}$ bilden. Die Drehungen u bilden die Klassen $U_{\mathbf{g}} = \{u_2, u_4, \dots, u_n\}$ und $U_{\mathbf{u}} = \{u_1, u_3, \dots, u_{n-1}\}$. Insgesamt hat D_n also $q = m + 3$ Klassen.

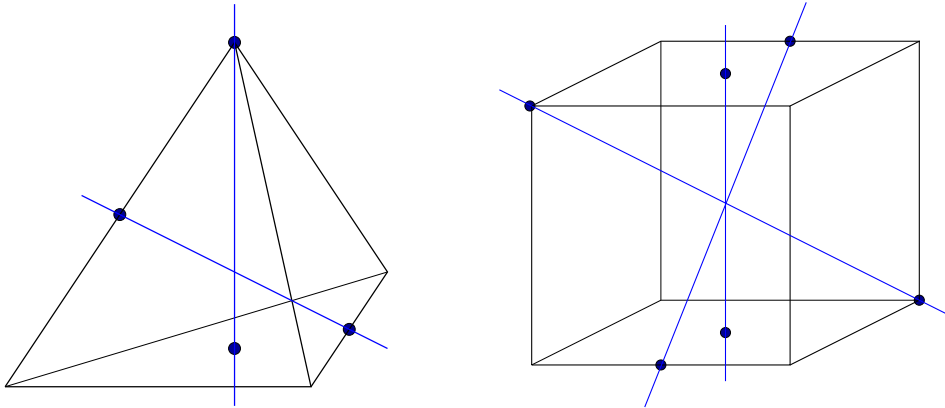
$n = 2m + 1$: Neben der Klasse $\{e\}$ bilden die n -zähligen Drehungen $n - 1$ Paarklassen $\{C_{\mathbf{k}}(\varphi), C_{\mathbf{k}}(-\varphi)\}$ und die $2m + 1$ 2-zähligen Drehungen liegen alle in einer Klasse U . Die Zahl der Klassen ist also $q = m + 2$.

- (3) Die **Tetraedergruppe** T ist die Symmetriegruppe des regulären Tetraeders. Sie enthält vier 3-zählige Achsen und drei 2-zählige Achsen, die jeweils äquivalent sind. Die 3-zähligen Achsen sind einseitig. Elemente sind damit e , 4 Drehungen um den Winkel $2\pi/3$, 4 Drehungen um den Winkel $4\pi/3$ und 3 Drehungen um den Winkel π , also insgesamt 12 Elemente. Die $q = 4$ Klassen sind $\{e\}$, $\{C(2\pi/3)\}$, $\{C(4\pi/3)\}$ und $\{C(\pi)\}$. Die Tetraedergruppe hat

den Rang 2 mit den Generatoren $D_3(\varphi_2)$ und

$$D_T = D_{\mathbf{k}}(\varphi_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{k} \parallel (1, 1, 1)). \quad (2.24)$$

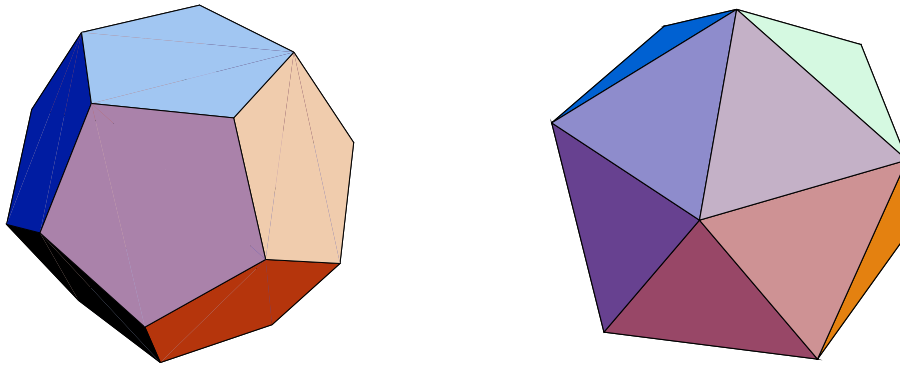
Die folgende Abbildung zeigt links eine 2-zählige und eine 3-zählige Achse im Tetraeder.



- (4) Die **Oktaedergruppe** O ist die Symmetriegruppe des Würfels und des regulären Oktaeders. Sie hat drei 4-zählige, vier 3-zählige und sechs 2-zählige Achsen, die jeweils äquivalent und alle zweiseitig sind. Elemente sind e , je 3 4-zählige Drehungen um $\pi/2$, um $2\pi/2$ und um $3\pi/2$, je 4 Drehungen um $2\pi/3$ und um $4\pi/2$ und 6 2-zählige Drehungen um π , also insgesamt 24 Elemente. Die Oktaedergruppe hat den Rang 2 mit den Generatoren $D_3(\varphi_4)$ und D_T . Die $q = 5$ Klassen sind $\{e\}$, $\{C(\pm\varphi_4)\}$, $\{C^2(\varphi_4)\}$, $\{C^{\pm 1}(\varphi_3)\}$ und $\{C(\varphi_2)\}$. Die obige Abbildung zeigt rechts je eine der drei Typen von Drehachsen.
- (5) Die **Ikosaedergruppe** Y ist die Symmetriegruppe des regulären Ikosaeders und des regulären Dodekaeders. Sie enthält sechs 5-zählige, zehn 3-zählige und 15 2-zählige Achsen, die jeweils äquivalent und alle zweiseitig sind. Die Zahl der Elemente ist daher $1 + 6 \times 4 + 10 \times 2 + 15 \times 1 = 60$ und es gibt die $q = 5$ Klassen $\{e\}$, $\{C(\pm\varphi_5)\}$, $\{C^2(\pm\varphi_5)\}$, $\{C(\pm\varphi_3)\}$ und $\{C(\varphi_2)\}$. Die Ikosaedergruppe hat den Rang 2 mit den Generatoren D_T und

$$D_Y = D_{\mathbf{k}}(\varphi_5) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{5}-1 & \sqrt{5}-1 \\ \sqrt{5}+1 & \sqrt{5}-1 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & 2 & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{k} \parallel (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, 1)). \quad (2.25)$$

Die folgende Figur zeigt die beiden platonischen Körper mit Ikosaedersymmetrie, links das Dodekaeder, rechts das Ikosaeder.



Die folgende Tabelle fasst die obige Aufzählung, ergänzt durch die Kommutatorgruppen aller Punktgruppen erster Art, noch einmal zusammen.

Tabelle 2.1: Liste der Punktgruppen erster Art in \mathcal{D}_3

Gruppe	Ordnung	Klassenzahl	Kommutatorgruppe
C_n ($n = 1, 2, \dots$)	n	n	$\{e\}$
D_{2m} ($m = 1, 2, \dots$)	$4m$	$m + 3$	C_m
D_{2m+1} ($m = 1, 2, \dots$)	$4m + 2$	$m + 2$	C_{2m+1}
T	12	4	$D_2 = \{e\} \cap \{C(\pi)\}$
O	24	5	T
Y	60	5	Y

Es folgt eine Aufzählung der

Punktgruppen zweiter Art:

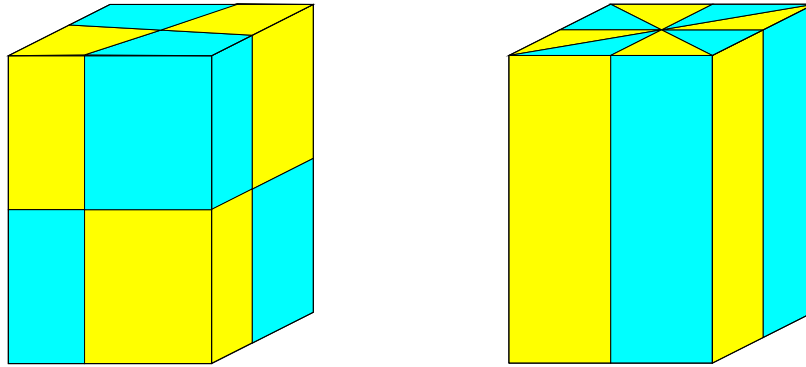
Wir werden in diesem Abschnitt mehrfach Gebrauch machen von einem

Isomorphieargument:

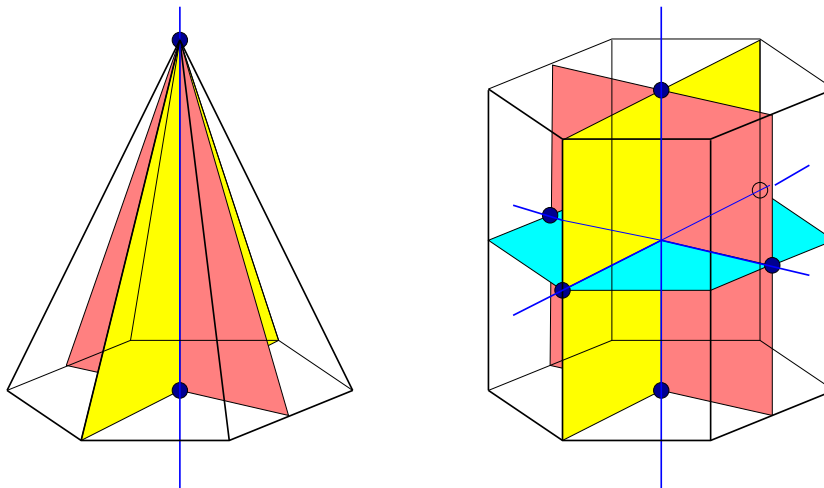
Es seien G_1 , G_2 und H drei Abbildungsgruppen, die auf einem gemeinsamen Raum \mathcal{R} wirken und für die $G_1 \cap H = G_2 \cap H = \{e\}$ gilt. Wenn weiterhin $G_1 \times H = G_2 \times H = G$ gilt, dann enthält jedes Element der Faktorgruppe G/H je genau ein Element aus G_1 und G_2 . Die Abbildung dieser Elemente aufeinander ist ein umkehrbar eindeutiger Homomorphismus und beweist damit die Isomorphie von G_1 und G_2 .

Es folgt die Aufzählung der uneigentlichen Punktgruppen.

- (6) S_{2n} ($n = 1, 2, \dots$) besteht aus den Potenzen einer Drehspiegelung $S_k(\varphi_{2n})$, ist zyklisch und hat $2n$ Elemente. Speziell gilt $S_2 = \{e, I\}$. Sie ist isomorph zur Punktgruppe erster Art C_{2n} . Die folgende Figur zeigt links ist ein angefärbtes quadratisches Prisma der Symmetrie S_4 .



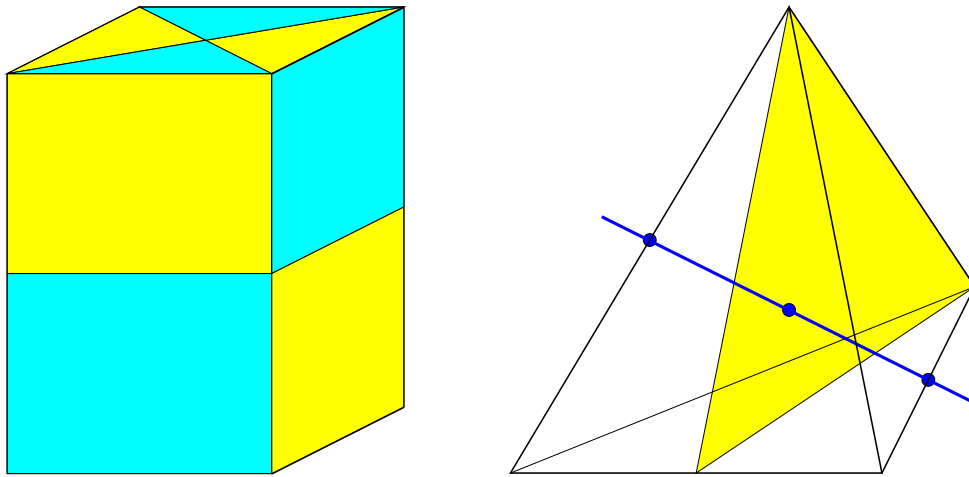
- (7) C_{nh} ($n = 1, 2, \dots$) besteht aus den Drehungen $C_{\mathbf{k}}(\nu\varphi_n)$ und Drehspiegelungen $S_{\mathbf{k}}(\nu\varphi_n)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n - 1$), hat $2n$ Elemente, ist abelsch und es gilt $C_{nh} = C_n \times C_{1h}$. Speziell gilt $C_{1h} = \{e, S_{\mathbf{k}}(0)\}$. Die obige Figur zeigt rechts ein angefärbtes Prisma der Symmetrie C_{4h} . (Die Bezeichnung h kommt von "horizontale Spiegelebene".)
- (8) C_{nv} ($n = 2, 3, \dots$) ist die uneigentliche Erweiterung der Symmetriegruppe C_n der senkrechten Pyramide über einem regulären n -Eck. Sie enthält neben den Drehungen $C_{\mathbf{k}}(\varphi_n)$ n Spiegelungen σ_ν an die \mathbf{k} -Achse enthaltenden Ebenen und hat somit $2n$ Elemente. Weil $C_{nv} \times S_2 = D_n \times S_2$ gilt, ist C_{nv} isomorph zu D_n (**Isomorphieargument**). Daher gibt es in den Gruppen C_{nv} ebenfalls einen Gerade-ungerade-effekt, wobei insbesondere die Spiegelungen für gerade n zwei Klassen und für ungerade n nur eine Klassen bilden. Die Gruppe C_{1v} wäre identisch mit der Gruppe C_{1h} und wird deshalb nicht berücksichtigt. Die folgende Figur zeigt links zwei der Spiegelebenen der Pyramide der Symmetrie C_{6v} . (Die Bezeichnung v kommt von "vertikale Spiegelebene".)



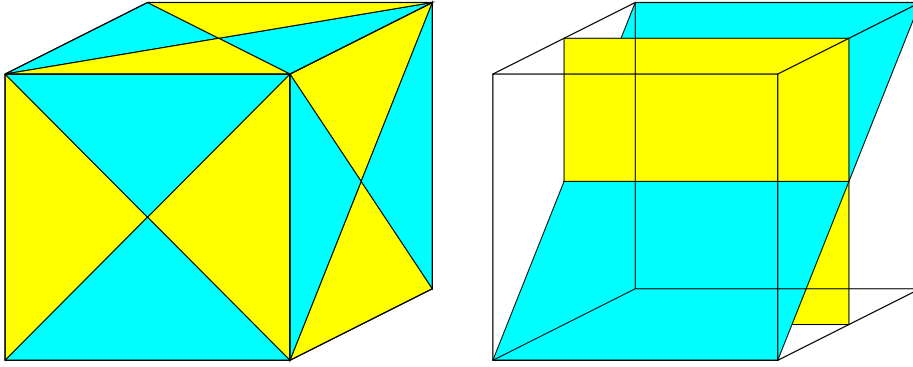
- (9) D_{nh} ($n = 2, 3, \dots$) ist die Symmetriegruppe eines regulären n -seitigen Prismas. Sie entsteht aus D_n durch Hinzufügen der horizontalen Spiegelung $S_{\mathbf{k}}(0)$, die mit allen Elementen von D_n vertauscht, d.h. sie ist das direkte Produkt $D_{nh} = D_n \times C_{1h}$. Die n -zählige Achse, die n zweizähligen Achsen, n Drehspiegelungen und n vertikale Spiegelungen ergeben zusammen $4n$ El-

emente. Die Zahlen der Klassen multiplizieren sich beim direkten Produkt, wobei der Gerade–ungerade–effekt von D_n übernommen wird. Die Gruppe D_{1h} wäre identisch mit der Gruppe C_{2v} und wird deshalb ausgeschlossen. Die obige Figur zeigt rechts drei der Spiegelebenen der Gruppe \mathbf{D}_{6h} .

- (10) D_{nd} ($n = 2, 3, \dots$) ist die Symmetriegruppe eines n -seitigen Doppelprimas. Sie enthält die Untergruppe S_{2n} , n vertikale Spiegelebenen und n horizontale 2-zählige Achsen und hat daher $4n$ Elemente. Für gerade $n = 2m$ ist D_{2md} wegen $D_{2md} \times S_2 \equiv D_{4m} \times S_2$ isomorph zu D_{4m} (**Isomorphieargument**). Für ungerade $n = 2m + 1$ enthält D_{2m+1d} die Inversion I und ist gleich dem direkten Produkt $D_{2m+1d} = D_{2m+1} \times S_2$. Die folgende Figur zeigt links ein angefärbtes Prisma, das die Symmetriegruppe \mathbf{D}_{2d} verdeutlicht.



- (11) T_d ist die volle Symmetriegruppe des regulären Tetraeders. Sie enthält die Elemente von T und 6 Spiegelebenen σ und die drei 2-zähligen Achsen von T werden zu 4-zähligen Drehspiegelachsen $S(\varphi_4)$. Dies ergibt 24 Elemente und die 5 Klassen $\{e\}$, $\{C(\pm\varphi_3)\}$, $\{C(\varphi_2)\}$, $\{S(\pm\varphi_4)\}$ und $\{\sigma\}$. Wegen $T_d \times S_2 \equiv O \times S_2$ ist T_d isomorph zu O (**Isomorphieargument**). Die obige Figur zeigt rechts je eine der Spiegelebenen und der Drehspiegelachsen.
- (12) T_h ist das direkte Produkt $T \times S_2$. Diese Gruppe enthält neben den Elementen von T die Inversion I , die 8 Elemente $IC_{\mathbf{k}}(\varphi_3) = S_{-\mathbf{k}}(\varphi_6)$ und die 3 Elemente $IC_{\mathbf{k}}(\varphi_2) = S_{\mathbf{k}}(0)$. Da das reguläre Tetraeder nicht inversionssymmetrisch ist, ist T_h keine Symmetriegruppe des Tetraeders. Die folgende Figur zeigt links einen angefärbten Würfel, der die Symmetrie \mathbf{T}_h hat. Die 8 Klassen sind $\{e\}$, $\{C(\varphi_3)\}$, $\{C^2(\varphi_3)\}$, $\{C(\varphi_2)\}$, $\{I\}$, $\{S(\varphi_6)\}$, $\{S^{-1}(\varphi_6)\}$ und $\{S(0)\}$.
- (13) O_h ist das direkte Produkt $O \times S_2$. Sie enthält neun Spiegelebenen, von denen zwei rechts in der folgenden Figur gezeigt sind, sowie drei 4-zählige und vier 6-zählige Drehspiegelachsen.



(14) Y_h ist das direkte Produkt $Y \times S_2$.

Die folgende Tabelle fasst die Punktgruppen zweiter Art noch einmal zusammen. Sie zeigt, dass alle diese Gruppen entweder isomorph zu einer Punktgruppe erster Art oder ein direktes Produkt einer solchen mit C_{1h} oder mit S_2 sind.

Tabelle 2.2: Liste der Punktgruppen zweiter Art in \mathcal{D}_3

Gruppe	Ordnung	Klassenzahl	Bemerkungen
S_{2n} ($n = 1, 2, \dots$)	$2n$	$2n$	$S_{2n} \cong C_{2n}$
C_{nh} ($n = 1, 2, \dots$)	$2n$	$2n$	$C_{nh} = C_n \times C_{1h}$
C_{2mv} ($m = 1, 2, \dots$)	$4m$	$m + 3$	$C_{2mv} \cong D_{2m}$
C_{2m+1v} ($m = 1, 2, \dots$)	$4m + 2$	$m + 2$	$C_{2m+1v} \cong D_{2m+1}$
D_{2mh} ($m = 1, 2, \dots$)	$8m$	$2m + 6$	$D_{2mh} = D_{2m} \times C_{1h}$
D_{2m+1h} ($m = 1, 2, \dots$)	$8m + 4$	$2m + 4$	$D_{2m+1h} = D_{2m+1} \times C_{1h}$
D_{nd} ($n = 2, 3, \dots$)	$4n$	$n + 3$	$\begin{cases} D_{2m d} \cong D_{4m} \\ D_{2m+1 d} = D_{2m+1} \times S_2 \end{cases}$
T_d	24	5	$T_d \cong O$
T_h	24	8	$T_h = T \times S_2$
O_h	48	10	$O_h = O \times S_2$
Y_h	120	10	$Y_h = Y \times S_2$

Außer den endlichen Punktgruppen gibt es unendlich viele unendliche, jedoch nur 5 topologisch abgeschlossene, d.h. solche, die jeden Häufungspunkt ihrer Elemente enthalten. Diese 5 **kompakten unendlichen Punktgruppen** sind:

- $C_n \longrightarrow \mathbf{C}_\infty$: alle Drehungen um eine Achse \mathbf{k}
- $D_n \longrightarrow \mathbf{D}_\infty$: alle Drehungen um eine Achse \mathbf{k} und Drehungen um π um alle Achsen senkrecht zu \mathbf{k}
- $C_{nh} \longrightarrow \mathbf{C}_{\infty h}$: alle Drehungen und Drehspiegelungen um eine Achse \mathbf{k}
- $C_{nv} \longrightarrow \mathbf{C}_{\infty v}$: alle Drehungen um eine Achse \mathbf{k} und alle Spiegelungen an Ebenen, die \mathbf{k} enthalten
- $D_{nh}, D_{nd} \longrightarrow \mathbf{D}_{\infty h}$: alle Drehungen und Drehspiegelungen um eine Achse \mathbf{k} , Drehungen um π um alle Achsen senkrecht zu \mathbf{k} und alle Spiegelungen an Ebenen, die \mathbf{k} enthalten

Diskrete Translationsgruppen

Wir betrachten **Untergruppen \mathcal{T} der Translationsgruppe \mathcal{T}_n** aller Translationen im \mathcal{R}_n . Wegen $t_{\mathbf{a}}t_{\mathbf{b}} = t_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ ist jede Translationsgruppe isomorph zur abelschen additiven Vektorgruppe ihrer Translationsvektoren \mathbf{a}, \mathbf{b} . Man darf annehmen, dass die Translationsvektoren von \mathcal{T} nicht alle in einem Unterraum mit einer Dimension kleiner als n liegen, weil man sonst den Abbildungsraum \mathcal{R}_n durch diesen Unterraum ersetzen könnte. Dann gibt es n Translationsvektoren aus \mathcal{T} , die eine Basis des \mathcal{R}_n bilden, und man nennt \mathcal{T} eine n -dimensionale Untergruppe von \mathcal{T}_n . Die Translationen in solch einer Untergruppe können sich allerdings im \mathcal{R}_n häufen und derartige Untergruppen sind nicht von Interesse. Ein Beispiel zur Illustration wäre eine Translationsgruppe im \mathcal{R}_1 , die die Translationen \mathbf{e}_1 und $a\mathbf{e}_1$ mit irrationalem a enthält. Da man die irrationale Zahl a durch eine Folge von rationalen Zahlen p_k/q_k mit wachsendem Nenner q_k beliebig gut mit der Präzision $0 < a q_{2k} - p_{2k} < 1/q_{2k+1}$ annähern kann, enthält \mathcal{T} eine Folge von Translationen, die sich am Ursprung häufen. Man fordert deshalb, dass der kürzeste nicht verschwindende Translationsvektor in \mathcal{T} eine endliche Länge $\epsilon > 0$ hat. Translationsgruppen mit dieser Eigenschaft nennt man **diskrete Translationsgruppen**.

Die **Struktur der diskreten n -dimensionalen Translationsgruppen** charakterisiert der folgende

Satz 2.4:

In jeder diskreten n -dimensionalen Translationsgruppe \mathcal{T} gibt es eine Basis von n linear unabhängigen Translationsvektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, mit denen sich jeder Vektor $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$ als $\mathbf{a} = \sum_{\nu=1}^n m_{\nu}\mathbf{a}_{\nu}$ mit ganzzahligen m_{ν} darstellen lässt.

Beweis:

- Wir führen einen induktiven Beweis, indem wir annehmen, wir hätten schon r Translationsvektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ gefunden, sodass es in dem von diesen Vektoren aufgespannten Unterraum \mathcal{T}_r des \mathcal{R}_n keine Vektoren in \mathcal{T} gibt außer $\mathbf{a} = m_1\mathbf{a}_1 + \dots + m_r\mathbf{a}_r$ mit ganzzahligen m_{ρ} . (Wir bezeichnen im folgenden die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich m ist, mit $[m]$.)
- Zum Beweis der Annahme für $r = 1$ betrachten wir einen beliebigen Vektor $\mathbf{b}_1 \in \mathcal{T}$ und wählen dann einen kürzesten Vektor $\mathcal{T} \ni \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ parallel zu \mathbf{b}_1 , den es angesichts der Diskretheitsforderung geben muss. Damit sind alle Vektoren $\mathbf{a} = m_1\mathbf{a}_1$ für ganzzahliges m_1 in \mathcal{T} . Einen weiteren Vektor $\mathbf{a}' = m'\mathbf{a}_1$ mit nicht ganzzahligem m' kann es in \mathcal{T} nicht geben, weil der Vektor $(m' - [m'])\mathbf{a}_1$ wegen $0 < m' - [m'] < 1$ kürzer als \mathbf{a}_1 wäre.
- Um die Annahme für $r + 1$ aus der für r zu folgern, betrachten wir einen beliebigen Vektor $\mathbf{b}_{r+1} \in \mathcal{T}$, der nicht in dem von den schon konstruierten Vektoren \mathbf{a}_{ρ} aufgespannten Unterraum \mathcal{T}_r liegt. In dem von den \mathbf{a}_{ρ} und \mathbf{b}_{r+1} aufgespannten Unterraum wählen wir dann einen Vektor $\mathbf{a}_{r+1} \in \mathcal{T}$ mit dem kürzesten Lot auf \mathcal{T}_r . (Die Existenz eines solchen Vektors wird im folgenden Punkt bewiesen werden.) In dem von \mathbf{a}_{ρ} ($\rho = 1, \dots, r+1$) aufgespannten Unterraum \mathcal{T}_{r+1} gibt es außer $\mathbf{a} = m_1\mathbf{a}_1 + \dots + m_r\mathbf{a}_{r+1}$ mit ganzzahligen m_{ρ} keine weiteren Translationsvektoren aus \mathcal{T} . Denn gäbe es einen solchen mit nicht

ganzzahligem m_{r+1} , so wäre $(m_{r+1} - [m_{r+1}])\mathbf{a}_{r+1}$ ein Translationsvektor mit kürzerem Lot als \mathbf{a}_{r+1} . Gäbe es schließlich einem solchen mit ganzzahligem m_{r+1} , aber nicht ganzzahligem m_ρ ($1 \leq \rho \leq r$), so wäre die Induktionsannahme für \mathcal{T}_r verletzt.

- Wenn es keinen Vektor $\mathbf{a}_{r+1} \in \mathcal{T}$ mit kürzestem Lot auf \mathcal{T}_r gäbe, müsste eine Folge von Vektoren aus \mathcal{T} mit beliebig kleinem Lot existieren. Jedes Element dieser Folge kann man durch Verschieben um ein $\mathbf{a} = m_1\mathbf{a}_1 + \dots + m_r\mathbf{a}_r \in \mathcal{T}_r$ durch einen Vektor aus \mathcal{T} ersetzen, dessen Projektion auf \mathcal{T}_r in dem durch die Vektoren \mathbf{a}_ρ aufgespannten Parallelepipiped oder auf dessen Rand liegt. Die damit erzeugte Folge muss einen Häufungspunkt in diesem Parallelepipiped haben, gegen den eine Teilfolge \mathbf{b}_ν konvergiert (Satz von Bolzano–Weierstraß). Die Differenzvektoren $\mathbf{b}_\nu - \mathbf{b}_{\nu-1}$ wären dann Translationsvektoren mit beliebig kleiner Länge im Widerspruch zur Diskretheitsforderung. \square

Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ nennt man eine **primitive Basis**. Das von den Basisvektoren aufgespannte Parallelepipiped nennt man eine **Elementarzelle** von \mathcal{T} . Die Nützlichkeit von Elementarzellen ergibt sich aus der Tatsache, dass man eine **Überdeckung** des gesamten \mathcal{R}_n erhält, indem man eine Elementarzelle um alle Vektoren in \mathcal{T} verschiebt.

Das Volumen einer Elementarzelle ist

$$V_{EZ} = |\det(a_{\nu\mu})|, \quad (2.26)$$

wenn $a_{\nu\mu}$ die ν -te kartesische Komponente von \mathbf{a}_μ bezeichnet. Die primitive Basis ist nicht eindeutig bestimmt. Die mit einer ganzzahligen Matrix m gebildeten Translationsvektoren $\mathbf{b}_\mu = \sum_{\nu=1}^n m_{\mu\nu}\mathbf{a}_\nu$ sind eine primitive Basis genau dann, wenn die Matrix m' der Umkehrrelation $\mathbf{a}_\mu = \sum_{\nu=1}^n m'_{\mu\nu}\mathbf{b}_\nu$ ebenfalls ganzzahlig ist. Dies ist aber wegen $m' = m^{-1} = \text{Adj } m / \det m$ und $\det m \cdot \det(m^{-1}) = 1$ genau dann der Fall, wenn $|\det m| = 1$. Daher bildet jedes n -Tupel von Translationsvektoren aus \mathcal{T} eine primitive Basis, dessen Elementarzelle das Volumen (2.26) hat. Die unendliche Vielfalt der möglichen Elementarzellen erkennt man schon an dem einfachen Beispiel, dass beliebige ganzzahlige untere Dreiecksmatrizen m mit Diagonalelementen $m_{\mu\mu} = 1$ primitive Basissysteme ergeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{b}_2 &= m_{21}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{b}_3 &= m_{31}\mathbf{a}_1 + m_{32}\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{b}_4 &= m_{41}\mathbf{a}_1 + m_{42}\mathbf{a}_2 + m_{43}\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4, \\ \mathbf{b}_5 &= \dots \end{aligned}$$

Die Endpunkte der Vektoren in \mathcal{T} spannen ein **Gitter** in \mathcal{R}_n auf. Wir wollen Punkte in \mathcal{R}_n als **äquivalent** (bezüglich einer diskreten Translationsgruppe \mathcal{T}) bezeichnen, wenn sie durch eine Translation aus \mathcal{T} verbunden werden können. Dadurch wird der \mathcal{R}_n in Äquivalenzklassen aufgeteilt. Die Punkte des zu \mathcal{T}

gehörigen Gitters bilden gerade eine Äquivalenzklasse. Punkte in verschiedenen Äquivalenzklassen nennen wir inäquivalent. Die Punkte im Inneren jeder Elementarzelle sind alle inäquivalent zueinander, d.h. es gibt keinen Translationsvektor in \mathcal{T} , der sie verbindet. Punkte auf dem Rand einer Elementarzelle können jedoch äquivalent miteinander sein. So sind alle 8 Eckpunkte einer Elementarzelle in derselben Äquivalenzklasse. Jeweils 4 Kantenpunkte einer Elementarzelle, die nicht Eckpunkte sind, sind ebenfalls äquivalent miteinander und alle Punkte auf dem Rand einer Elementarzelle, die weder Kanten- noch Eckpunkte sind, besitzen genau einen äquivalenten Partner auf der gegenüberliegenden Randfläche.

Als abstrakte Gruppen sind alle n -dimensionalen diskreten Translationsgruppen \mathcal{T} isomorph. Denn wenn man sie in einer primitiven Basis darstellt, erhält man eine treue Darstellung \mathcal{T}_Z , in der alle Translationsvektoren ganzzahlig sind. Wenn man die diskreten Translationsgruppen allerdings im Rahmen ihrer Bewegungsgruppe betrachtet, macht eine solche **affine Transformation in ein nichtorthogonales Koordinatensystem** keinen Sinn. Man kann dann die Frage aufwerfen, unter welchen Punktgruppen die Menge der Vektoren einer Translationsgruppe invariant ist, d.h. die Frage nach den **Symmetrieeigenschaften** des \mathcal{T} entsprechenden Gitters.

Für die anschauliche Erfassung der Symmetrie einer Translationsgruppe erweisen sich die Elementarzellen im allgemeinen als ungeeignet. Dies ist schon deshalb offensichtlich, weil es unendlich viele verschiedene Elementarzellen gibt. Mit der sogenannten **Wigner–Seitz–Zelle** gibt es jedoch eine eindeutig bestimmte Zelle, die invariant unter allen Symmetrieoperationen von \mathcal{T} ist und für viele Zwecke anstelle der Elementarzellen benutzt wird. Zur Definition der Wigner–Seitz–Zelle betrachten wir die Menge aller Punkte, die dem Gitterpunkt im Koordinatenursprung \mathcal{O} näher sind als jedem anderen Gitterpunkt. Diese offene Menge definiert das Innere der Wigner–Seitz–Zelle. Für eine Konstruktion der Wigner–Seitz–Zelle betrachtet man die mittelsenkrechten Ebenen aller Verbindungslinien des Ursprungs \mathcal{O} mit allen anderen Gitterpunkten. Endlich viele dem Ursprung nächstgelegene Ebenen formen den Rand der Wigner–Seitz–Zelle. Offenbar ergibt sich durch Verschieben der Wigner–Seitz–Zelle (mit Rand) um alle Vektoren in \mathcal{T} gleichfalls eine Überdeckung des Raumes \mathcal{R}_n . Auch die Inäquivalenz innerer Punkte hat die Wigner–Seitz–Zelle mit den Elementarzellen gemeinsam. Wir halten diese Eigenschaften fest im folgenden

Satz 2.5:

Die Wigner–Seitz–Zelle einer Translationsgruppe \mathcal{T} hat die folgenden Eigenschaften:

- (a) Sie besitzt alle Punktsymmetrien von \mathcal{T} .
- (b) Sie erlaubt eine Überdeckung des Raumes \mathcal{R}_n .
- (c) Ihre inneren Punkte können nicht mit einem Vektor aus \mathcal{T} verbunden werden.

Nicht alle Punktgruppen können Symmetriegruppen von Translationsgittern sein. Die Inversion I ist eine Symmetrie jeder Translationsgruppe \mathcal{T} , weil diese mit

jedem Vektor \mathbf{a} auch den Vektor $-\mathbf{a}$ enthält. Um weitere Einsichten in die Symmetrien zu erhalten, benutzen wir die oben genannte affine Transformation. Wir formulieren dazu den folgenden

Satz 2.6:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) Zu einer Punktgruppe P gibt es eine diskrete n -dimensionale Translationsgruppe \mathcal{T}_n , für die P Invarianzgruppe ist.
- (b) Es gibt eine affine Transformation A , mit der alle Elemente $D \in P$ in ganzzahlige Matrizen $M(D) = A^{-1}DA$ transformiert werden.
- (c) Die charakteristischen Polynome $f_D(\lambda) = \det(\lambda - D)$ aller $D \in P$ haben ganzzahlige Koeffizienten.
- (d) Die Eigenwerte aller $D \in P$ sind ganz-algebraische Zahlen.
- (e) Die Spuren $\text{Sp } D^\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$) der ersten n Potenzen aller $D \in P$ sind ganzzahlig.

Beweis:

- Sei \mathbf{a}_μ ($\mu = 1, \dots, n$) eine primitive Basis von \mathcal{T}_n und seien $a_{\mu\nu}$ ($\nu = 1, \dots, n$) die kartesischen Komponenten von \mathbf{a}_μ , d.h. mit der orthonormierten Basis \mathbf{e}_ν gelte $\mathbf{a}_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} \mathbf{e}_\nu$. Die Elemente D von P haben in der kartesischen Basis die Darstellung $D \mathbf{e}_\nu = \sum_\kappa D_{\nu\kappa} \mathbf{e}_\kappa$. Die Punktgruppe P ist genau dann eine Invarianzgruppe zu \mathcal{T}_n , wenn für alle $D \in P$ die Basistranslationen in Translationen abgebildet werden, d.h. wenn ganzzahlige Koeffizienten $m_{\mu\nu}(D)$ existieren mit

$$D \mathbf{a}_\mu = \sum_\nu m_{\mu\nu}(D) \mathbf{a}_\nu. \quad (2.27)$$

Die gesuchte affine Transformation wird durch die Matrix A mit den Elementen $a_{\mu\nu}$ vermittelt. Denn (2.27) schreibt sich in Komponenten $\sum_\nu m_{\mu\nu}(D) a_{\nu\kappa} = \sum_\nu a_{\mu\nu} D_{\nu\kappa}$, d.h. es gilt $M(D) = ADA^{-1}$. Dies beweist die Äquivalenz von (a) und (b).

- Offensichtlich sind (c) und (e) eine Folge von (b).
- Der Beweis der Äquivalenz von (c) mit (d) und der Äquivalenz von (e) mit (b) gelingt mit Mitteln der algebraischen Zahlentheorie (siehe Anhang A). \square

Die Drehungen zwei- und die Drehungen und Drehspiegelungen dreidimensionaler Punktgruppen haben nach den Gleichungen (2.2,3) und (2.6,7) die Spuren $2 \cos \varphi$ und $2 \cos \varphi \pm 1$. Daraus ergibt sich nach Punkt (e) in Satz 2.6 die Bedingung für die möglichen Drehwinkel φ , dass $2 \cos \varphi$ ganzzahlig sein muss. Die erlaubten Drehwinkel sind also

$$\boxed{\varphi = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ.} \quad (2.28)$$

Da die Verdopplung und Verdreifachung dieser Winkel auf keine neuen Winkel führt, verursachen die Bedingungen der Ganzzahligkeit von $2 \cos 2\varphi$ und $2 \cos 3\varphi$ in Punkt (e) hier keine weiteren Einschränkungen.

Die Drehungen vierdimensionaler und die Drehungen und Drehspiegelungen fünfdimensionaler Punktgruppen besitzen 2 Drehwinkel φ_1 und φ_2 , sodass Satz 2.6 die Ganzzahligkeit von $2(\cos k\varphi_1 + \cos k\varphi_2)$ ($k = 1, \dots, n$) für mögliche Winkelpaare fordert ($n = 4$ bzw. 5). Diese Bedingungen erfüllen für beide Dimensionen die 17 Winkelpaare

$$\boxed{(0^\circ, 0^\circ), (0^\circ, 60^\circ), (0^\circ, 90^\circ), (0^\circ, 120^\circ), (0^\circ, 180^\circ), (30^\circ, 150^\circ), (45^\circ, 135^\circ), (60^\circ, 60^\circ), (60^\circ, 90^\circ), (60^\circ, 120^\circ), (60^\circ, 180^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 120^\circ), (90^\circ, 180^\circ), (120^\circ, 120^\circ), (120^\circ, 180^\circ), (180^\circ, 180^\circ).} \quad (2.29)$$

Die meisten Winkelpaare setzen sich aus den für kleinere Dimensionen schon bekannten Winkeln (2.28) zusammen. Die einzigen Paare mit neuen Winkel sind $(30^\circ, 150^\circ)$ und $(45^\circ, 135^\circ)$. Die Drehspiegelungen vierdimensionaler Punktgruppen haben nach (2.6) nur einen Drehwinkel, der sich aus (2.28) bestimmt.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen zu beliebigen Dimensionen verfolgen wir jetzt den dreidimensionalen Fall weiter.

Kristallographische Punktgruppen

In 3 Dimensionen ist das Volumen V_{EZ} (2.26) darstellbar durch das Spatprodukt

$$V_{EZ} = |(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3|. \quad (2.30)$$

Die Wigner–Seitz–Zellen bestehen aus mindestens 6 und höchstens 14 Flächen.

Die Bestimmung der möglichen Symmetriegruppen P der dreidimensionalen Gitter \mathcal{T} wird durch die Feststellung (2.28) erleichtert, daß solche Gitter nur 2-, 3-, 4- oder 6-zählige Drehachsen haben können. Davon kann man sich auch durch einfache geometrische Überlegungen überzeugen. Wir haben hier jedoch mit Hilfe des Satzes 2.6 einen auf allgemeinen nichtgeometrischen Überlegungen beruhenden Beweis dieser Aussage vorgezogen. Eine Inspektion der obigen Liste aller Punktgruppen erster Art liefert uns genau **11 Symmetriegruppen aus eigentlichen Drehungen**:

$$\boxed{C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6, T, O.} \quad (2.31)$$

Die **uneigentlichen Symmetriegruppen** entstehen nach Satz 2.3 aus den 11 eigentlichen durch Verdopplung. Eine Möglichkeit zur Verdopplung besteht im Hinzufügen der Inversion I . Dies ergibt die **11 uneigentlichen Symmetriegruppen mit Inversion**

$$\boxed{S_2, S_6, C_{2h}, C_{4h}, C_{6h}, D_{2h}, D_{4h}, D_{6h}, D_{3d}, T_h, O_h.} \quad (2.32)$$

Eine alternative Möglichkeit besteht im Hinzufügen einer Drehspiegelung ohne Erzeugung der Inversion. Hier fällt die Verdopplung von D_4 und D_6 zu D_{4d} und D_{6d} weg, weil diese Gruppen die Untergruppen S_8 und S_{12} und daher nicht

erlaubte Drehwinkel enthalten. Es gibt daher die weiteren **10 uneigentlichen Symmetriegruppen ohne Inversion**

$$\boxed{S_4, C_{1h}, C_{3h}, C_{2v}, C_{3v}, C_{4v}, C_{6v}, D_{3h}, D_{2d}, T_d.} \quad (2.33)$$

Als zusätzliche Information fügen wir eine Liste mit der Anzahl z nichtisomorpher Gruppen und der Anzahl z_a nichtisomorpher abelscher Gruppen zu für Punktgruppen relevante Ordnungen n an.

Tabelle 2.3: Anzahl nichtisomorpher Gruppen

n	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	24	48
z	1	1	1	2	1	2	1	5	2	5	15	32
z_a	1	1	1	2	1	1	1	3	1	2	3	5

Zu jeder diskreten Translationsgruppe \mathcal{T} gibt es genau eine maximale unter den oben genannten Symmetriegruppen. Diese maximale Symmetriegruppe nennt man die **Holoedrie** von \mathcal{T} . Da die Inversion I immer ein Symmetrieelement ist, kommen als Holoedrien nur die Punktgruppen in (2.32) in Frage. Eine weitere einschränkende Eigenschaft von Holoedrien formulieren wir im folgenden

Satz 2.7:

Wenn ein dreidimensionales Gitter \mathcal{T} für $n > 2$ invariant unter $\mathbf{C}_{\mathbf{k}}(\varphi_n)$ ist, dann ist es auch invariant unter der Spiegelung an einer den Vektor \mathbf{k} enthaltenden Ebene, d.h. es ist invariant unter der Punktgruppe $\mathbf{C}_{\mathbf{nv}}$.

Beweis:

- Für den Beweis werden wir eine primitive Basis konstruieren, die invariant unter der im Satz genannten Spiegelebene ist. Die Konstruktion wird in Analogie zum Beweis von Satz 2.4 erfolgen, in dem gezeigt wurde, wie die sukzessive Wahl von kürzesten Translationsvektoren eine primitive Basis erzeugt. Bei der Beweisführung wird sich der Begriff der Wigner–Seitz–Zelle als nützlich erweisen.
- Als \mathbf{a}_1 wählen wir einen kürzesten Vektor in \mathcal{T} , der in der den Ursprung enthaltenden Ebene \mathcal{E}_\perp senkrecht zu \mathbf{k} liegt. Um zu zeigen, dass es Vektoren aus \mathcal{T} in dieser Ebene gibt, wählen wir einen beliebigen Vektor $\mathbf{b}_1 \in \mathcal{T}$, der nicht parallel zu \mathbf{k} ist. Dann liegt der Vektor $\mathbf{b} = \mathbf{C}_{\mathbf{k}}(\varphi_n)\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1 \in \mathcal{T}$ in \mathcal{E}_\perp . Die Existenz eines kürzesten Vektors ergibt sich wie im Beweis von Satz 2.4.
- Zur Konstruktion des zweiten Basisvektors betrachten wir den Vektor $\tilde{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{C}_{\mathbf{k}}(\varphi_n)\mathbf{a}_1 \in \mathcal{T}$. Er ist ein weiterer kürzester Translationsvektor in \mathcal{E}_\perp . Für $n = 4$ und $n = 6$ wählen wir diesen Vektor als zweiten Basisvektor $\mathbf{a}_2 = \tilde{\mathbf{a}}_2$. Für $n = 3$ wählen wir den Vektor $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \tilde{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{C}_{\mathbf{k}}(\varphi_6)\mathbf{a}_1$, der wegen $\mathbf{a}_1 \cdot \tilde{\mathbf{a}}_2 = -1/2$ die gleiche Länge wie \mathbf{a}_1 und $\tilde{\mathbf{a}}_2$ hat. Damit haben wir für $n = 3$ und $n = 6$ die gleiche Wahl für \mathbf{a}_2 getroffen. Dass dies möglich ist, erklärt sich aus der Beziehung $\mathbf{C}_{\mathbf{k}}(\varphi_3)I = \mathbf{S}_{\mathbf{k}}(-\varphi_6)$.

- Die beiden Vektoren \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 spannen eine zweidimensionale Untergruppe von \mathcal{T} in der Ebene \mathcal{E}_\perp auf, die alle in \mathcal{E}_\perp liegenden Vektoren aus \mathcal{T} enthält. Wir bezeichnen die zweidimensionalen Wigner-Seitz-Zellen dieser Untergruppe mit \mathcal{W} . Sie sind ein Quadrat für $n = 4$ und ein reguläres Sechseck für $n = 3$ und $n = 6$.
- Zur Konstruktion des dritten Basisvektors betrachten wir einen nicht in \mathcal{E}_\perp liegenden Translationsvektor \mathbf{b}_3 mit kürzestem Lot \mathbf{l} auf \mathcal{E}_\perp . Das Lot \mathbf{l} dieses Vektors kann nicht außerhalb von \mathcal{W} liegen, weil es sonst einen Translationsvektor \mathbf{a} in \mathcal{E}_\perp geben müsste mit dem kürzeren Lot $\mathbf{l} - \mathbf{a}$.
- Wenn das Lot \mathbf{l} im Inneren von \mathcal{W} liegt, muss $\mathbf{l} = \mathbf{0}$ gelten. Denn andernfalls wäre der Vektor $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{C}_k(\varphi_n)\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_3 = \mathbf{C}_k(\varphi_n)\mathbf{l} - \mathbf{l}$ ein Translationsvektor, der in das Innere von \mathcal{W} passt. In diesem Fall wählen wir $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_3$ und es gilt $\mathbf{a}_3 \parallel \mathbf{k}$.
- Wenn das Lot \mathbf{l} auf dem Rand von \mathcal{W} liegt, kann es nur auf einer der Ecken von \mathcal{W} liegen. Denn für jeden anderen Randpunkt würde $\tilde{\mathbf{b}}$ gleichfalls in das Innere von \mathcal{W} passen. Auch in diesem Fall wählen wir $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_3$ und man kann die Ecke so wählen, dass $\mathbf{l} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)/2$ gilt.
- Für die damit konstruierte primitive Basis ist in jedem Fall die durch \mathbf{k} und $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ aufgespannte Ebene eine Spiegelebene. \square

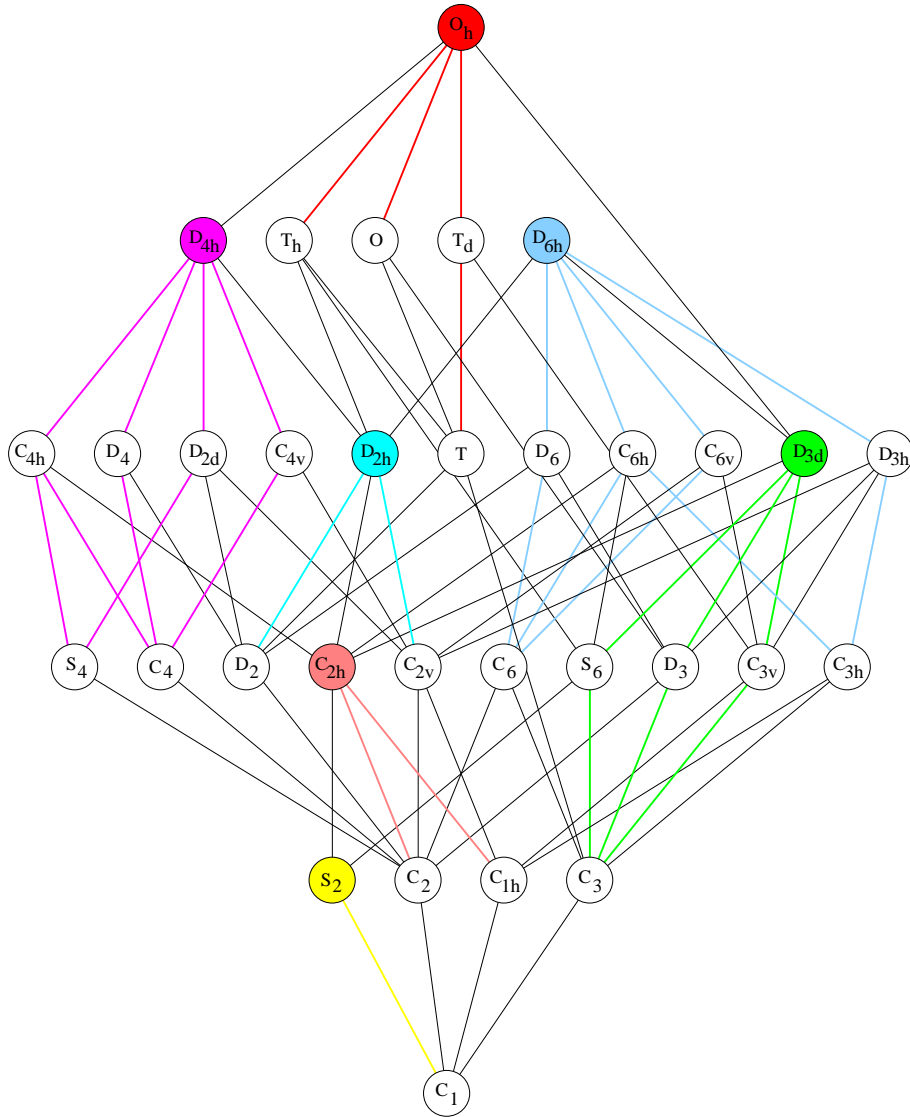
Mit Satz 2.7 sind die möglichen Symmetriegruppen von Gittern durch folgende drei Eigenschaften eingeschränkt:

1. Sie enthalten die Inversion.
2. Sie enthalten keine Drehachsen fünfter, siebter oder höherer Ordnung.
3. Mit jeder Drehachse dritter, vierter oder sechster Ordnung enthalten sie auch eine Spiegelebene durch diese Achse.

Aus der Liste (2.32) der Punktgruppen mit Inversion erfüllen \mathbf{S}_6 , \mathbf{C}_{4h} , \mathbf{C}_{6h} und \mathbf{T}_h das Kriterium 3 nicht, weil die ersten 3 keine ihre Achse \mathbf{k} enthaltende Spiegelebene haben und \mathbf{T}_h keine zu seiner dreizähligen Drehachse. Daher bleiben als mögliche Holoedrien nur die folgenden sieben Punktgruppen übrig, mit denen man sieben **Kristallsysteme** definiert:

- \mathbf{S}_2 das triklone System
- \mathbf{C}_{2h} das monokline System
- \mathbf{D}_{2h} das orthorhombische oder orthogonale System
- \mathbf{D}_{4h} das tetragonale oder quadratische System
- \mathbf{O}_h das kubische oder reguläre System.
- \mathbf{D}_{3d} das rhomboedrische oder trigonale System
- \mathbf{D}_{6h} das hexagonale System

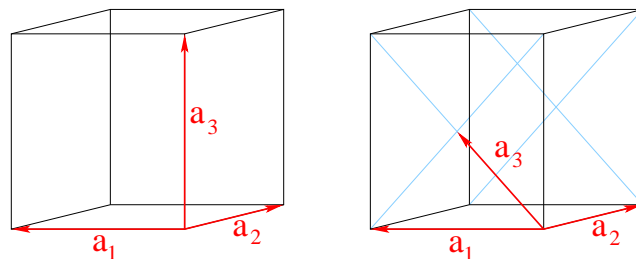
In der folgenden Figur sind die 32 Punktgruppen (2.31-33) mit ihren Untergruppenbeziehungen dargestellt. Die farbig markierten Punktgruppen sind die Holoedrien und deren farbig verbundene Untergruppen werden dem Kristallsystem der betreffenden Holoedrie zugeordnet. Dicke Linien kennzeichnen dabei Normalteiler.



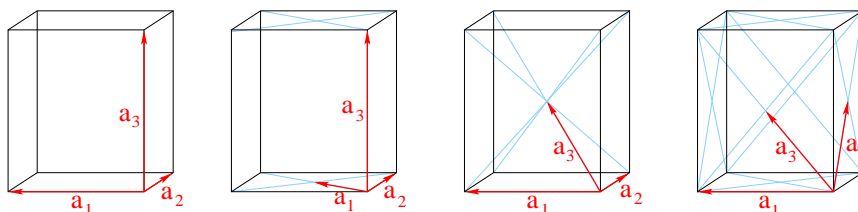
Die obige Argumentation hat auf sieben Punktgruppen geführt, die als Holoedrien in Frage kommen. Um sicher zu sein, dass alle diese wirklich Holoedrien sind, muss man zu jeder dieser Punktgruppen diskrete Translationsgruppen finden, die jeweils genau die Symmetrie der Punktgruppe haben. Zu einer Holoedrie gehörige Translationsgruppen nennt man vom gleichen Typ, wenn sie sich durch eine stetige Transformation unter Erhaltung der Symmetrie ineinander überführen lassen. Durch diese Äquivalenzrelation werden die Translationsgruppen in sogenannte **Bravaisklassen oder Gittertypen** eingeteilt. Es stellt sich heraus, dass es vierzehn verschiedene Gittertypen gibt. Dabei gibt es zu jeder Holoedrie einen **einfachen Gittertyp** und zu manchen Gittertypen zusätzlich verschiedene Arten von **zentrierten Gittertypen**.

Die Schar aller völlig beliebigen \mathcal{T} , bei denen weder die Längenverhältnisse von Basisvektoren noch die Winkel zwischen Basisvektoren spezielle Werte annehmen, hat nur die Inversionssymmetrie und realisiert daher als der **einfach triklinen Gittertyp** das triklinen Kristallsystem.

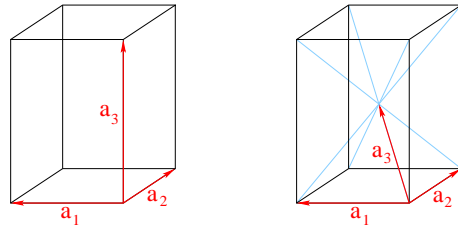
Die Holoedrie C_{2h} des monoklinen Systems enthält eine zur Drehachse \mathbf{k} senkrechte horizontale Spiegelebene σ_h . Mit zwei Vektoren \mathbf{b}_1 und \mathbf{b}_2 aus \mathcal{T} , die nicht in derselben vertikalen Ebene liegen, sind $\mathbf{b}_1\sigma_h - \mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2\sigma_h - \mathbf{b}_2$ zwei nicht kollineare Translationen in der Spiegelebene. Daher kann man zwei primitive Translationen \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 in der Spiegelebene wählen. Die dritte primitive Translation \mathbf{a}_3 ist ein Vektor mit kürzestem Lot auf die Spiegelebene. Dessen Projektion auf die Spiegelebene $\mathbf{b}_3 = (\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\sigma_h)/2$ man als halbierte Translation in der Form $\mathbf{b}_3 = (m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2)/2$ schreiben kann. Wie im Beweis von Satz 2.7 kann man nun zeigen, dass man die ganzen Zahlen m_i auf die Werte 0 oder 1 festlegen kann. Für $m_1 = m_2 = 0$ erhält man den **monoklin einfachen Gittertyp**, der durch die Bedingung charakterisiert ist, dass \mathbf{a}_3^{me} senkrecht auf \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 steht, d.h. es gilt $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = 0$. Die drei Fälle, in denen mindestens ein m_i nicht gleich 0 ist, sind äquivalent, weil man \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 vertauschen kann oder \mathbf{a}_2 durch $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ ersetzen kann, und ergeben einen zweiten monoklinen Gittertyp. Er kann durch die Bedingung gekennzeichnet werden, dass $2\mathbf{a}_3^{\text{mb}} - \mathbf{a}_1$ senkrecht auf \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 steht, d.h. es gilt $2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3^{\text{mb}} = |\mathbf{a}_1|^2$ und $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3^{\text{mb}} = 0$. Diese Bravaisklasse wird **monoklin basiszentrierter Gittertyp** genannt. Die Bezeichnung weist darauf hin, dass der Vektor \mathbf{a}_3^{mb} auf den Mittelpunkt des durch die Vektoren \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_3^{me} aufgespannten Rechtecks zeigt. Die folgende Figur zeigt links die Basis und die Elementarzelle eines monoklin einfachen Gitters und rechts die Basis und die gegenüber der Elementarzelle verdoppelte, sogenannte **konventionelle Gitterzelle** eines monoklin basiszentrierten Gitters.



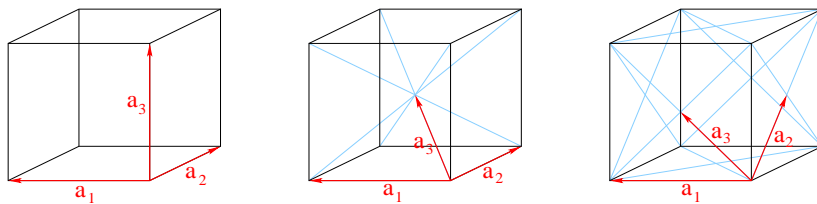
Analoge Betrachtungen für die anderen Kristallsysteme führen auf die weiteren Gittertypen. Im orthogonalen System gibt es vier Bravaisklassen, den **orthogonal einfachen Gittertyp** mit den Basiseigenschaften $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = 0$, den **orthogonal basiszentrierten Gittertyp** mit den drei paarweise orthogonalen Vektoren $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, \mathbf{a}_2 und \mathbf{a}_3 , den **orthogonal raumzentrierten Gittertyp** mit den drei paarweise orthogonalen Vektoren \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 und $2\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ und den **orthogonal (allseitig) flächenzentrierten Gittertyp** mit den drei paarweise orthogonalen Vektoren \mathbf{a}_1 , $2\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1$ und $2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3$. Diese vier Typen sind in der folgenden Figur gezeigt, wobei die konventionelle Gitterzelle des flächenzentrierten Gitters vier Elementarzellen enthält.



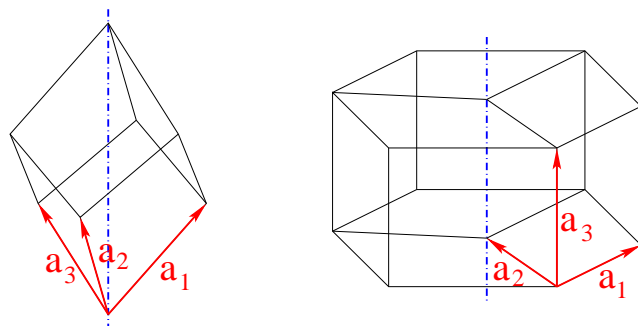
Im tetragonalen System gibt es den **tetragonal einfachen Gittertyp** und den **tetragonal raumzentrierten Gittertyp**. Diese beiden Typen unterscheiden sich von den entsprechenden orthogonalen nur durch die zusätzliche Bedingung, dass die Basisfläche der konventionellen Gitterzelle ein Quadrat ist. Die orthogonal basiszentrierten Gitter sind im tetragonalen Fall im einfachen Gittertyp enthalten, weil man mit \mathbf{a}_1 und $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ zwei zueinander orthogonale Vektoren gleicher Länge findet. Die orthogonal allseitig flächenzentrierten Gitter sind im tetragonalen Fall im raumzentrierten Gittertyp enthalten, wie man anhand der beiden Basisvektoren $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ und $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ sieht. Die beiden Gittertypen sind in der folgenden Figur dargestellt.



Die drei Bravaisklassen im kubischen System ergeben sich ebenfalls aus denen des orthogonalen Systems durch zusätzliche Bedingungen, indem hier die konventionelle Gitterzelle ein Würfel ist. Neben dem **kubisch einfachen Gittertyp** gibt es den **kubisch raumzentrierten Gittertyp** und den **kubisch allseitig flächenzentrierten Gittertyp**. Die orthogonal basiszentrierten Gitter sind wie im schon im tetragonalen Fall im kubisch einfachen Gittertyp enthalten. Die folgenden Figur zeigt die drei kubischen Gittertypen.



Das trigonale und das hexagonale System haben beide nur eine Bravaisklasse, den **trigonal einfachen Gittertyp** und den **hexagonal einfachen Gittertyp**.



Beide sind in der obigen Figur gezeigt. Eine primitive Basis des trigonalen Gittertyps erhält man, indem man auf einen kürzesten Vektor \mathbf{a}_1 , der nicht kollinear mit der dreizähligen Drehachse \mathbf{k} (blau gestrichelt) ist, die Drehungen $\mathbf{C}_{\mathbf{k}}(\pm\varphi_3)$ anwendet, um \mathbf{a}_2 und \mathbf{a}_3 zu erhalten. Beim hexagonalen Gittertyp haben \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2

die gleiche Länge und schließen einen Winkel von 60° ein und \mathbf{a}_3 steht auf \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 senkrecht und ist parallel zur (blau gestrichelten) sechszähligen Drehachse. Die konventionelle Gitterzelle des hexagonalen Systems enthält drei Elementarzellen.

3. Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Wir betrachten in diesem Kapitel zunächst **beliebige Gruppen** und werden die Diskussion erst nach Satz 3.7 auf endliche Gruppen einschränken.

Familien linearer Abbildungen

Wir bezeichnen mit \mathcal{M} einen **s -dimensionalen linearen Vektorraum über dem Körper \mathcal{C} der komplexen Zahlen (Vektormodul)**, d.h. es gibt s Elemente $u_1, \dots, u_s \in \mathcal{M}$ (eine Basis), sodass alle $u \in \mathcal{M}$ sich eindeutig als $u = \sum_{\sigma=1}^s \lambda_{\sigma} u_{\sigma}$ mit komplexen Zahlen λ_{σ} darstellen lassen. Es ist für unsere Zwecke wichtig, hierbei den Körper der komplexen Zahlen als einen algebraisch abgeschlossenen Zahlenkörper zu verwenden.

Eine Abbildung $T : \mathcal{M} \xrightarrow{T} \mathcal{M}$ auf \mathcal{M} heißt **lineare Abbildung auf dem Vektorraum \mathcal{M}** , wenn für beliebige $u, v \in \mathcal{M}$ und beliebige $\lambda \in \mathcal{C}$ (a) $T(u+v) = Tu + Tv$ und (b) $T(\lambda u) = \lambda Tu$ gilt.

Ist nun jedem Element x einer Menge F eine lineare Abbildung $T(x)$ auf \mathcal{M} zugeordnet,

$$T : F \ni x \longrightarrow T(x), \quad (3.1)$$

so sprechen wir von einer **Familie linearer Abbildungen**.

Nach Wahl einer Basis in \mathcal{M} werden die Punkte von \mathcal{M} durch Koordinatenvektoren dargestellt und die lineare Abbildung T durch eine s -dimensionale Matrix D . Die durch $T(x)$ ($x \in F$) auf diese Weise erzeugte Menge von Matrizen nennen wir eine **s -dimensionale Matrizenfamilie**.

Bei anderer Wahl der Basis von \mathcal{M} erhält man eine andere Matrizenfamilie $C(x)$. Beschreibt die affine Matrix A den Zusammenhang zwischen den beiden Basissystemen, $u_{\sigma}^D = \sum_{\rho} u_{\rho}^C A_{\rho\sigma}$, dann gilt für alle $x \in F$

$$C(x) = AD(x)A^{-1}. \quad (3.2)$$

Aufgrund dieser Eigenschaft (3.2) nennt man die beiden Matrizenfamilien D und C **äquivalente Familien**.

Eine Familie linearer Abbildungen $T(x)$ nennt man **reduzibel**, wenn ihr Vektorraum \mathcal{M} unter der Wirkung aller Abbildungen der Familie einen **echten invarianten Unterraum** enthält, d.h. wenn er ein $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ ($\{0\} \neq \mathcal{M}' \neq \mathcal{M}$) enthält, sodass für alle $x \in F$ die Beziehung $T(x)\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}'$ gilt. Anderenfalls heißt die Familie **irreduzibel**. Eine Abbildungsfamilie nennt man **vollreduzibel**, wenn sie entweder selbst schon irreduzibel ist oder wenn ihr Vektorraum sich als direkte Summe von irreduziblen Unterräumen darstellen lässt, d.h. es gibt r Unterräume \mathcal{M}_{ρ} ($\rho = 1, \dots, r$) mit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \dots + \mathcal{M}_r$ ($\{0\} \neq \mathcal{M}_{\rho} \neq \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{\rho} \cap \mathcal{M}_{\sigma} = \{0\}$ für $\rho \neq \sigma$), sodass für alle $x \in F$ $T(x)\mathcal{M}_{\rho} \subset \mathcal{M}_{\rho}$ gilt.

Wir wollen die Bedeutung dieser Begriffe für die Gestalt der Matrizen $D(x)$ veranschaulichen, durch die die Abbildungen $T(x)$ nach Wahl einer Basis in

\mathcal{M} dargestellt werden. Die Matrizen einer reduziblen Familie mit einem s' -dimensionalen Unterraum \mathcal{M}' haben in einem Basissystem, in dem die ersten s' Basisvektoren aus \mathcal{M}' stammen, die Gestalt

$$D(x) = \begin{pmatrix} D'(x) & B(x) \\ 0 & C(x) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

wo $B(x)$ $(s - s', s')$ -Rechtecksmatrizen und die Matrizen $C(x)$ quadratische $(s - s', s - s')$ -Matrizen sind. Ist die Familie jedoch vollreduzibel, dann sind die Rechtecksmatrizen in (3.3) $B(x) = 0$ und die Matrizen haben bei geeigneter Wahl einer Basis alle die **Blockdiagonalgestalt**

$$D(x) = \begin{pmatrix} D_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_r(x) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Als nächstes stellen wir einen wichtigen Hilfsatz für Matrizenfamilien vor, das

Schursche Lemma 3.1:

Seien $C(x)$ und $D(x)$ irreduzible Matrizenfamilien der Dimensionen r und s mit der Familienmenge F und sei A eine (s, r) -Rechtecksmatrix, mit der für alle $x \in F$ $D(x)A = AC(x)$ gilt. Dann ist entweder $A = 0$ oder es gilt $r = s$ und $\det A \neq 0$.

Bemerkung: Wenn $A \neq 0$, so bedeutet dies, dass $C(x)$ und $D(x)$ äquivalente Familien sind.

Beweis: Wir bezeichnen die Vektorräume von $C(x)$ und $D(x)$ mit \mathcal{M}_C und \mathcal{M}_D . Sei nun $A \neq 0$. Dann definiert die Matrix A eine lineare Abbildung $\mathcal{M}_C \xrightarrow{A} \mathcal{M}_D$.

- (a) Der Bildraum $\mathcal{M}'_D = A\mathcal{M}_C$ ist ein Unterraum von \mathcal{M}_D , der wegen $A \neq 0$ nicht gleich $\{0\}$ ist. Dieser Unterraum ist aber invariant unter der Familie $D(x)$, weil für alle $v \in \mathcal{M}'_D$ es ein $u \in \mathcal{M}_C$ gibt mit $v = Au$ und daher $D(x)v = D(x)Au = AC(x)u \in A\mathcal{M}_C = \mathcal{M}'_D$ gilt. Da die Familie $D(x)$ irreduzibel ist, muss $\mathcal{M}'_D = \mathcal{M}_D$ gelten.
- (b) Der **Kern** von A , der durch $\mathcal{M}'_C = \{u | u \in \mathcal{M}_C, Au = 0\}$ definiert ist, ist ein Unterraum von \mathcal{M}_C . Er kann wegen $A \neq 0$ nicht gleich \mathcal{M}_C sein, ist aber invariant unter der Familie $C(x)$, weil $Au = 0 \Rightarrow AC(x)u = D(x)Au = 0$ gilt. Da die Familie $C(x)$ irreduzibel ist, muss $\mathcal{M}'_C = \{0\}$ gelten.
- (c) Aus (a) und (b) folgt, dass A den Vektorraum \mathcal{M}_C umkehrbar eindeutig auf den Vektorraum \mathcal{M}_D abbildet, und daher folgt $r = s$ und $\det A \neq 0$. \square

Mittels des Schurschen Lemmas erhält man einen einfachen Beweis des folgenden

Satzes 3.2:

Wenn $D(x)$ mit $x \in F$ eine irreduzible Matrizenfamilie der Dimension s ist und A eine s -dimensionale Matrix mit der Eigenschaft $AD(x) = D(x)A$ für alle $x \in F$, so folgt $A = \alpha E$.

Beweis: Sei α Eigenwert von A , sodass $\det(A - \alpha E) = 0$. Dann gilt $D(x)(A - \alpha E) = (A - \alpha E)D(x)$. Wäre nun $A - \alpha E \neq 0$, so folgte aus dem Schurschen Lemma der Widerspruch $\det(A - \alpha E) \neq 0$. \square

Für diesen Satz ist die **algebraische Abgeschlossenheit** des Zahlkörpers offenbar wesentlich, über dem der Vektorraum \mathcal{M} definiert ist. Denn der Eigenwert der Matrix A kann ja komplex sein. Das folgende Beispiel zeigt, dass der obige Satz für reelle Vektorräume nicht gültig ist.

Wir betrachten dazu die zweidimensionalen Drehmatrizen (2.1), die alle miteinander vertauschen. Auf dem reellen Vektorraum \mathcal{R}_2 wären sie eine irreduzible Familie. Jedes $A = D_2(\varphi) \neq \alpha E$ mit $\sin \varphi \neq 0$ ergäbe einen Widerspruch zum obigen Satz. Die Familie $D_2(\varphi)$ ist aber auf dem komplexen zweidimensionalen Vektorraum nicht irreduzibel, weil sich alle ihre Matrizen durch die unitäre Transformation

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

diagonalisieren lassen.

Der mit dem gerade diskutierten Beispiel angedeutete Sachverhalt wird durch den folgenden Satz unterstrichen.

Satz 3.3:

Jede irreduzible abelsche Matrizenfamilie ist eindimensional.

Beweis:

Für alle $x, y \in F$ gilt $D(x)D(y) = D(y)D(x) \Rightarrow D(y) = \alpha(y)E$ und wegen der Irreduzibilität folgt schließlich die Eindimensionalität $D(y) = \alpha(y)$. \square

Wenn man zwei Familien $T_1(x)$ und $T_2(x)$ linearer Abbildungen mit $x \in F$ auf Vektorräumen \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 hat, so kann man ein **Kroneckerprodukt** $T(x) = T_1(x) \otimes T_2(x)$ dieser Familien definieren, das aus Abbildungen auf dem Tensorprodukt $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ der Vektorräume besteht. Wenn $\mathbf{e}_\rho^{(1)}$ ($\rho = 1, \dots, s^{(1)}$) und $\mathbf{e}_\sigma^{(2)}$ ($\sigma = 1, \dots, s^{(2)}$) Basissysteme der beiden Vektorräume sind, in denen die Abbildungen durch Matrizen mittels der Gleichungen

$$T_1(x) \mathbf{e}_\rho^{(1)} = \sum_{\rho'=1}^{s^{(1)}} D_{\rho\rho'}^{(1)}(x) \mathbf{e}_{\rho'}^{(1)}, \quad T_2(x) \mathbf{e}_\sigma^{(2)} = \sum_{\sigma'=1}^{s^{(2)}} D_{\sigma\sigma'}^{(2)}(x) \mathbf{e}_{\sigma'}^{(2)} \quad (3.6)$$

dargestellt werden, so bilden die Paare $(\mathbf{e}_\rho^{(1)}, \mathbf{e}_\sigma^{(2)})$ ein Basissystem des $s^{(1)} \cdot s^{(2)}$ -dimensionalen Produktraums $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, auf dem das Kroneckerprodukt der Abbildungen durch die Gleichung

$$T(x) (\mathbf{e}_\rho^{(1)}, \mathbf{e}_\sigma^{(2)}) = \sum_{\rho', \sigma'} D_{\rho\rho'}^{(1)}(x) D_{\sigma\sigma'}^{(2)}(x) (\mathbf{e}_{\rho'}^{(1)}, \mathbf{e}_{\sigma'}^{(2)}) \quad (3.7)$$

definiert ist. Damit wird das Kroneckerprodukt der Abbildungen in der genannten Basis durch die Matrizen

$$D_{(\rho,\sigma)(\rho',\sigma')}(x) = D_{\rho\rho'}^{(1)}(x)D_{\sigma\sigma'}^{(2)}(x) \quad (3.8)$$

dargestellt. Für Kroneckerprodukte gilt offensichtlich der

Satz 3.4:

Zwei Kroneckerproduktfamilien $D^{(a)} = D^{(a1)}D^{(a2)}$ und $D^{(b)} = D^{(b1)}D^{(b2)}$ sind äquivalent genau dann, wenn sowohl $D^{(a1)}$ und $D^{(b1)}$ wie auch $D^{(a2)}$ und $D^{(b2)}$ äquivalent sind.

Die in diesem Abschnitt diskutierten Konzepte und Sätze gelten insbesondere für den nunmehr zu behandelnden Fall, dass die Familie F eine Gruppe ist.

Lineare Darstellungen von Gruppen

Die Anwendungen der Gruppen in der Physik betreffen in erster Linie die **Darstellungstheorie der Gruppen**. Wie schon in Kapitel 1 erwähnt heißt ein homomorphes Bild einer Gruppe eine lineare Darstellung der Gruppe, wenn es aus linearen Abbildungen besteht. Wir werden jetzt lineare Darstellungen als Abbildungsfamilien im Sinne des vorigen Abschnitts dieses Kapitels definieren, denen zusätzlich eine Gruppenstruktur aufgeprägt ist. Dazu betrachten wir anstelle der strukturlosen Menge F im vorigen Abschnitt eine Gruppe G .

Definition:

Eine Familie von umkehrbar eindeutigen linearen Abbildungen auf dem s -dimensionalen linearen Raum \mathcal{M} über dem Zahlenkörper der komplexen Zahlen, die den Elementen g aus der Gruppe G zugeordnet sind,

$$T : G \ni g \longrightarrow T(g) \quad (3.9)$$

und die die Eigenschaft

$$T(gh) = T(g)T(h) \quad (g, h \in G), \quad (3.10)$$

hat, nennen wir eine **s -dimensionale lineare Darstellung der Gruppe G auf dem Vektorraum \mathcal{M}** .

Zu dieser Definition fügen wir die folgenden Bemerkungen an:

1. Es gilt immer

$$T(e) = E, \quad (3.11)$$

da $T(g)T(e) \stackrel{(3.10)}{=} T(ge) = T(g) \Rightarrow T^{-1}(g)T(g)T(e) = E$. Tatsächlich ist die Forderung $T(e) = E$ hinreichend dafür, dass $\forall g \in G$ die Abbildung $T(g)$ umkehrbar ist, weil damit aus (3.10) $T(g)T(g^{-1}) = T(gg^{-1}) = T(e) = E$ folgt.

2. Das folgende Beispiel spielt eine wichtige Rolle in **physikalischen Anwendungen**: Sei G eine Gruppe von Bewegungen im \mathcal{R}_3 und sei \mathcal{M} ein linearer Raum von komplexwertigen Funktionen $\psi(\mathbf{r})$ auf \mathcal{R}_3 , der mit $\psi(\mathbf{r})$ auch alle Funktionen $\psi(g\mathbf{r})$ mit $g \in G$ enthält. Dann erhält man durch die Abbildung

$$\boxed{T(g) : \psi(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi(g^{-1}\mathbf{r})} \quad (3.12)$$

eine lineare Darstellung. Denn T ist (a) eine lineare Abbildung auf \mathcal{M} , (b) umkehrbar und (c) T erfüllt (3.10), weil

$$T(g)T(h)\psi(\mathbf{r}) = T(g)\psi(h^{-1}\mathbf{r}) = \psi(h^{-1}g^{-1}\mathbf{r}) = \psi((gh)^{-1}\mathbf{r}) = T(gh)\psi(\mathbf{r}).$$

Die Verallgemeinerung des obigen Sachverhalts auf Funktionen $\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ mehrerer Variablen ist offensichtlich, wenn die Bewegungen g simultan auf alle Variablen wirken.

3. Sei spezifischer $\psi(\mathbf{r})$ die **quantenmechanische Wellenfunktion** eines Teilchens oder eines Systems identischer Teilchen. Der Hamiltonoperator H für das oder die Teilchen sei invariant unter den Bewegungen aus G , d.h. $\forall g \in G$ gelte $T(g)H = HT(g)$. Wir betrachten den linearen Raum der Eigenfunktionen ψ mit $H\psi = E\psi$ zur Energie E . Wegen $HT\psi = T(H\psi) = T(E\psi) = ET\psi$ liegt $T\psi$ mit ψ in \mathcal{M} und \mathcal{M} ist ein Darstellungsmodul der **Invarianzgruppe G** .
4. Nach Wahl einer Basis u^D in \mathcal{M} werden die Punkte von \mathcal{M} durch Koordinatenvektoren dargestellt und die lineare umkehrbare Abbildung T durch eine nichtsinguläre Matrix D . Den durch $T(g)$ ($g \in G$) auf diese Weise erzeugte Homomorphismus $D(x)$ (es gilt $D(g)D(h) = D(gh)$) auf eine **Gruppe nichtsingulärer Matrizen** nennen wir ebenfalls eine **lineare Darstellung** der Gruppe G oder kurz eine **Matrixgruppe** und die Dimension s von \mathcal{M} nennen wir die **Dimension oder den Grad** der Darstellung oder der Matrixgruppe.
5. Bei anderer Wahl der Basis von \mathcal{M} erhält man eine andere Darstellung $C(g)$. Beschreibt die Matrix A den Zusammenhang zwischen den Basissystemen, $u_\sigma^D = \sum_\rho u_\rho^C A_{\rho\sigma}$, dann gilt für alle $g \in G$

$$C(g) = AD(g)A^{-1}. \quad (3.13)$$

Aufgrund dieser Eigenschaft (3.13) nennt man die beiden Darstellungen D und C **äquivalente Darstellungen** oder **äquivalente Matrixgruppen**.

Eine wichtige Aufgabe der Darstellungstheorie ist die **Klassifizierung** aller Darstellungen einer Gruppe. Da man zu jeder Darstellung $D(g)$ mit einer beliebigen nichtsingulären Matrix A eine äquivalente Darstellung $AD(g)A^{-1}$ erzeugt, genügt die Klassifikation der **Klassen äquivalenter Darstellungen oder äquivalenter Matrixgruppen**.

Die Begriffe reduzibel, irreduzibel und vollreduzibel, die wir im vorigen Abschnitt dieses Kapitels für Abbildungs- und Matrizenfamilien definiert haben, und die Sätze über Abbildungsfamilien übertragen sich auf lineare Darstellungen. Wir

werden später sehen, dass lineare Darstellungen unter recht allgemeinen Voraussetzungen vollreduzibel sind. Das bedeutet, dass alle Darstellungen sich aus irreduziblen zusammensetzen und daher eine Klassifikation der irreduziblen Darstellungen genügt.

Wir beginnen mit dem

Satz 3.5:

Lineare Darstellungen, die aus unitären Abbildungen bestehen (unitäre Darstellungen), sind vollreduzibel.

Beweis:

- (a) Wir benutzen den Begriff des **orthogonalen Komplements** \mathcal{M}'^\perp eines Unterraums $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}'^\perp = \{v \mid v \in \mathcal{M}, v \perp \mathcal{M}'\}. \quad (3.14)$$

Sei nun \mathcal{M}' ein invarianter Unterraum des Matrixsystems $D(g)$, d.h. $\forall u \in \mathcal{M}' D(g)u \in \mathcal{M}'$. Dann gilt angesichts der Umkehrbarkeit von $D(g)$, dass für alle $g \in G$ $D(g)\mathcal{M}' = \mathcal{M}'$ und es folgt $\forall g \in G, u \in \mathcal{M}', v \in \mathcal{M}'^\perp$ $(D(g)u, D(g)v) = (u, D^{-1}(g)D(g)v) = (u, v) = 0 \Rightarrow D(g)v \in \mathcal{M}'^\perp$. (In diesem Argument haben wir bewusst auf die Benutzung der Darstellungseigenschaft (3.10) verzichtet, die ein alternatives Argument möglich machen würde.)

- (b) Ist \mathcal{M}' ein invarianter Unterraum, dann gilt das nach (a) auch für \mathcal{M}'^\perp und $\mathcal{M} = \mathcal{M}' + \mathcal{M}'^\perp$. Falls einer der beiden Unterräume nicht irreduzibel ist, wendet man das gleiche Verfahren auf ihn an. Da dabei die Dimension der Unterräume immer abnimmt, endet das Verfahren nach endlich vielen Schritten, weil eindimensionale invariante Unterräume irreduzibel sind. \square

Nach diesem Satz ist auch jede lineare Darstellung vollreduzibel, in deren Äquivalenzklasse mindestens eine unitäre Darstellung liegt. Dies eröffnet eine Möglichkeit, Darstellungen als vollreduzibel nachzuweisen, indem man die Äquivalenz zu einer unitären Darstellung zeigt. Ein solcher Nachweis macht, wie wir sehen werden, wesentlichen Gebrauch von der Möglichkeit, für komplexwertige Funktionen $\Phi(g)$ auf einer Gruppe G ein **lineares, normiertes, positives und auf der Gruppe invariantes Mittelwertfunktional**

$$\langle \Phi(h) \rangle_{h \in G} = \langle \Phi(gh) \rangle_{h \in G} = \langle \Phi(hg) \rangle_{h \in G} \quad (\forall g \in G), \quad \langle 1(h) \rangle_{h \in G} = 1 \quad (3.15)$$

zu bilden. Wir werden Gruppenfunktionale mit diesen Eigenschaften **homogene Maße** nennen. Positivität bedeutet, dass $\langle \Phi(h) \rangle_{h \in G} > 0$ für positive Funktionen $\Phi(h) > 0$. Ein solcher Mittelwert lässt sich allerdings in voller Allgemeinheit nur für **endliche Gruppen** G der Ordnung n_G durch die sehr suggestive Definition

$$\langle \Phi(h) \rangle_{h \in G} = \frac{1}{n_G} \sum_{h \in G} \Phi(h). \quad (3.16)$$

definieren. Wir beweisen nun unter Nutzung des Mittelwertfunktional (3.16) zunächst den wichtigen

Satz 3.6 von Schur–Auerbach:

Für Gruppen, die ein homogenes Maß (3.15) besitzen, enthält jede Klasse äquivalenter linearer Darstellungen eine unitäre Darstellung.

Beweis:

Sei $D(g)$ die betrachtete Darstellung. Der Beweis des Satzes gelingt durch Konstruktion einer affinen Transformationsmatrix A , die alle $D(g)$ simultan unitär macht. Wir benutzen dazu die mit dem Mittelwert (3.15) gebildete Matrix

$$D = \langle D^\dagger(g)D(g) \rangle_{g \in G}, \quad (3.17)$$

die hermitesch und positiv definit ist. Aus dieser Matrix kann man daher die hermitesche positiv definite Wurzel A ziehen mit $A^2 = D$. Wir bilden die äquivalente Darstellung $C(g) = AD(g)A^{-1}$ und beweisen deren Unitarität durch

$$\begin{aligned} C^\dagger(g)C(g) &= (A^{-1}D^\dagger(g)A)(AD(g)A^{-1}) = A^{-1}D^\dagger(g)DD(g)A^{-1} \\ &= A^{-1}\langle D^\dagger(g)D^\dagger(h)D(h)D(g) \rangle_{h \in G}A^{-1} \\ &= A^{-1}\langle D^\dagger(hg)D(hg) \rangle_{h \in G}A^{-1} = A^{-1}DA^{-1} = E. \quad \square \end{aligned} \quad (3.18)$$

Der obige Beweis gilt nach (3.16) insbesondere für alle endlichen Gruppen. Aus den Sätzen 3.5 und 3.6 ergibt sich unmittelbar der folgende

Satz 3.7:

Jede lineare Darstellung einer Gruppe mit homogenem Maß ist vollreduzibel.

Um zu zeigen, dass Satz 3.7 tatsächlich nicht für beliebige unendliche Gruppen gültig ist, betrachten wir die **additive Gruppe der ganzen Zahlen** als einfaches Gegenbeispiel. Die zweidimensionale Darstellung, die jeder ganzen Zahl x die Matrix

$$D(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (D(x)D(y) = D(x+y)) \quad (3.19)$$

zuordnet, ist nach (3.3) reduzibel. Sie ist jedoch nicht vollreduzibel, weil die Gleichung

$$D(x) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + xb \\ b \end{pmatrix} = d_x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

nur einen einzigen invarianten Unterraum für $b = 0$ liefert.

Wir denken uns jetzt die Menge aller irreduziblen Darstellungen einer Gruppe G in Klassen äquivalenter Darstellungen zerlegt. In jeder solchen Klasse gibt es mindestens eine unitäre. Indem wir aus jeder Klasse eine solche auswählen, erhalten

wir ein **vollständiges System $D^{(\nu)}$ von inäquivalenten, unitären irreduziblen Darstellungen der Gruppe G** . Dieses System ist vollständig in dem Sinne, dass man bis auf Äquivalenz jede Darstellung von G aus den Darstellungen $D^{(\nu)}(g)$ durch Bilden einer direkten Summe wie in Gleichung (3.4) zusammensetzen kann.

Die nächsten zu beantwortenden Fragen sind die nach der Anzahl der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen und nach der Eindeutigkeit der Zerlegung einer beliebigen Darstellung in irreduzible. Wir beschränken die Diskussion im folgenden auf **endliche Gruppen**. Um solche Fragen angehen zu können, betrachten wir die Elemente $D_{\rho\sigma}(g)$ einer Darstellung als komplexwertige Funktionen auf der Gruppe G . **Die Menge aller komplexwertigen Funktionen auf G bildet einen n_G -dimensionalen Vektorraum \mathcal{M}_G** . Auf diesem definieren wir unter Benutzung des Maßes (3.15) das positiv definite hermitesche **Skalarprodukt**

$$\boxed{(\Phi, \Psi) = \frac{1}{n_G} \sum_{h \in G} \Phi(h) \Psi^*(h) = \langle \Phi(h) \Psi^*(h) \rangle_{h \in G},} \quad (3.21)$$

mit dem man dem Raum \mathcal{M}_G eine Metrik aufprägt, d.h. eine Orthogonalität von Funktionen Φ und Ψ und die Norm einer Funktion Φ definieren kann. Eine orthonormierte Basis $\varphi_\sigma(h)$ von \mathcal{M}_G hat die Eigenschaft

$$\boxed{(\varphi_\rho, \varphi_\sigma) = \delta_{\rho, \sigma}} \quad (3.22)$$

der Orthonormierung und erfüllt die Vollständigkeitsrelation

$$\boxed{\frac{1}{n_G} \sum_\rho \varphi_\rho^*(g) \varphi_\rho(h) = \delta_{g, h} \quad (g, h \in G).} \quad (3.23)$$

Das Skalarprodukt (3.21) ermöglicht nun den Beweis des

Satzes 3.8:

Die Matrixelemente $D_{\rho\sigma}^{(\nu)}(g)$ eines vollständigen Systems inäquivalenter, unitärer irreduzibler Darstellungen einer endlichen Gruppe G bilden ein orthogonales Funktionensystem auf G . In Formeln bedeutet das

$$\boxed{(D_{\rho\sigma}^{(\nu)}, D_{\tau\omega}^{(\mu)}) = \frac{1}{s^{(\nu)}} \delta_{\nu, \mu} \delta_{\rho, \tau} \delta_{\sigma, \omega},} \quad (3.24)$$

wobei $s^{(\nu)}$ die Dimension der Darstellung $D^{(\nu)}$ ist.

Beweis:

- (a) Sei C eine beliebige $(s^{(\nu)}, s^{(\mu)})$ -Matrix. Dann ist die Matrix

$$A = \langle D^{(\nu)}(h) C D^{(\mu)}(h^{-1}) \rangle_{h \in G} = \langle D^{(\nu)}(h) C D^{(\mu)\dagger}(h) \rangle_{h \in G}$$

eine gleichartige Matrix mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} D^{(\nu)}(g) A &= \langle D^{(\nu)}(gh) C D^{(\mu)}(h^{-1}) \rangle_{h \in G} \\ &\stackrel{(j=gh)}{=} \langle D^{(\nu)}(j) C D^{(\mu)}(j^{-1}) D^{(\mu)}(g) \rangle_{j \in G} \\ &= A D^{(\mu)}(g) \quad (\text{für alle } g \in G) \end{aligned}$$

- (b) Sei $\nu \neq \mu$, dann sind $D^{(\nu)}$ und $D^{(\mu)}$ inäquivalent und nach dem Schurschen Lemma (3.1) ist $A = 0$. Spezifizieren wir nun die beliebige Matrix C als $C_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha,\sigma}\delta_{\beta,\omega}$, dann stellt die Gleichung $A_{\rho\tau} = (D_{\rho\sigma}^{(\nu)}, D_{\tau\omega}^{(\mu)*}) = 0$ gerade die Behauptung für $\nu \neq \mu$ dar.
- (c) Sei $\nu = \mu$, dann folgt nach Satz (3.2) $A = \alpha E$. Zur Bestimmung des Faktors α bilden wir die Spur

$$\text{Sp}A = \frac{1}{n_G} \sum_{h \in G} \text{Sp}(D^{(\nu)}(h)CD^{(\nu)}(h^{-1})) = \text{Sp}C,$$

wobei wir die zyklische Vertauschbarkeit der Matrizen unter der Spur benutzt haben. Es gilt also $\text{Sp}C = \alpha \cdot s^{(\nu)}$. Spezifizieren wir die Matrix C wie für $\nu \neq \mu$, so erhalten wir $\alpha = \delta_{\sigma,\omega}/s^{(\nu)}$ und $A_{\rho\tau} = \alpha\delta_{\rho,\tau} = \delta_{\rho,\tau}\delta_{\sigma,\omega}/s^{(\nu)}$ und damit die Behauptung für $\nu = \mu$. \square

Da die Dimension des Funktionenraums \mathcal{M}_G gleich der Ordnung n_G der Gruppe G ist und eine Darstellungsmatrix $D^{(\nu)}$ $s^{(\nu)2}$ Komponenten hat, die Elemente von \mathcal{M}_G sind, folgt aus der Orthogonalität (3.24) die Ungleichung $\sum_{\nu} s^{(\nu)2} \leq n_G$. Angesichts dessen liegt die Vermutung nahe, dass ein vollständiges System unitärer irreduzibler Darstellungen eine Basis im Raum \mathcal{M}_G der komplexwertigen Funktionen auf einer endlichen Gruppe bildet. Tatsächlich gilt der

Satz 3.9:

Die Komponenten $D_{\rho\sigma}^{(\nu)}(g)$ eines vollständigen Systems unitärer irreduzibler Darstellungen einer endlichen Gruppe G bilden eine Basis des Funktionenraumes \mathcal{M}_G , d.h. jede Funktion auf der Gruppe lässt sich eindeutig darstellen als

$$\Phi(g) = \sum_{\nu} s^{(\nu)} \sum_{\rho,\sigma=1}^{s^{(\nu)}} \alpha_{\rho\sigma}^{(\nu)} D_{\rho\sigma}^{(\nu)}(g), \quad (3.25)$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten mit (3.24) durch die Formel

$$\alpha_{\rho\sigma}^{(\nu)} = (\Phi, D_{\rho\sigma}^{(\nu)}) \quad (3.26)$$

gegeben sind.

Beweis:

Der Beweis gelingt durch Betrachtung der **regulären Darstellung** der Gruppe G (siehe auch (1.8)), die jedem Element $g \in G$ die lineare Abbildung

$$T_{\text{reg}}(g) : \mathcal{M}_G \ni \Phi(h) \xrightarrow{T_{\text{reg}}(g)} \Phi(hg) = \Psi(h) \in \mathcal{M}_G \quad (3.27)$$

auf dem Funktionenraum \mathcal{M}_G zuordnet. Die Darstellungseigenschaft (3.10) der durch (3.27) definierten Abbildung folgt aus

$$T_{\text{reg}}(g)T_{\text{reg}}(h)\Phi(j) = T_{\text{reg}}(g)\Phi(jh) \stackrel{\Phi(jh) = \psi(j)}{=} \psi(jg) = \Phi(jgh) = T_{\text{reg}}(gh)\Phi(j).$$

Da die Darstellung (3.27) vollreduzibel ist und da jede Äquivalenzklasse irreduzibler Darstellungen eine unitäre enthält, kann man durch geeignete Wahl einer Basis $\{\varphi_\sigma\}_{\sigma=1}^N$ in \mathcal{M}_G die Darstellungsmatrizen

$$D_{\rho\sigma}^{\text{reg}}(g) = (T_{\text{reg}}(g)\varphi_\sigma, \varphi_\rho) \quad (3.28)$$

auf Blockdiagonalgestalt bringen, sodass die einzelnen Blöcke durch die unitären irreduziblen Matrizen $D^{(\nu)}(g)$ gegeben sind. Indem wir die Basisfunktionen entsprechend der Blockeinteilung in $\{\varphi_\sigma^{(\nu)}\}_{\sigma=1}^{s^{(\nu)}}$ umbenennen, erhalten wir aus (3.28) unter Benutzung der Vollständigkeitsrelation (3.23) für einen Block ν die Gleichung

$$\varphi_\sigma^{(\nu)}(hg) = \sum_{\rho=1}^{s^{(\nu)}} D_{\rho\sigma}^{(\nu)}(g)\varphi_\rho^{(\nu)}(h). \quad (3.29)$$

Für $g = e$ sagt uns diese Gleichung, dass jede der Basisfunktionen φ_σ eine Linearkombination der Funktionen $D_{\rho\sigma}^{(\nu)}$ ist. Wegen der Vollständigkeit der Basis ist das nur möglich, wenn die Funktionen $D_{\rho\sigma}^{(\nu)}$ ebenfalls ein vollständiges System bilden. Die Gleichung (3.26) für die Entwicklungskoeffizienten folgt unter Benutzung von (3.24) unmittelbar aus (3.25). \square

Bemerkung:

Die Orthogonalität in (3.24) und damit die Vollständigkeit gilt auch für die Matricelemente nichtunitärer Darstellungen.

Mit den Sätzen 3.5 bis 3.9 haben wir ein **Fundament für die Darstellungstheorie endlicher Gruppen** gelegt.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3.9 ist der

Satz von Burnside 3.10:

Die Summe der Quadrate der Dimensionen $s^{(\nu)}$ eines vollständigen Systems inäquivalenter irreduzibler Darstellungen einer Gruppe ist gleich der Ordnung n_G der Gruppe,

$$\boxed{\sum_{\nu} s^{(\nu)2} = n_G.} \quad \square \quad (3.30)$$

Klassenfunktionen und Charaktere

Die verschiedenen Darstellungen in einer Klasse äquivalenter Darstellungen haben gemeinsame Eigenschaften. So sind z.B. die Eigenwerte jeder Matrix $D(g)$ invariant beim Übergang zu einer äquivalenten Matrix $C(g) = AD(g)A^{-1}$. Dies legt die Frage nahe, ob es gewisse Invarianten gibt, durch die man eine Klasse äquivalenter Darstellungen charakterisieren kann. Tatsächlich gibt es solche und es genügt dazu sogar die Summe der Eigenwerte. Wir definieren daher den Begriff des

Charakter einer Darstellung:

Unter dem Charakter einer Darstellung $D(g)$ versteht man die Spuren der Darstellungsmatrizen, d.h. die Gruppenfunktion $\chi(g) = \text{Sp}D(g)$.

Wir zählen im folgenden wichtige Eigenschaften der Charaktere auf.

1. Die Charaktere **äquivalenter Darstellungen** sind gleich, d.h. es gilt die Implikation

$$\forall g \in G : C(g) = AD(g)A^{-1} \Rightarrow \chi_C(g) \equiv \chi_D(g). \quad (3.31)$$

2. Die Charaktere zueinander inverser Gruppenelemente sind komplex konjugiert zueinander,

$$\boxed{\chi(g^{-1}) = \chi^*(g)}, \quad (3.32)$$

weil $D(g^{-1}) = D^\dagger(g)$ für unitäres D .

3. Die Charaktere der **irreduziblen Darstellungen** $D^{(\nu)}(g)$ nennen wir **primitive Charaktere** und bezeichnen sie mit $\chi^{(\nu)}(g)$. Sie haben die **Orthonormierungseigenschaft**

$$\boxed{(\chi^{(\nu)}, \chi^{(\mu)}) = \delta_{\nu,\mu}}. \quad (3.33)$$

Beweis:

Nach Satz 3.8 gilt $(\chi^{(\nu)}, \chi^{(\mu)}) = \sum_{\rho,\tau} (D_{\rho\rho}^{(\nu)}, D_{\tau\tau}^{(\mu)}) = \delta_{\nu,\mu} \sum_{\rho=1}^{s^{(\nu)}} 1/s^{(\nu)} = \delta_{\nu,\mu}$.

4. Wir betrachten die **Zerlegung einer beliebigen Darstellung** einer Gruppe in irreduzible Darstellungen. Dann gilt

$$\boxed{\chi(g) = \sum_{\nu} m^{(\nu)} \chi^{(\nu)}(g)}, \quad (3.34)$$

wobei die ganzzahligen Koeffizienten $m^{(\nu)} \geq 0$ angeben, wie oft Darstellungen aus der ν -ten Äquivalenzklasse irreduzibler Darstellungen in der Zerlegung vorkommen. Aus Gleichung (3.33) folgt dann die Formel

$$\boxed{m^{(\nu)} = (\chi, \chi^{(\nu)})}. \quad (3.35)$$

Dies impliziert zwei wesentliche Folgerungen:

(a) Die **Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Darstellungen**, da die Zahlen $m^{(\nu)}$ die **Vielfachheiten** der irreduziblen Darstellungen eindeutig festlegen.

(b) Darstellungen mit gleichen Vielfachheiten sind äquivalent. Daraus folgt

Satz 3.11:

Die Charaktere $\chi(g)$ charakterisieren eine Klasse äquivalenter Darstellungen $D(g)$ eindeutig. \square

5. **Kriterium für Reduzibilität:** Anhand der aus (3.33) und (3.34) folgenden Gleichung

$$\boxed{(\chi, \chi) = \sum_{\nu} m^{(\nu)2}} \quad (3.36)$$

kann man aus den Charakteren $\chi(g)$ einer Darstellung unmittelbar ablesen, ob die Darstellung irreduzibel ist, $(\chi, \chi) = 1$, oder reduzibel, $(\chi, \chi) > 1$.

6. Wir definieren im Raum \mathcal{M}_G den Begriff **Klassenfunktionen** als alle Funktionen mit der Eigenschaft

$$\varphi(hgh^{-1}) = \varphi(g) \quad (\forall g, h \in G). \quad (3.37)$$

Charaktere sind Klassenfunktionen, d.h. sie sind konstant auf jeder Klasse konjugierter Elemente der Gruppe wegen

$$\chi(hgh^{-1}) = \text{Sp}D(hgh^{-1}) = \text{Sp}(D(h)D(g)D(h^{-1})) = \text{Sp}D(g) = \chi(g).$$

7. Die Menge aller Klassenfunktionen bildet einen Unterraum in \mathcal{M}_G , den wir \mathcal{M}_G^K nennen und dessen Dimension offenbar gleich der Anzahl q der Klassen ist. Für diesen **Unterraum der Klassenfunktionen** gilt der

Satz 3.12:

Die Charaktere $\chi^{(\nu)}(g)$ eines vollständigen Systems inäquivalenter irreduzibler Darstellungen bilden eine Basis des Unterraums \mathcal{M}_G^K aller Klassenfunktionen. Damit ist die Zahl der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen einer Gruppe gleich der Zahl q ihrer Klassen.

Beweis:

Wir berechnen die Koeffizienten der Entwicklung einer beliebigen Klassenfunktion $\varphi(g)$

$$\begin{aligned} \alpha_{\rho\sigma}^{(\nu)} &\stackrel{(3.25)}{=} (\varphi, D_{\rho\sigma}^{(\nu)}) \stackrel{\forall h}{=} \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \varphi(hgh^{-1}) D_{\rho\sigma}^{(\nu)*}(hgh^{-1}) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{g, h \in G} \varphi(g) \sum_{\tau, \omega} D_{\rho\tau}^{(\nu)*}(h) D_{\tau\omega}^{(\nu)*}(g) D_{\sigma\omega}^{(\nu)}(h) \\ &\stackrel{(3.21)}{=} \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \varphi(g) \sum_{\tau, \omega} D_{\tau\omega}^{(\nu)*}(g) (D_{\sigma\omega}^{(\nu)}, D_{\rho\tau}^{(\nu)}) \\ &\stackrel{(3.24)}{=} \frac{\delta_{\rho, \sigma}}{s^{(\nu)}} \cdot \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \varphi(g) \chi^{(\nu)*}(g) \stackrel{(3.21)}{=} \frac{\delta_{\rho, \sigma}}{s^{(\nu)}} \cdot (\varphi, \chi^{(\nu)}) \end{aligned}$$

und erhalten folglich für die **Entwicklung einer Klassenfunktion**

$$\varphi(g) \stackrel{(3.25)}{=} \sum_{\nu} s^{(\nu)} \sum_{\rho, \sigma} \alpha_{\rho\sigma}^{(\nu)} D_{\rho\sigma}^{(\nu)}(g) = \sum_{\nu} (\varphi, \chi^{(\nu)}) \chi^{(\nu)}(g). \quad (3.38)$$

Dies beweist die behauptete Vollständigkeit und damit die letzte Behauptung des Satzes. \square

8. **Klassen und Charaktere:** Seien $K_1 = \{e\}, K_2, \dots, K_q$ die Klassen einer endlichen Gruppe und n_{κ} die Zahl der Elemente der Klasse K_{κ} . Wir nummerieren die irreduziblen Darstellungen $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \dots, \chi^{(q)}$ nach nichtfallender Dimension $s^{(\nu)}$ durch, wobei wir immer mit der eindimensionalen identischen

Darstellung $D^{(1)}(g) = 1$ beginnen und die Charaktere der Klasse κ mit $\chi_\kappa^{(\nu)}$ bezeichnen. In dieser Notation schreibt sich die Orthonormierungsgleichung (3.33) als

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^q n_\kappa \chi_\kappa^{(\nu)} \chi_\kappa^{(\mu)*} = \delta_{\nu,\mu}.} \quad (3.39)$$

Dies impliziert die Unitarität der Matrix $\xi_\kappa^{(\nu)} = \sqrt{n_\kappa/N} \chi_\kappa^{(\nu)}$, aus der eine zweite Relation

$$\boxed{\frac{n_\kappa}{N} \sum_{\nu=1}^q \chi_\kappa^{(\nu)} \chi_\lambda^{(\nu)*} = \delta_{\kappa,\lambda}} \quad (3.40)$$

folgt, die Ausdruck der Vollständigkeit (3.38) der Charaktere als Basis des Unterraums der Klassenfunktionen \mathcal{M}_G^K ist.

Mit den oben formulierten Konventionen stellt man die Charaktere der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe in einer **Charaktertafel** zusammen, wie in der folgenden Tabelle gezeigt.

Tabelle 3.1: Charaktertafel irreduzibler Darstellungen

	K_1	K_2	K_3	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	K_q
	1	n_2	n_3	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	n_q
Γ_1	1	1	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	1
Γ_2	$s^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	$\chi_q^{(2)}$
Γ_3	$s^{(3)}$	$\chi_2^{(3)}$	$\chi_3^{(3)}$	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	$\chi_q^{(3)}$
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
Γ_q	$s^{(q)}$	$\chi_2^{(q)}$	$\chi_3^{(q)}$	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	$\chi_q^{(q)}$

8. Dass Charaktere nicht beliebige komplexe Zahlen sein können, zeigt der

Satz 3.13:

Die Charaktere der Darstellungen endlicher Gruppen sind Summen von Einheitswurzeln (siehe Gleichung (A.2))

$$\chi(g) = \sum_{\sigma=1}^s \zeta_{m(g)}^{n_\sigma} \quad (\zeta_{m(g)} = e^{2\pi i/m(g)}), \quad (3.41)$$

wo s die Dimension der Darstellung und $m(g)$ die Ordnung von g ist und n_σ natürliche Zahlen sind.

Beweis:

In endlichen Gruppen G hat jedes Element g endliche Ordnung, d.h. es gilt $g^m = e$ mit einer natürlichen Zahl m . Die Matrizen einer Darstellung $D(g)$ haben daher die Eigenschaft $D^m(g) = E$, sodass alle ihre Eigenwerte λ wegen $\lambda^m = 1$ Einheitswurzeln sind. \square

Zerlegung der regulären Darstellung

Hinter dem Satz von Burnside steht eine allgemeine Regel über die Vielfachheiten $m_{\text{reg}}^{(\nu)}$, mit denen die irreduziblen Darstellungen in der regulären Darstellung (3.27) enthalten sind. Um diese Regel zu finden, wählen wir als Basis des Funktionenraumes \mathcal{M}_G das nach (3.22) orthonormierte System $\varphi_j(h) = \sqrt{N} \delta_{j,h}$, wo der Index j die N Elemente der Gruppe G durchläuft. Die reguläre Darstellung erzeugt dann die Basisbilder $T_{\text{reg}}(g)\varphi_j(h) = \varphi_j(hg) = \sqrt{N} \delta_{j,hg}$ und damit nach (3.28) die Darstellungsmatrix

$$D_{kj}^{\text{reg}}(g) = \sum_{h \in G} \delta_{j,hg} \delta_{k,h} = \delta_{j,kg}. \quad (3.42)$$

Daraus ergeben sich die Charaktere

$$\chi_{\text{reg}}(g) = N \cdot \delta_{g,e}. \quad (3.43)$$

Jetzt zeigt sich, dass man die Vielfachheiten $m_{\text{reg}}^{(\nu)}$ mittels der Gleichung (3.35) berechnen kann, ohne viel über die Charaktere der irreduziblen Darstellungen zu wissen. Es genügt, anhand von (3.11) den **Charakter des Einselements**

$$\chi^{(\nu)}(e) = s^{(\nu)} \quad (3.44)$$

zu kennen und man erhält

$$m_{\text{reg}}^{(\nu)} = s^{(\nu)}, \quad (3.45)$$

womit sofort der Satz von Burnside folgt. Wir halten das Ergebnis fest als

Satz 3.14:

Die reguläre Darstellung $T_{\text{reg}}(g)$ einer endlichen Gruppe G enthält jede ihrer s -dimensionalen irreduziblen Darstellungen mit der Vielfachheit s . \square

Die konjugierte Darstellung

Zu jeder Darstellung D einer Gruppe G kann man eine **konjugierte Darstellung**

$$\tilde{D}(g) = D^*(g) \quad (\forall g \in G), \quad (3.46)$$

eine **transponierte Darstellung**

$$D^{(t)}(g) = D^t(g^{-1}) \quad (\forall g \in G) \quad (3.47)$$

und eine **adjungierte Darstellung**

$$D^{(\dagger)}(g) = D^\dagger(g^{-1}) \quad (\forall g \in G) \quad (3.48)$$

definieren. Dass diese wirklich Darstellungen der Gruppe G sind, ergibt sich z.B. aus $D^{(t)}(g)D^{(t)}(h) = D^t(g^{-1})D^t(h^{-1}) = D^t(h^{-1}g^{-1}) = D^{(t)}(gh)$. Wenn man mit $AD(g)A^{-1} = U(g)$ eine zu D äquivalente unitäre Darstellung erhält,

folgt wegen $(A^\dagger)^{-1}D^\dagger(g^{-1})A^\dagger = U^\dagger(g^{-1}) = U(g)$, dass die adjungierte Darstellung äquivalent zu D ist und daher nichts Neues darstellt. Analog gilt mit $A^*D^*(g)(A^*)^{-1} = U^*(g)$ die Beziehung $(A^t)^{-1}D^t(g^{-1})A^t = U^t(g^{-1}) = U^*(g)$, sodass die konjugierte und die transponierte Darstellung zueinander äquivalent sind. Konjugation ist eine reziproke Beziehung, d.h. zueinander konjugierte Darstellungen bilden Paare. Wegen $C(g) = AD(g)A^{-1} \Rightarrow \tilde{C}(g) = \tilde{A}^{-1}\tilde{D}(g)\tilde{A}$ sind die konjugierten Darstellungen äquivalenter Darstellungen auch wieder konjugiert zueinander. Daher kann man von zueinander konjugierten Klassen von Darstellungen sprechen. Man nennt die entsprechende Äquivalenzklasse von Darstellungen die **konjugierte Darstellung** und bezeichnet sie mit \tilde{D} .

Da in jeder Klasse äquivalenter Darstellungen endlicher Gruppen eine unitäre liegt, folgt für die **Charaktere konjugierter Darstellungen** ganz allgemein

$$\tilde{\chi}(g) = \chi^*(g). \quad (3.49)$$

Es ist nun möglich, dass eine Darstellung äquivalent zu ihrer konjugierten Darstellung ist. Solche Darstellungen (und ihre Äquivalenzklassen) nennt man **selbstkonjugiert**. Angesichts des Satzes 3.11 folgt daraus

Satz 3.15:

Eine Klasse äquivalenter Darstellungen ist selbstkonjugiert genau dann, wenn ihre Charaktere reell sind. \square

Eine selbstkonjugierte Darstellung kann äquivalent zu einer Darstellung mit lauter reellen Matrizen sein. Eine solche Darstellung nennt man eine **reelle Darstellung** oder eine **Darstellung von erster Art**. Alle anderen selbstkonjugierten Darstellungen nennt man **nichtreelle selbstkonjugierte Darstellungen** oder **Darstellungen von zweiter Art**. Nicht selbstkonjugierte Darstellungen nennt man schließlich auch **Darstellungen von dritter Art**.

Wir betrachten eine **nicht selbstkonjugierte irreduzible Darstellung** $D(g)$. Deren konjugierte Darstellung $\tilde{D}(g)$ ist wegen $(\chi, \chi) = (\tilde{\chi}, \tilde{\chi}) = 1$ dann ebenfalls irreduzibel. Daher treten nicht selbstkonjugierte irreduzible Darstellungen unter den irreduziblen Darstellungen einer Gruppe stets zusammen mit ihrer konjugierten auf. Diese beiden Darstellungen können nicht durch lauter Matrizen mit reellen Elementen repräsentiert werden.

Die Selbstkonjugiertheit einer Darstellung ist an den reellen Charakteren zu erkennen. Ob eine selbstkonjugierte Darstellung reell oder nichtreell ist, verraten die Charaktere allein jedoch nicht. Ein **Kriterium für die Art der konjugierten Darstellung** und weitere Aussagen über selbstkonjugierte Darstellungen liefert der folgende

Satz 3.16:

- (a) Für eine irreduzible Darstellung $D(g)$ einer Gruppe G der Ordnung n_G gilt das Kriterium

$$\frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = \begin{cases} 1 & (G \text{ selbstkonjugiert reell}) \\ -1 & (G \text{ selbstkonjugiert nichtreell}) \\ 0 & (G \text{ nicht selbstkonjugiert}). \end{cases} \quad (3.50)$$

- (b) Die Darstellung $D(g)$ kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit als unitär angenommen werden. Wenn $D(g)$ selbstkonjugiert ist, $\tilde{D}(g) = AD(g)A^{-1}$, so ist A bis auf eine Skalentransformation unitär und kann durch die unitäre Transformation $U = A/\sqrt{A^\dagger A}$ ersetzt werden.
- (c) $D(g)$ ist genau dann selbstkonjugiert reell, wenn $U = U^t$, und U ist dann reell orthogonal.
- (d) Wenn $D(g)$ selbstkonjugiert nichtreell ist, gilt $U = -U^t$ und die Dimension s von $D(g)$ ist gerade.

Bemerkung:

Offenbar muss man für dieses Kriterium außer den Charakteren der Gruppe die **Diagonale der Gruppentafel** kennen, aus der für alle Elemente $g \in G$ die Quadrate g^2 zu entnehmen sind.

Beweis:

- Für den Beweis können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, die Darstellung $D(g)$ und ihre konjugierte $\tilde{D}(g) = D^*(g)$ seien unitär.
- Die dritte Alternative des Kriteriums braucht man nicht wirklich, weil **nicht selbstkonjugierte Darstellungen** schon anhand ihrer Charaktere zu erkennen sind. Wir rechnen der Vollständigkeit halber aber doch für die nicht selbstkonjugierte Darstellung $D(g)$

$$\begin{aligned} \langle \chi(g^2) \rangle_{g \in G} &= \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \text{Sp} D^2(g) = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \text{Sp}(D(g)\tilde{D}^*(g)) \\ &= \sum_{\rho\sigma} (D_{\rho\sigma}, \tilde{D}_{\sigma\rho}) \stackrel{(3.24)}{=} 0. \end{aligned}$$

- Sei jetzt also $D(g)$ **selbstkonjugiert**, dann gibt es eine Matrix A , mit der

$$(\alpha) \quad \tilde{D}(g) = AD(g)A^{-1}$$

gilt. Wir wollen aus (α) auf Eigenschaften der Matrix A schließen. Durch Adjungieren und Invertieren von (α) folgt

$$(\beta) \quad \tilde{D}(g) = (A^\dagger)^{-1}D(g)A^\dagger.$$

Nach Gleichsetzen der beiden rechten Seiten von (α) und (β) erhält man $A^\dagger AD(g) = D(g)A^\dagger A$, woraus mit Satz 3.2

$$(\gamma) \quad A^\dagger A = \lambda E$$

folgt mit $\lambda > 0$ wegen der Positivität von $A^\dagger A$. Wir erkennen hier, dass A bis auf eine Skalentransformation unitär ist und daher durch die skalierte unitäre Matrix $U = A/\sqrt{\lambda}$ ersetzt werden kann. Bildet man nun das Komplexkonjugierte von (α) , so erhält man

$$(\delta) \quad D(g) = U^* \tilde{D}(g) (U^*)^{-1}$$

und nach Eliminierung von $D(g)$ aus (α) und (δ) $UU^*\tilde{D}(g) = \tilde{D}(g)UU^*$, also

$$(\epsilon) \quad UU^* = \mu^*E.$$

Aus (γ) und (ϵ) folgt dann $U^* = U^\dagger UU^* = \mu^*U^\dagger$ oder $U = \mu U^t$. Hieraus erhält man schließlich mit $U^t = \mu U$ die Aussage $U = \mu^2 U$ und daher $\mu = \pm 1$. Mit diesem Wissen rechnen wir jetzt

$$\begin{aligned} \langle \chi(g^2) \rangle_{g \in G} &= \text{Sp} D^2(g) = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \text{Sp}(D(g)U^{-1}D^*(g)U) \\ &= \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \sum_{\rho\sigma\omega\tau} D_{\rho\sigma}(g)(U^{-1})_{\sigma\omega} D_{\omega\tau}^*(g)U_{\tau\rho} \\ &= \sum_{\rho\sigma\omega\tau} (U^{-1})_{\sigma\omega} U_{\tau\rho} (D_{\rho\sigma}, D_{\omega\tau}) \stackrel{(3.24)}{=} \frac{1}{s} \text{Sp}(U^{-1}U^t) = \mu. \end{aligned}$$

- Wenn $\mu = -1$, folgt aus $\det U^t = (-1)^s \det U$, dass die Dimension s von $D(g)$ gerade sein muss. Es bleibt zu zeigen, dass $D(g)$ genau dann in einer reellen Klasse liegt, wenn $\mu = +1$.
- Wenn alle $D(g)$ reell sind, dann folgt

$$\langle \chi(g^2) \rangle_{g \in G} = \sum_{\rho\sigma} \langle D_{\rho\sigma}(g)D_{\sigma\rho}^*(g) \rangle_{g \in G} = \sum_{\rho\sigma} (D_{\rho\sigma}, D_{\sigma\rho}) = \frac{1}{s} \sum_{\rho\sigma} \delta_{\rho,\sigma} = 1$$

und daher $\mu = +1$.

- Wenn umgekehrt $\mu = +1$, d.h. $U = U^t$, dann gibt es ein $H = H^\dagger = H^t = H^*$ mit $U = e^{iH}$. Sei nun $B = e^{iH/2}$, so gilt $B^2 = U$ und $BB^* = E$. Damit ist $R(g) = BD(g)B^{-1}$ eine reelle zu $D(g)$ äquivalente Darstellung, weil $R^*(g) = B^*D^*(g)(B^*)^{-1} = B^{-1}D^*(g)B = B^{-1}UD(g)U^{-1}B = BD(g)B^{-1} = R(g)$. \square

Eindimensionale Darstellungen und Kommutatorgruppen

Jede Gruppe hat die **triviale eindimensionale Darstellung**, die jedem Gruppenelement die Zahl 1 zuordnet. Alle eindimensionalen Darstellungen einer Gruppe G kann man mittels ihrer Kommutatorgruppe G_K bestimmen. Da die Elemente eindimensionaler Darstellungen als Zahlen miteinander vertauschen und identisch mit ihren Charakteren sind, müssen die Charaktere auf G_K gleich 1 und daher auf den Restklassen von G_K ebenfalls konstant sein. Es besteht damit also eine enge Beziehung zwischen den eindimensionalen Darstellungen der Gruppe G und denen der Faktorgruppe G/G_K und es gilt offenbar der folgende

Satz 3.17:

Die Zahl der eindimensionalen irreduziblen Darstellungen einer Gruppe G ist gleich dem Index $i_{G_K} = n_G/n_{G_K}$ ihrer Kommutatorgruppe und damit ein Teiler der Gruppenordnung n_G und die Charaktere dieser Darstellungen ergeben sich aus den Darstellungen der Faktorgruppe G/G_K durch Übertragung der Charaktere auf alle Klassen in den Elementen der Faktorgruppe. \square

Aus der Kenntnis der eindimensionalen Darstellungen einer Gruppe kann man offenbar umgekehrt ihre Kommutatorgruppe bestimmen.

Satz 3.18:

Die Kommutatorgruppe einer Gruppe besteht aus allen ihren Klassen, deren Charaktere für alle eindimensionalen Darstellungen gleich 1 sind.

Berechnung von Charaktertafeln

Um die Charaktertafeln mit den Charakteren aller irreduziblen Darstellungen einer Gruppe G aufzustellen, ist es nützlich, die **Dimensionen der irreduziblen Darstellungen** zu kennen. Oft gelingt das schon mithilfe des Satzes 3.10 von Burnside, wenn die diophantische Gleichung (3.30) eine eindeutige Lösung mit ganzzahligen Dimensionen $s^{(\nu)}$ hat. In Fällen, in denen die Lösung nicht eindeutig ist, kann der Satz 3.17 weiterhelfen, der die Zahl der eindimensionalen Darstellungen als den Index der Kommutatorgruppe bestimmt.

Für eine systematische Berechnung der primitiven Charaktere braucht man die **Klassenmultiplikationskoeffizienten** aus Gleichung (1.16). Zur Aufstellung von Gleichungen für die primitiven Charaktere definieren wir zu einer beliebigen Darstellung $D^{(\Gamma)}$ **Klassenmatrizen**

$$S_{\kappa}^{(\Gamma)} = \sum_{g \in K_{\kappa}} D^{(\Gamma)}(g) \quad (\kappa = 1, \dots, q). \quad (3.51)$$

Für irreduzible Darstellungen ergibt sich dann der

Satz 3.19:

Die Klassenmatrizen der irreduziblen Darstellungen $\Gamma^{(\nu)}$ einer endlichen Gruppe G erfüllen die Beziehungen

$$S_{\kappa}^{(\nu)} S_{\lambda}^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^q h_{\kappa\lambda,\mu} S_{\mu}^{(\nu)} \quad (3.52)$$

und

$$S_{\kappa}^{(\nu)} = \lambda_{\kappa}^{(\nu)} \cdot E, \quad \lambda_{\kappa}^{(\nu)} = \frac{n_{\kappa} \chi_{\kappa}^{(\nu)}}{s^{(\nu)}}. \quad (3.53)$$

Beweis:

- Die Gleichung (3.52) ist eine unmittelbare Folgerung aus (1.16).
- Zu (3.53) beachte man, dass $S_{\kappa}^{(\nu)}$ angesichts der Definition der Klassen für alle $g \in G$ die Eigenschaft $(D^{(\nu)})^{-1}(g) S_{\kappa}^{(\nu)} D^{(\nu)}(g) = S_{\kappa}^{(\nu)}$ hat, d.h. es gilt $[S_{\kappa}^{(\nu)}, D^{(\nu)}(g)] = 0$ für alle $g \in G$. Daraus folgt mit dem Satz 3.2, dass $S_{\kappa}^{(\nu)}$ proportional zur Einheitsmatrix ist, $S_{\kappa}^{(\nu)} = \lambda_{\kappa}^{(\nu)} \cdot E$. Nach Bilden der Spur ergibt sich mit (3.51) $\text{Sp } S_{\kappa}^{(\nu)} = n_{\kappa} \chi_{\kappa}^{(\nu)} = \lambda_{\kappa}^{(\nu)} s^{(\nu)}$ und damit (3.53). \square

Eine weitere interessante Aussage über die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen enthält der

Satz 3.20:

Die Dimensionen $s^{(\nu)}$ der irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe G sind Teiler der Gruppenordnung N .

Beweis:

Der Beweis dieses Satzes erfordert Kenntnisse aus der algebraischen Zahlentheorie, insbesondere den Begriff der ganz-algebraischen Zahlen. Zur Einführung der notwendigen Begriffe und die Formulierungen und Beweise der notwendigen Sätze verweisen wir auf den Anhang A. Aus dem Satz A.3 entnehmen wir, dass sowohl die Charaktere $\chi_\kappa^{(\nu)}$ der irreduziblen Darstellungen von G wie auch die Eigenwerte $\lambda_\kappa^{(\nu)}$ der Klassenmatrizen (3.53) ganz-algebraische Zahlen sind. Da mit $\chi_\kappa^{(\nu)}$ auch $(\chi_\kappa^{(\nu)})^*$ ganz-algebraisch ist, weil die Ganzheitspolynome (A.1) reelle Koeffizienten haben, sind die Zahlen

$$\sum_{\kappa=1}^q \lambda_\kappa^{(\nu)} (\chi_\kappa^{(\nu)})^* \stackrel{(3.53)}{=} \frac{1}{s^{(\nu)}} \sum_{\kappa=1}^q n_\kappa |\chi_\kappa^{(\nu)}|^2 \stackrel{(3.39)}{=} \frac{N}{s^{(\nu)}}$$

ebenfalls ganz-algebraisch und nach Satz A.2 als rationale Zahlen sogar ganzzahlig. \square

Der Satz 3.19 führt unmittelbar zu einer Formel, die die **Basis zur Berechnung von Charaktertafeln** ist und die wir niederlegen im

Satz 3.21:

Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe G erfüllen die nichtlinearen Gleichungen

$$n_\kappa n_\lambda \chi_\kappa^{(\nu)} \chi_\lambda^{(\nu)} = s^{(\nu)} \sum_{\mu=1}^q h_{\kappa\lambda,\mu} n_\mu \chi_\mu^{(\nu)} \quad (\kappa, \lambda = 1, \dots, q). \quad (3.54)$$

Beweis durch Einsetzen von (3.53) in (3.52). \square

Aus diesen nichtlinearen Gleichungen gelingt die Berechnung der Charaktere der irreduziblen Darstellungen, wenn man deren Dimensionen aus Gleichung (3.30) eindeutig erschließen kann. Mögliche Mehrdeutigkeiten bei der Lösung der nichtlinearen Gleichungen können mittels der Orthonormierungsgleichungen (3.33) beseitigt werden.

Zerlegung reduzierbarer Darstellungen in irreduzible

Mithilfe der Charaktere der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe G kann man Projektoren $P^{(\mu)}$ konstruieren, die den Darstellungsraum \mathcal{R}_D einer reduzierbaren Darstellung D dieser Gruppe auf den Unterraum $\mathcal{R}_D^{(\mu)}$ der irreduziblen Darstellung $D^{(\mu)}$ projizieren. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Darstellung D unitär ist. Wir nehmen dann zunächst zusätzlich an, D sei mittels einer unitären Matrix U auf Blockdiagonalgestalt transformiert worden. Wir betrachten Gleichung (3.24), bilden die Spur der Matrix $D^{(\mu)}$ und erhalten dadurch die Beziehung

$$s^{(\mu)} (D_{\rho\sigma}^{(\nu)}, \chi^{(\mu)}) = \delta_{\nu,\mu} \delta_{\rho,\sigma}, \quad (3.55)$$

die uns sagt, dass die Matrix

$$\boxed{P_D^{(\mu)} = \frac{s^{(\mu)}}{N} \sum_{g \in G} \chi^{(\mu)*}(g) D(g) = \frac{s^{(\mu)}}{N} \sum_{\kappa=1}^q \chi_{\kappa}^{(\mu)*} S_{\kappa}^{(D)}} \quad (3.56)$$

in der blockdiagonalen Form der Darstellung D alle irreduziblen Darstellungen außer $D^{(\mu)}$ annulliert. Mit $S_{\kappa}^{(D)}$ haben wir nach Gleichung (3.51) die Klassenmatrizen von D bezeichnet. Wegen $(\chi^{(\mu)*}(g) D(g))^{\dagger} = \chi^{(\mu)*}(g^{-1}) D(g^{-1})$ ist der Operator $P_D^{(\mu)}$ für unitäres D hermitesch und aus (3.55) folgert man mit

$$\sum_{\tau} s^{(\mu)} (D_{\rho\tau}^{(\nu)}, \chi^{(\mu)}) \cdot s^{(\mu)} (D_{\tau\sigma}^{(\nu)}, \chi^{(\mu)}) = \delta_{\nu,\mu} \delta_{\rho,\sigma} = s^{(\mu)} (D_{\rho\sigma}^{(\nu)}, \chi^{(\mu)}) \quad (3.57)$$

die Idempotenz $(P_D^{(\mu)})^2 = P_D^{(\mu)}$, womit $P_D^{(\mu)}$ ein Projektionsoperator ist. Die verbleibende irreduzible Darstellung $D^{(\mu)}$ kann in $\mathcal{R}_D^{(\mu)}$ natürlich mehrfach enthalten sein. Die entsprechende Vielfachheit $m^{(\mu)}$ kann mit Gleichung (3.35) berechnet werden. Indem man $P_D^{(\mu)}$ auf einen beliebigen Zustand $|x\rangle$ in \mathcal{R}_D mit $P_D^{(\mu)}|x\rangle \neq 0$ anwendet, kann man für $m^{(\mu)} > 1$ durch Anwendung von $P_D^{(\mu)} D(g)$ für alle g auch irreduzible Unterräume von $\mathcal{R}_D^{(\mu)}$ konstruieren. Da die Charaktere und die Einheitsmatrix $\delta_{\rho,\sigma}$ unitär invariant sind, gilt die Gleichung (3.55) auch in der ursprünglichen unitären Form der Darstellung D , sodass auch $P_D^{(\mu)}$ mit dem ursprünglichen D gebildet werden kann. Wir halten dies fest in

Satz 3.22:

Wenn D eine beliebige unitäre Darstellung einer Gruppe G ist, projizieren die in Gleichung (3.56) definierten Projektionsoperatoren $P_D^{(\mu)}$ den Darstellungsraum \mathcal{R}_D von D auf Unterräume $\mathcal{R}_D^{(\mu)}$, auf denen D wie die irreduziblen Darstellungen $D^{(\mu)}$ von G wirken. Falls der Unterraum $\mathcal{R}_D^{(\mu)}$ die Darstellung $D^{(\mu)}$ mehrfach enthält, kann man mithilfe von $P_D^{(\mu)}$ auch seine irreduziblen Teilräume konstruieren. \square

Die Gleichung (3.57) impliziert eine interessante Identität für die Charaktere irreduzibler Darstellungen. Unter Benutzung der Definition (3.21) des Skalarprodukts formt man sie leicht um in

$$\sum_{g \in G} \left[\frac{s^{(\mu)}}{N} \sum_{h \in G} \chi^{(\mu)*}(gh^{-1}) \chi^{(\mu)*}(h) - \chi^{(\mu)*}(g) \right] D_{\rho,\sigma}^{(\nu)}(g) = 0. \quad (3.58)$$

Da die eckige Klammer senkrecht auf allen Basiselementen $D_{\rho,\sigma}^{(\nu)}$ des Funktionsraumes \mathcal{M}_G steht, folgt nach (3.26,25) ihr Verschwinden für alle $g \in G$, d.h.

$$\boxed{\frac{s^{(\mu)}}{N} \sum_{h \in G} \chi^{(\mu)}(gh^{-1}) \chi^{(\mu)}(h) = \chi^{(\mu)}(g)}. \quad (3.59)$$

Direkte und Kroneckerprodukte und Kroneckerpotenzen

Wir nehmen an, $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ seien Darstellungen der beiden Gruppen G_1 und G_2 mit den Ordnungen N_1 und N_2 . Auf dem direkten Produkt $G = G_1 \times G_2$ dieser Gruppen nach den Gleichungen (1.22) oder (1.23) können wir in Analogie zum Kroneckerprodukt (3.8) ein **direktes Produkt der beiden Darstellungen $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$** bilden durch die Formel

$$D_{(\rho,\sigma)(\rho',\sigma')}(g) = D_{\rho\rho'}^{(1)}(g_1)D_{\sigma\sigma'}^{(2)}(g_2) \quad (g = g_1g_2 \in G, g_1 \in G_1, g_2 \in G_2). \quad (3.60)$$

Mit (3.60) gilt dann für die Charaktere des direkten Produkts

$$\chi(g) = \chi^{(1)}(g_1)\chi^{(2)}(g_2) \quad (3.61)$$

und man erhält für die Skalarprodukte aus Gleichung (3.21) die Formel

$$\begin{aligned} (\chi, \chi) &= \frac{1}{N_1N_2} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = \frac{1}{N_1N_2} \sum_{g_1 \in G_1} \sum_{g_2 \in G_2} |\chi^{(1)}(g_1)\chi^{(2)}(g_2)|^2 \\ &= (\chi^{(1)}, \chi^{(1)})(\chi^{(2)}, \chi^{(2)}). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Anhand des Kriteriums (3.36) für Irreduzibilität und anhand des Satzes 3.4 folgt unmittelbar der

Satz 3.23:

- Das direkte Produkt $D = D^{(1)}D^{(2)}$ ist irreduzibel genau dann, wenn beide Faktoren irreduzibel sind.
- Zwei direkte Produkte $D^{(a)} = D^{(a1)}D^{(a2)}$ und $D^{(b)} = D^{(b1)}D^{(b2)}$ sind äquivalent genau dann, wenn sowohl $D^{(a1)}$ und $D^{(b1)}$ wie auch $D^{(a2)}$ und $D^{(b2)}$ äquivalent sind.

Mit diesem Satz gelingt es, alle irreduziblen Darstellungen eines direkten Produkts von Gruppen auf die irreduziblen Darstellungen der Faktoren zurückzuführen. Es gilt nämlich der

Satz 3.24:

Seien $D_i^{(\nu)}(g_i)$ ($i = 1, 2$) die irreduziblen Darstellungen der beiden Gruppen G_i und $\chi_i^{(\nu)}(g_i)$ deren Charaktere. Dann ergeben die nach der Formel (3.60) gebildeten direkten Produkte $D^{(\mu,\nu)}(g_1g_2) = D^{(\mu)}(g_1)D^{(\nu)}(g_2)$ alle irreduziblen Darstellungen des direkten Produkts $G = G_1 \times G_2$ und deren Charaktere sind $\chi^{(\mu,\nu)}(g_1g_2) = \chi^{(\mu)}(g_1)\chi^{(\nu)}(g_2)$.

Vom direkten Produkt zweier Darstellungen ist das **Kroneckerprodukt zweier Darstellungen** zu unterscheiden, das wie folgt definiert ist. Aus je zwei linearen Darstellungen $D^{(a)}(g)$ und $D^{(b)}(g)$ ein und derselben Gruppe G mit den Dimensionen s_a und s_b bildet man nach Gleichung (3.8) das Kroneckerprodukt

$D = D^{(a)} \otimes D^{(b)}$, das eine $s_a \cdot s_b$ -dimensionale Darstellung der Gruppe G ist. Für die Charaktere $\chi(g)$ dieser Darstellung erhält man die Formel

$$\chi(g) = \sum_{\rho, \sigma} D_{(\rho, \sigma)(\rho, \sigma)}(g) = \sum_{\rho, \sigma} D_{\rho\rho}^{(a)}(g) D_{\sigma\sigma}^{(b)}(g) = \chi^{(a)}(g) \chi^{(b)}(g). \quad (3.63)$$

Wenn die beiden Faktoren irreduzible Darstellungen der Gruppe G sind, muss das Kroneckerprodukt D nicht irreduzibel sein. Wenn $D^{(\nu)}$ ($\nu = 1, \dots, q$) alle irreduziblen Darstellungen von G sind, so lässt sich ein Produkt zweier dieser Darstellungen als direkte Summe aus den irreduziblen Darstellungen darstellen. Für die Charaktere gilt dann wie in Gleichung (3.34) die Formel

$$\chi^{(\mu)}(g) \chi^{(\nu)}(g) = \sum_{\lambda=1}^q m_{\mu\nu}^{\lambda} \chi^{(\lambda)}(g), \quad (3.64)$$

wobei die Vielfachheitskoeffizienten $m_{\mu\nu}^{\lambda}$ sich nach Gleichung (3.35) aus der Formel

$$m_{\mu\nu}^{\lambda} = (\chi^{(\mu)} \chi^{(\nu)}, \chi^{(\lambda)}) = \frac{1}{n_G} \sum_{\kappa=1}^q n_{\kappa} \chi_{\kappa}^{(\mu)} \chi_{\kappa}^{(\nu)} \chi_{\kappa}^{(\lambda)*} \quad (3.65)$$

ergeben. Die in Gleichung (3.64) enthaltene Information spielt eine wichtige Rolle für viele Anwendungen und wird in sogenannten **Multiplikationstabellen** zusammengefasst. Einige offensichtliche Eigenschaften der Vielfachheitskoeffizienten fassen wir zusammen im folgenden

Satz 3.25: (Wir bezeichnen die zu μ konjugierte irreduzible Darstellung mit $\tilde{\mu}$.)

(a) Die Vielfachheitskoeffizienten (3.65) haben die Symmetrieeigenschaften

$$m_{\mu\nu}^{\lambda} = m_{\nu\mu}^{\lambda} = m_{\tilde{\mu}\lambda}^{\nu} = m_{\tilde{\nu}\lambda}^{\mu}.$$

(b) Für die triviale irreduzible Darstellung $\mu = 1$ gilt

$$m_{1\nu}^{\lambda} = m_{\nu 1}^{\lambda} = \delta_{\nu, \lambda}, \quad m_{\mu\nu}^1 = \delta_{\mu, \tilde{\nu}}.$$

Die Matrizen D des Kroneckerproduktes $D_{(\rho, \sigma), (\tau, \omega)} = D_{\rho\tau}^{(\nu)} D_{\sigma\omega}^{(\nu)}$ zweier gleicher irreduzibler Darstellungen sind **symmetrisch unter Vertauschung der beiden Faktoren**, d.h. es gilt

$$D_{(\rho, \sigma), (\tau, \omega)} = D_{(\sigma, \rho), (\omega, \tau)} = (T_D D)_{(\rho, \sigma), (\tau, \omega)}. \quad (3.66)$$

Hier haben wir den Transpositionsoperator T_D eingeführt, der die beiden Faktoren vertauscht. Die in Gleichung (3.66) formulierte Symmetrie von D ist äquivalent zu

$$[T_D, D] = 0. \quad (3.67)$$

Mit dem Transpositionsoperator T_D kann man ein Paar komplementärer Projektoren

$$P_D^{(\pm)} = \frac{1}{2}(1 \pm T_D) \quad (3.68)$$

bilden, mit denen man den Darstellungsraum \mathcal{R}_D von D in unter der Wirkung von T_D symmetrische oder antisymmetrische Vektoren $x_{\rho,\tau}$ zerlegen kann,

$$\mathcal{R}_D = \mathcal{R}_D^{(+)} \oplus \mathcal{R}_D^{(-)}, \quad (P_D^{\pm} x)_{\rho,\tau} = \pm x_{\tau,\rho} \in \mathcal{R}_D^{(\pm)}. \quad (3.69)$$

Die Symmetrie (3.66,56) überträgt sich angesichts von Gleichung (3.56) auf die Projektionsoperatoren $P_D^{(\mu)}$, die daher ebenfalls mit T_D vertauschen, und man kann Projektoren

$$P_D^{(\mu\sigma)} = P_D^{(\mu)} \cdot P_D^{(\sigma)} \quad (\sigma = \pm) \quad (3.70)$$

definieren, die auf irreduzible Darstellungen $D^{(\mu\pm)}$ mit symmetrischem oder antisymmetrischem Darstellungsraum projizieren,

$$P_D^{(\mu\sigma)} \mathcal{R}_D = \mathcal{R}_D^{(\mu\sigma)} \quad (\sigma = \pm). \quad (3.71)$$

Unter Berücksichtigung des zusätzlichen Klassifikationsparameters σ , den wir als **Parität** bezeichnen können, ist (3.64) für $\mu = \nu$ durch die Gleichung

$$\boxed{\chi^{(\nu)}(g) \chi^{(\nu)}(g) = \sum_{\kappa=1}^q \sum_{\sigma=\pm} m_{\nu\nu}^{\kappa\sigma} \chi_{\sigma}^{(\kappa)}(g)} \quad (3.72)$$

zu ersetzen. Die Koeffizienten $m_{\nu\nu}^{\kappa\sigma}$ ergeben sich aus der Spur des Projektionsoperators zu

$$m_{\nu\nu}^{\kappa\pm} = \frac{1}{s^{(\kappa)}} \text{Sp} P_D^{(\kappa\pm)} = \frac{1}{2N} \sum_{g \in G} \chi^{(\kappa)*}(g) \left((\chi^{(\nu)}(g))^2 \pm \chi^{(\nu)}(g^2) \right). \quad (3.73)$$

Das Kroneckerprodukt eindimensionaler irreduzibler Darstellungen $D^{(\nu)}$ ergibt eine einzige eindimensionale irreduzible Darstellung, die immer symmetrisch ist.

Die Quadrate g^2 aller Elemente einer Klasse $g \in K_{\rho}$ sind Elemente ein und derselben Klasse K_{τ} . Denn mit $g \in K_{\rho}$ und $g^2 \in K_{\tau}$ gilt für alle $f = aga^{-1} \in K_{\rho}$ $f^2 = ag^2a^{-1} \in K_{\tau}$. Wir beschreiben die Beziehung zwischen den beiden Klassen durch eine Funktion $\tau = h_2(\rho)$. Mit dieser Funktion kann man die Gruppensumme in (3.73) in eine Klassensumme umwandeln und erhält

$$\boxed{m_{\nu\nu}^{\kappa\pm} = \frac{1}{2N} \sum_{\rho=1}^q n_{\rho} \chi_{\rho}^{(\kappa)*} \left((\chi_{\rho}^{(\nu)})^2 \pm \chi_{h_2(\rho)}^{(\nu)} \right)}. \quad (3.74)$$

Die linke Seite von Gleichung (3.50) kann man mittels der Funktion $h_2(\rho)$ gleichfalls in eine Klassensumme umwandeln.

In Verallgemeinerung des Kroneckerproduktes (3.63) diskutieren wir im folgenden **Kroneckerpotenzen** der irreduziblen Darstellung $D^{(\mu)}(g)$ einer Gruppe G . Die k -te Potenz $D^k(g)$ dieser Darstellung ist durch die Matrizen

$$D_{(\rho_1, \dots, \rho_k), (\sigma_1, \dots, \sigma_k)}^k(g) = D_{\rho_1 \sigma_1}^{(\mu)}(g) \cdot \dots \cdot D_{\rho_k \sigma_k}^{(\mu)}(g) \quad (3.75)$$

gegeben und wirkt auf dem Modul \mathcal{M} mit den Basiselementen $x_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k)}$. Die Darstellung D^k ist im allgemeinen reduzibel und kann wie üblich mit dem nach (3.56) gebildeten Projektor

$$P_D^{(\lambda)} = \frac{s^{(\lambda)}}{n_G} \sum_{g \in G} \chi_D^{(\lambda)*}(g) D^k(g) \quad (3.76)$$

in irreduzible Darstellungen von G zerlegt werden,

$$D^k = \sum_{\lambda=1}^{q_D} \otimes D_k^{(\lambda)}, \quad D_k^{(\lambda)} = D_1^{(\lambda)} \otimes \dots \otimes D_{m_{(k,\mu)}^{(\lambda)}}^{(\lambda)}. \quad (3.77)$$

Die Koeffizienten der Zerlegung werden mittels der Charaktere $\chi_{k,\mu}$ von D^k aus der Gleichung

$$\chi_{k,\mu}(g) = \left(\chi_D^{(\mu)}(g) \right)^k = \sum_{\lambda=1}^{q_D} m_{(k,\mu)}^{(\lambda)} \chi_D^{(\lambda)}(g), \quad m_{(k,\mu)}^{(\lambda)} = \left((\chi_D^{(\mu)})^k, \chi_D^{(\lambda)} \right) \quad (3.78)$$

bestimmt.

Wie im letzten Abschnitt kann auch hier die Frage nach einer Klassifikation der Darstellungen $D_k^{(\lambda)}$ in (3.77) unter Permutationen der k Faktoren in (3.75) aufgeworfen werden. Wir betrachten dazu eine beliebige Permutation der Koordinatenindizes (siehe Kapitel 8 zu Permutationsgruppen S_k und deren Darstellungen),

$$P(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = (\sigma_{P_1}, \dots, \sigma_{P_k}), \quad (3.79)$$

die auf dem Modul \mathcal{M} eine Darstellung Γ_k der symmetrischen Gruppe S_k erzeugt,

$$\Gamma_k(P) x_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k)} = x_{(\sigma_{P_1}, \dots, \sigma_{P_k})}. \quad (3.80)$$

Die Darstellung Γ_k kann ebenfalls mittels Projektoren

$$P_{S_k, \mathbf{l}} = \frac{s^{(\mathbf{l})}}{k!} \sum_{P \in S_k} \chi_{\mathbf{l}}^*(P) \Gamma_k(P) \quad (3.81)$$

in irreduzible Darstellungen von S_k zerlegt werden. Hier ist $s^{(\mathbf{l})}$ die Dimension der durch die Partition \mathbf{l} gekennzeichneten irreduziblen Darstellung von S_k .

Da D^k nach (3.75) in Analogie zu (3.66) invariant unter jeder Permutation der Faktoren ist, gilt für alle $g \in G$ wie in (3.67) für $k = 2$

$$[\Gamma_k(P), D^k(g)] = 0. \quad (3.82)$$

Die Vertauschbarkeit der Darstellungen überträgt sich auch auf die Projektoren (3.76) und (3.81) und beide Darstellungen können simultan in irreduzible Darstellungen von G und S_k zerlegt werden. Diese Zerlegung wird durch den Projektor

$$P_1^{(\lambda)} = P_{S_k,1} P_D^{(\lambda)} \quad (3.83)$$

realisiert, der den Darstellungsraum \mathcal{M} auf einen Unterraum $\mathcal{M}_1^{(\lambda)} = P_1^{(\lambda)} \mathcal{M}$ projiziert, auf dem die Darstellung D^k sich unter der Gruppe G wie $D^{(\lambda)}$ transformiert und unter Permutationen die Symmetrie Γ_1 besitzt. Wenn wir irreduzible Darstellungen dieser Art $D_1^{(\lambda)}$ nennen, zerfällt D^k nach der Gleichung

$$D^k = \sum_{\lambda=1}^{q_D} \sum_1 \otimes D_1^{(\lambda)}, \quad D_1^{(\lambda)} = D_{1,1}^{(\lambda)} \otimes \dots \otimes D_{1,m_{(k,\mu)}^{(\lambda,1)}}^{(\lambda)}. \quad (3.84)$$

Für die Vielfachheitskoeffizienten ergibt sich die Formel

$$m_{(k,\mu)}^{(\lambda,1)} = \frac{1}{s^{(\lambda)}} \text{Sp}_{\mathcal{M}} \left(P_1^{(\lambda)} \right) = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \chi_D^{(\lambda)*}(g) \chi_{k,1}(g). \quad (3.85)$$

Zur Berechnung der Charaktere $\chi_{k,1}(g)$ muss man die Zyklendarstellung $P = [1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, k^{m_k}]$ (D.1) der Permutationen P verwenden, mit der man für alle Permutationen P_κ aus der Klasse K_κ die Gleichung

$$\text{Sp}_{\mathcal{M}} \left(\Gamma_k(P_\kappa) D^k(g) \right) = \prod_{i=1}^k (\chi_D^{(\mu)}(g^i))^{m_i} \quad (3.86)$$

erhält. Damit ergibt sich schließlich mit (3.81)

$$\chi_{k,1}(g) = \frac{s^{(1)}}{k!} \sum_{\kappa=1}^{q_{S_k}} n_\kappa \chi_\kappa^{(1)*} \cdot \prod_{i=1}^k (\chi_D^{(\mu)}(g^i))^{m_i}. \quad (3.87)$$

Hier ist n_κ die Ordnung der Klasse K_κ , für die Gleichung (9.7) eine explizite Formel angibt, und $\chi_\kappa^{(1)}$ der Charakter der irreduziblen Darstellung $\Gamma_k(P_\kappa)$ von S_k , der in den Tabellen von Anhang C dokumentiert ist. Die Gleichungen (3.85) und (3.87) stellen die Verallgemeinerung von (3.74) auf beliebige Potenzen k dar. In den folgenden Tabellen geben wir als Beispiele die Charaktere (3.87) für $k = 3$ und $k = 4$ an, wobei wir $\chi_D^{(\mu)}$ durch χ abkürzen.

Tabelle 3.2: Charaktere $\chi_{k,1}(g)$ für $k = 3$

1	$\chi_{3,1}(g)$
[3]	$(\chi(g))^3/6 + \chi(g)\chi(g^2)/2 + \chi(g^3)/3$
[2, 1]	$2(\chi(g))^3/3 - 2\chi(g^3)/3$
1^3	$(\chi(g))^3/6 - \chi(g)\chi(g^2)/2 + \chi(g^3)/3$

Tabelle 3.3: Charaktere $\chi_{k,1}(g)$ für $k = 4$

1	$\chi_{3,1}(g)$
[4]	$(\chi(g))^4/24 + (\chi(g))^2\chi(g^2)/4 + \chi(g)\chi(g^3)/3 + (\chi(g^2))^2/8 + \chi(g^4)/4$
[3, 1]	$3(\chi(g))^4/8 + 3(\chi(g))^2\chi(g^2)/4 - 3(\chi(g^2))^2/8 - 3\chi(g^4)/4$
[2, 2]	$(\chi(g))^4/6 - 2\chi(g)\chi(g^3)/3 + (\chi(g^2))^2/2$
[2, 1 ²]	$3(\chi(g))^4/8 - 3(\chi(g))^2\chi(g^2)/4 - 3(\chi(g^2))^2/8 + 3\chi(g^4)/4$
[1 ⁴]	$(\chi(g))^4/24 - (\chi(g))^2\chi(g^2)/4 + \chi(g)\chi(g^3)/3 + (\chi(g^2))^2/8 - \chi(g^4)/4$

Subduzierte Darstellungen

Indem man eine Darstellung Γ der Gruppe G auf eine Untergruppe H der Ordnung n_H von G einschränkt, erhält man eine Darstellung $\Gamma_H^{(s)}$ von H , die man als **subduzierte Darstellung** bezeichnet. Wenn $\Gamma = \Gamma_G^{(i)}$ auf G irreduzibel ist, muss $\Gamma_H^{(i,s)}$ keinesfalls irreduzibel, sondern wird im allgemeinen reduzibel sein. Wenn wir mit $\Gamma_H^{(j)}$ ($j = 1, \dots, q_H$) die irreduziblen Darstellungen von H bezeichnen, so gilt nach Gleichung (3.34) mit nicht negativen ganzen Zahlen m_{ij} eine Beziehung (auch **erstes Frobeniustheorem** genannt)

$$\Gamma_G^{(i,s)} = \sum_{j=1}^{q_H} m_{ij} \Gamma_H^{(j)}, \quad (3.88)$$

die sich auf die Charaktere der Darstellungen überträgt,

$$\chi_G^{(i,s)} = \sum_{j=1}^{q_H} m_{ij} \chi_H^{(j)}. \quad (3.89)$$

Die Koeffizienten m_{ij} berechnen sich nach den Gleichungen (3.35,21,39) zu

$$m_{ij} = \frac{1}{n_H} \sum_{\kappa=1}^{q_H} n_{H,\kappa} \chi_{G,\kappa}^{(i,s)} \chi_{H,\kappa}^{(j)*}, \quad (3.90)$$

wenn der Index κ die Klassen von H numeriert, deren Ordnungen wir mit $n_{H,\kappa}$ bezeichnet haben. Die Zerlegungen (3.89) subduzierter Darstellungen werden auch **Kompatibilitätsbeziehungen** genannt und werden in **Kompatibilitätstabellen** zusammengefasst.

4. Die Darstellungen der endlichen Punktgruppen

In diesem Kapitel werden wir die irreduziblen Darstellungen aller endlichen Punktgruppen diskutieren und deren Charaktertafeln angeben.

Eigentliche Punktgruppen

- (1) Die **zyklischen Gruppen** C_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) haben als zyklische und damit abelsche Gruppen nach Tabelle 2.1 genau n eindimensionale irreduzible Darstellungen. Mit der Einheitswurzel ζ_n (siehe Gleichung (A.2)) und dem Winkel $\varphi_n = 2\pi/n$ hat die Charaktertafel die folgende Gestalt.

Tabelle 4.1: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von C_n

	e	$C(\varphi_n)$	$C^2(\varphi_n)$	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	$C^{n-1}(\varphi_n)$
	1	1	1	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	1
Γ_1	1	1	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	1
Γ_2	1	ζ_n	ζ_n^2	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	ζ_n^{n-1}
Γ_3	1	ζ_n^2	ζ_n^4	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	$\zeta_n^{2(n-1)}$
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
Γ_n	1	ζ_n^{n-1}	$\zeta_n^{2(n-1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	$\zeta_n^{(n-1)^2}$

- (2) Die **Diedergruppen** D_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) haben angesichts der Tabelle 2.1 für gerade und ungerade n verschiedene Charaktertafeln. In allen Fällen reicht der Satz von Burnside 3.10 zur eindeutigen Bestimmung der Dimensionen aller irreduziblen Darstellungen. Für gerade $n = 2m$ lautet die eindeutige Zerlegung (3.30) der Gruppenordnung $4m$ in $m + 3$ Quadrate $4 \times 1^2 + (m-1) \times 2^2 = 4m$ und für ungerade $n = 2m+1$ mit der Gruppenordnung $4m+2$ lautet sie bei $m+2$ Quadraten $2 \times 1^2 + m \times 2^2 = 4m+2$. Die Zahl der eindimensionalen irreduziblen Darstellungen kann man jedoch auch mittels des Satzes 3.16 aus dem Index der jeweiligen Kommutatorgruppen erschließen, der gleich 4 für gerade n und 2 für ungerade n ist. Man kann dann mit der Gleichung (3.54) die Charaktere der irreduziblen Darstellungen berechnen.

Wir wollen hier aber die irreduziblen Darstellungen durch eine elementare Betrachtung bestimmen. Sei $D(g)$ eine s -dimensionale irreduzible Darstellung der Punktgruppe D_n . Diese Darstellung ist auf der Untergruppe $g \in C_n \subset D_n$ die direkte Summe von s eindimensionalen Darstellungen aus der Tabelle 4.1. Es gibt daher einen Eigenvektor \mathbf{e}_1 mit

$$D(C(\varphi_n))\mathbf{e}_1 = \zeta_n^\nu \mathbf{e}_1. \quad (4.1)$$

Sei nun $D(u_1)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$. Dann ist $D(u_1)\mathbf{e}_2 = D(u_1^2)\mathbf{e}_1 = D(e)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, d.h. zum einen gilt

$$D(u_1)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \quad D(u_1)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \quad (4.2)$$

und wegen $D(C(\varphi_n))D(u_1) = D(u_1)D(C(-\varphi_n))$ gilt mit (4.1) zum anderen $D(C(\varphi_n))\mathbf{e}_2 = D(C(\varphi_n))D(u_1)\mathbf{e}_1 = D(u_1)\zeta_n^{-\nu}\mathbf{e}_1 = \zeta_n^{-\nu}\mathbf{e}_2$, also

$$D(C(\varphi_n))\mathbf{e}_2 = \zeta_n^{-\nu}\mathbf{e}_2. \quad (4.3)$$

Da alle Elemente von D_n durch $C^k(\varphi_n)$ und $C^k(\varphi_n)u_1$ gegeben sind, spannen die beiden Vektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 einen invarianten Unterraum des angenommenen s -dimensionalen Darstellungsraums auf.

Gilt nun $\zeta_n^\nu \neq \zeta_n^{-\nu}$, so vertauschen die Darstellungsmatrizen

$$D(C(\varphi_n)) = \begin{pmatrix} \zeta_n^\nu & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-\nu} \end{pmatrix}, \quad D(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

der beiden Erzeugenden der Gruppe D_n in der Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ nicht und wir haben daher eine ($s = 2$)-dimensionale irreduzible Darstellung. Die Bedingung $\zeta_n^\nu \neq \zeta_n^{-\nu}$ ist für gerade $n = 2m$ durch $\nu \in N_g = \{1, 2, \dots, m-1\}$ und für ungerade $n = 2m+1$ durch $\nu \in N_u = \{1, 2, \dots, m\}$ erfüllt.

Gilt jedoch $\zeta_n^\nu = \zeta_n^{-\nu}$ und dies ist für alle n mit $\nu = 0$ und für gerade $n = 2m$ zusätzlich mit $\nu = m$ erfüllt, so sind die beiden Vektoren $\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2$ simultane Eigenvektoren der beiden Matrizen (4.4) und wir erhalten 4 ($n = 2m$) bzw. 2 ($n = 2m+1$) eindimensionale Darstellungen. Die Charaktertafeln zeigen die beiden folgenden Tabellen, wobei U_u, U_g und U die in Kapitel 2 definierten Konjugationsklassen sind.

Tabelle 4.2: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von D_{2m}

	e	$C(\pm\varphi_n)$	\cdot	$C^{m-1}(\pm\varphi_n)$	$C^m(\varphi_n)$	U_u	U_g
	1	2	\cdot	2	1	m	m
Γ_1	1	1	\cdot	1	1	1	1
Γ_2	1	1	\cdot	1	1	-1	-1
Γ_3	1	-1	\cdot	$(-1)^{m-1}$	$(-1)^m$	1	-1
Γ_4	1	-1	\cdot	$(-1)^{m-1}$	$(-1)^m$	-1	1
$\Gamma_{4+\nu}$ ($\nu \in N_g$)	2	$2 \cos \frac{\pi\nu}{m}$	\cdot	$2 \cos \frac{(m-1)\pi\nu}{m}$	$2(-1)^\nu$	0	0

Tabelle 4.3: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von D_{2m+1}

	e	$C(\pm\varphi_n)$	$C^2(\pm\varphi_n)$	\cdot	$C^m(\pm\varphi_n)$	U
	1	2	2	\cdot	2	$2m+1$
Γ_1	1	1	1	\cdot	1	1
Γ_2	1	1	1	\cdot	1	-1
$\Gamma_{2+\nu}$ ($\nu \in N_u$)	2	$2 \cos \frac{2\pi\nu}{n}$	$2 \cos \frac{4\pi\nu}{n}$	\cdot	$2 \cos \frac{2m\pi\nu}{n}$	0

- (3) Die **Tetraedergruppe** T hat nach Tabelle 2.1 4 Klassen und der Satz von Burnside 3.10 ergibt auch hier die eindeutige Lösung $3 \times 1^2 + 1 \times 3^2 = 12$. Die Zahl 3 der eindimensionalen Darstellungen wird durch den Index $3 = 12/4$ der Kommutatorgruppe D_2 bestätigt. Da die Gruppe C_3 Untergruppe der Tetraedergruppe ist, ergeben sie sich aus den 3 Darstellungen dieser Gruppe, indem man die Charaktere der Klasse $\{C(\pi)\}$, die zur Kommutatorgruppe gehört, mithilfe des Satzes 3.17 als 1 ergänzt. Zur Bestimmung der dreidimensionalen irreduziblen Darstellung betrachten wir die Vektordarstellung der Tetraedergruppe. Als **Vektordarstellung** der Bewegungsgruppen bezeichnet man deren Darstellung im \mathcal{R}_3 , durch die sie definiert sind. Aus den Gleichungen (2.1) und (2.3) liest man die Werte der Charaktere $\chi(C(\varphi)) = 2 \cos \varphi + 1$ ab, die man für $\varphi = \varphi_2$ und $\varphi = \pm\varphi_3$ braucht. Mit $\chi(C(\varphi_2)) = -1$ und $\chi(C(\pm\varphi_3)) = 0$ ergibt das Irreduzibilitätskriterium (3.33) den Wert $(1 \times 3^2 + 3 \times (-1)^2 + 4 \times 0^2 + 4 \times 0^2)/12 = 1$ und belegt damit die Irreduzibilität der Vektordarstellung von T . Die Charaktertafel hat die folgende Gestalt.

Tabelle 4.4: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von T

	e	$C(\varphi_2)$	$C(\varphi_3)$	$C(-\varphi_3)$
	1	3	4	4
Γ_1	1	1	1	1
Γ_2	1	1	ζ_3	ζ_3^2
Γ_3	1	1	ζ_3^2	ζ_3
Γ_4	3	-1	0	0

- (4) Die **Oktaedergruppe** O hat 5 Klassen und wieder liefert schon der Satz 3.10 eine eindeutige Aussage $2 \times 1^2 + 1 \times 2^2 + 3 \times 3^2 = 24$ über die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen. Die beiden eindimensionalen Darstellungen würden sich auch aus dem Index $2 = 24/12$ der Kommutatorgruppe T ergeben und ihre Charaktere bestimmt man leicht mittels Satz 3.17, die den Charakteren der die Kommutatorgruppe bildenden Klassen $\{e\}$, $\{C(\varphi_2)\}$ und $\{C^2(\varphi_4)\}$ den Wert 1 zuweist, und der Orthogonalitätsbedingung (3.33), die den Charakteren der verbleibenden Klassen $\{C(\varphi_2)\}$ und $\{C(\pm\varphi_4)\}$ für Γ_2 den Wert -1 gibt. Die Darstellung Γ_2 ergibt sich auch aus dem Transformationsverhalten des harmonischen Polynoms xyz unter den Drehungen aus O . Die zweidimensionale Darstellung Γ_3 konstruiert man am einfachsten anhand des Transformationsverhaltens des von den beiden harmonischen Polynomen $\sqrt{3}(x^2 - y^2)$ und $2z^2 - x^2 - y^2$ aufgespannten Funktionenraumes unter den Drehungen aus O . Intuitiv erkennt man nicht sofort, dass dieser Funktionenraum invariant unter O ist. Die erste dreidimensionale Darstellung Γ_4 ist die **Vektordarstellung der Oktaedergruppe**, die man aus dem von den drei harmonischen Polynomen x , y und z aufgespannten Raum konstruiert. Ähnlich konstruiert man die zweite dreidimensionale Darstellung aus dem von den drei harmonischen Polynomen yz , zx und xy aufgespannten Raum. Daraus ergibt sich die folgende Charaktertafel.

Tabelle 4.5: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von O

	e	$C^2(\varphi_4)$	$C(\pm\varphi_4)$	$C(\varphi_2)$	$C(\pm\varphi_3)$
	1	3	6	6	8
Γ_1	1	1	1	1	1
Γ_2	1	1	-1	-1	1
Γ_3	2	2	0	0	-1
Γ_4	3	-1	1	-1	0
Γ_5	3	-1	-1	1	0

- (5) Die **Ikosaedergruppe Y** hat ebenfalls 5 Klassen und es gelingt trotz ihrer großen Ordnung $N = 60$, alleine aus dem Satz von Burnside anhand von $1 \times 1^1 + 2 \times 3^2 + 1 \times 4^2 + 1 \times 5^2 = 60$ zweifelsfrei auf die Dimensionen ihrer irreduziblen Darstellungen zu schließen. Die Darstellung Γ_2 ist die Vektordarstellung der Ikosaedergruppe. Wir verzichten auf eine explizite Präsentation der Herleitung der anderen drei irreduziblen Darstellungen in der folgenden Charaktertafel.

Tabelle 4.6: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von Y

	e	$C(\pm\varphi_5)$	$C^2(\pm\varphi_5)$	$C(\varphi_2)$	$C(\pm\varphi_3)$
	1	12	12	15	20
Γ_1	1	1	1	1	1
Γ_2	3	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	-1	0
Γ_3	3	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	-1	0
Γ_4	4	-1	-1	0	1
Γ_5	5	0	0	1	-1

Die Darstellungen der eigentlichen Punktgruppen sind alle von erster oder dritter Art, wie man mittels des Kriteriums (3.50) leicht feststellen kann. Darstellungen dritter Art (nicht selbstkonjugierte), die man an komplexen Charakteren erkennt, sind nur die zueinander konjugierten Paare von Darstellungen Γ_2 und Γ_3 von T sowie die Darstellungspaare $\Gamma_{\mu+1}$ und $\Gamma_{n+1-\mu}$ von C_n für $1 \leq \mu \leq (n-1)/2$.

Uneigentliche Punktgruppen

Die irreduziblen Darstellungen der uneigentlichen Punktgruppen sind leicht aus denen der eigentlichen zu erhalten, weil die uneigentlichen Punktgruppen nach Tabelle 2.2 entweder isomorph zu eigentlichen oder direkte Produkte (1.22) von eigentlichen Punktgruppen mit den davon unabhängigen Punktgruppen C_{1h} oder S_2 sind. Im letzteren Fall ergeben sich die irreduziblen Darstellungen der Produktgruppe aus Satz 3.24. Wir zeigen im folgenden auch für isomorphe Punktgruppen die Charaktertafeln, um die Konjugationsklassen in der Kopfzeile angeben zu können.

Bevor wir die Charaktertafeln aller in Tabelle 2.2 aufgeführten uneigentlichen Punktgruppen zeigen, diskutieren wir die irreduziblen Darstellungen der beiden isomorphen abelschen Gruppen C_{1h} und S_2 . Die Gruppe C_{1h} besteht aus dem Einselement e und der Spiegelung σ und die Gruppe S_2 aus e und der Inversion I . Die zweite Darstellung nach der trivialen Darstellung Γ_1 und damit deren Charaktere ergeben sich sofort anhand der Orthogonalitätsbedingung (3.33) für irreduzible Darstellungen. Daher sehen die identischen Charaktertafeln dieser beiden Gruppen wie folgt aus.

Tabelle 4.7: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von C_{1h} und S_2

	e	σ bzw. I
	1	1
Γ_1	1	1
Γ_2	1	-1

Nach dieser Vorbereitung beginnen wir mit der Aufzählung der Charaktertafeln aller uneigentlichen Punktgruppen.

- (6) S_{2n} ($n = 1, 2, \dots$) ist zyklisch und isomorph zu C_{2n} . Das erzeugende Element $C(\varphi_{2n})$ für C_{2n} ist durch das erzeugende Element $S(\varphi_{2n})$ zu ersetzen. Die Charaktertafel ergibt sich aus Tabelle 4.1 wie folgt.

Tabelle 4.8: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von S_{2n}

	e	$S(\varphi_{2n})$	$S^2(\varphi_{2n})$	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	$S^{2n-1}(\varphi_{2n})$
	1	1	1	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	1
Γ_1	1	1	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	1
Γ_2	1	ζ_{2n}	ζ_{2n}^2	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	ζ_{2n}^{2n-1}
Γ_3	1	ζ_{2n}^2	ζ_{2n}^4	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	$\zeta_{2n}^{2(2n-1)}$
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
Γ_{2n}	1	ζ_{2n}^{2n-1}	$\zeta_{2n}^{2(2n-1)}$	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	$\zeta_{2n}^{(2n-1)^2}$

- (7) C_{nh} ($n = 1, 2, \dots$) ist gleich dem direkten Produkt $C_n \times C_{1h}$. Diese Gruppe hat doppelt so viele Elemente und als abelsche Gruppe doppelt so viele Klassen und damit auch doppelt so viele irreduzible Darstellungen wie die Gruppe C_n . Nach Satz 3.24 ergibt sich die Charaktertafel von C_{nh} aus den Tabellen 4.1 und 4.7 wie folgt. Wir haben die Verdopplung der Klassen und der Darstellungen durch Trennlinien in der Tabelle betont. In den vier dadurch entstandenen Quadraten erkennt man leicht die Vorzeichen der Charaktertafel in Tabelle 4.7.

Tabelle 4.9: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von C_{nh}

	e	$C(\varphi_n)$	\cdot	$C^{m-1}(\varphi_n)$	σ	\cdot	$\sigma C^{m-1}(\varphi_n)$
	1	1	\cdot	1	1	\cdot	1
Γ_1	1	1	\cdot	1	1	\cdot	1
Γ_2	1	ζ_n	\cdot	ζ_n^{n-1}	1	\cdot	ζ_n^{n-1}
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
Γ_n	1	ζ_n^{n-1}	\cdot	$\zeta_n^{(n-1)^2}$	1	\cdot	$\zeta_n^{(n-1)^2}$
Γ_{n+1}	1	1	\cdot	1	-1	\cdot	-1
Γ_{n+2}	1	ζ_n	\cdot	ζ_n^{n-1}	-1	\cdot	$-\zeta_n^{n-1}$
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
Γ_{2n}	1	ζ_n^{n-1}	\cdot	$\zeta_n^{(n-1)^2}$	-1	\cdot	$-\zeta_n^{(n-1)^2}$

- (8) C_{nv} ($n = 2, 3, \dots$) ist isomorph zur eigentlichen Punktgruppe D_n und damit überträgt sich der gerade–ungerade–Effekt auf die Gruppe C_{nv} . An die Stelle der Drehungen u_ν um horizontale Achsen in D_n treten Spiegelungen σ_ν an vertikalen Ebenen in C_{nv} . Für gerade $n = 2m$ bilden die Spiegelungen zwei Klassen $V_g = \{\sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ und $V_u = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ und für ungerade $n = 2m + 1$ eine einzige Klasse $V = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$. Die Charaktertafeln sind damit die folgenden.

Tabelle 4.10: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von C_{2mv}

	e	$C(\pm\varphi_n)$	\cdot	$C^{m-1}(\pm\varphi_n)$	$C^m(\varphi_n)$	V_u	V_g
	1	2	\cdot	2	1	m	m
Γ_1	1	1	\cdot	1	1	1	1
Γ_2	1	1	\cdot	1	1	-1	-1
Γ_3	1	-1	\cdot	$(-1)^{m-1}$	$(-1)^m$	1	-1
Γ_4	1	-1	\cdot	$(-1)^{m-1}$	$(-1)^m$	-1	1
$\Gamma_{4+\nu}$ ($\nu \in N_g$)	2	$2 \cos \frac{\pi\nu}{m}$	\cdot	$2 \cos \frac{(m-1)\pi\nu}{m}$	$2(-1)^\nu$	0	0

Tabelle 4.11: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von C_{2m+1v}

	e	$C(\pm\varphi_n)$	$C^2(\pm\varphi_n)$	\cdot	$C^m(\pm\varphi_n)$	V
	1	2	2	\cdot	2	$2m + 1$
Γ_1	1	1	1	\cdot	1	1
Γ_2	1	1	1	\cdot	1	-1
$\Gamma_{2+\nu}$ ($\nu \in N_u$)	2	$2 \cos \frac{2\pi\nu}{n}$	$2 \cos \frac{4\pi\nu}{n}$	\cdot	$2 \cos \frac{m\pi\nu}{n}$	0

- (9) D_{nh} ($n = 2, 3, \dots$) ist gleich dem direkten Produkt $D_n \times C_{1h}$. Damit entstehen die Charaktertafeln der Gruppe D_{nh} für gerade und ungerade n aus den Tabellen 4.2 und 4.3 in völliger Analogie zu der Tafel 4.9 durch Verdopplung unter Berücksichtigung der Tafel 4.7 für die Gruppe C_{1h} . Weil die Tafeln die Seitenbreite sprengen würden, zeigen wir sie hier nicht explizit an.
- (10) D_{nd} ($n = 2, 3, \dots$) zeigt ebenfalls einen gerade–ungerade–Effekt. Für gerade $n = 2m$ ist D_{2md} isomorph zur eigentlichen Punktgruppe D_{4m} und wir können deren Charaktertafel übernehmen. Die Drehungen $C(\varphi_{4m})$ werden durch Drehspiegelungen $S(\varphi_{4m})$ und die zweizähligen Drehungen u_ν um horizontale Achsen für ungerade ν durch vertikale Spiegelebenen $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_3, \dots, \sigma_{2m-1}\}$ ersetzt. Die Indexmenge N_g ist hier durch $\{1, 2, \dots, 2m - 1\}$ gegeben. Damit ergibt sich die folgende Charaktertafel.

Tabelle 4.12: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von $D_{2m d}$

	e	$S(\pm\varphi_{4m})$	\cdot	$S^{2m-1}(\pm\varphi_{4m})$	$S^{2m}(\varphi_{4m})$	Σ	U_g
	1	2	\cdot	2	1	$2m$	$2m$
Γ_1	1	1	\cdot	1	1	1	1
Γ_2	1	1	\cdot	1	1	-1	-1
Γ_3	1	-1	\cdot	-1	1	1	-1
Γ_4	1	-1	\cdot	-1	1	-1	1
$\Gamma_{4+\nu}$ ($\nu \in N_g$)	2	$2 \cos \frac{\pi\nu}{2m}$	\cdot	$2 \cos \frac{(2m-1)\pi\nu}{2m}$	$2(-1)^\nu$	0	0

Für ungerade $n = 2m + 1$ ist D_{2m+1d} gleich dem direkten Produkt $D_{2m+1} \times S_2$. Deshalb ergibt sich die Charaktertafel wie bei der Gruppe D_{nh} durch Verdopplung der Tafel in Tabelle 4.3 unter Benutzung der Tafel in Tabelle 4.7. Die zusätzlichen Klassen sind die Klassen von D_{2m+1} multipliziert mit der Inversion I .

- (11) T_d ist isomorph zur Oktaedergruppe O . Die Klassen $C^2(\varphi_4)$, $C(\varphi_2)$ und $C(\pm\varphi_4)$ von O werden durch die Klassen $C(\varphi_2)$, σ und $S(\pm\varphi_4)$ von T_d ersetzt. Damit ergibt sich die folgende Charaktertafel. Die Vektordarstellung ist wieder Γ_4 .

Tabelle 4.13: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von T_d

	e	$C(\pm\varphi_3)$	$C(\varphi_2)$	σ	$S(\pm\varphi_4)$
	1	8	3	6	6
Γ_1	1	1	1	1	1
Γ_2	1	1	1	-1	-1
Γ_3	2	-1	2	0	0
Γ_4	3	0	-1	1	-1
Γ_5	3	0	-1	-1	1

- (12) T_h ist gleich dem direkten Produkt $T \times S_2$. Daher entsteht die Charaktertafel in Analogie zu Tabelle 4.9 aus Tabelle 4.4 durch Verdopplung unter Berücksichtigung von Tabelle 4.7.

Tabelle 4.14: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von T_h

	e	$C(\varphi_2)$	$C(\varphi_3)$	$C(-\varphi_3)$	I	$IC(\varphi_2)$	$IC(\varphi_3)$	$IC(-\varphi_3)$
	1	3	4	4	1	3	4	4
Γ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
Γ_2	1	1	ζ_3	ζ_3^2	1	1	ζ_3	ζ_3^2
Γ_3	1	1	ζ_3^2	ζ_3	1	1	ζ_3^2	ζ_3
Γ_4	3	-1	0	0	3	-1	0	0
Γ_1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
Γ_2	1	1	ζ_3	ζ_3^2	-1	-1	$-\zeta_3$	$-\zeta_3^2$
Γ_3	1	1	ζ_3^2	ζ_3	-1	-1	$-\zeta_3^2$	$-\zeta_3$
Γ_4	3	-1	0	0	-3	1	0	0

- (13) O_h ist gleich dem direkten Produkt $O \times S_2$. Daher entsteht die Charaktertafel in Analogie zu Tabelle 4.14 aus Tabelle 4.5 durch Verdopplung unter Berücksichtigung von Tabelle 4.7. Wir zeigen sie hier wegen der beschränkten Seitenbreite nicht.
- (14) Y_h ist gleich dem direkten Produkt $Y \times S_2$. Daher entsteht die Charaktertafel in Analogie zu Tabelle 4.14 aus Tabelle 4.6 durch Verdopplung unter Berücksichtigung von Tabelle 4.7. Wir zeigen auch sie hier wegen der beschränkten Seitenbreite nicht.

Multiplikationstabeln (Siehe die Gleichungen (3.64) und (3.72))

Die Gruppen C_n sind abelsch und daher ist jedes Kroneckerprodukt ihrer durchweg eindimensionalen irreduziblen Darstellungen wieder eine irreduzible Darstellung nach der anhand Tabelle 4.1 offensichtlichen Regel

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu = \begin{cases} \Gamma_{\mu+\nu-1} & (\mu + \nu - 2 < n) \\ \Gamma_{\mu+\nu-1-n} & (\mu + \nu - 2 \geq n) \end{cases} \quad (1 \leq \mu, \nu \leq n), \quad (4.5)$$

mit der sich eine Multiplikationstafel erübrigt.

Für die Gruppen D_{2m} liest man aus Tabelle 4.2 für die 4 eindimensionalen Darstellungen leicht die folgende Multiplikationstafel ab.

Tabelle 4.15: Teil der Multiplikationstafel für D_{2m}

	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
Γ_1	Γ_1^+	Γ_2	Γ_3	Γ_4
Γ_2	Γ_2	Γ_1^+	Γ_4	Γ_3
Γ_3	Γ_3	Γ_4	Γ_1^+	Γ_2
Γ_4	Γ_4	Γ_3	Γ_2	Γ_1^+

Auch für die Produkte von eindimensionalen mit zweidimensionalen Darstellungen erkennt man sofort die Regeln

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \Gamma_{4+\nu} &= \Gamma_{4+\nu} \Gamma_1 = \Gamma_2 \Gamma_{4+\nu} = \Gamma_{4+\nu} \Gamma_2 = \Gamma_{4+\nu} \\ \Gamma_3 \Gamma_{4+\nu} &= \Gamma_{4+\nu} \Gamma_3 = \Gamma_4 \Gamma_{4+\nu} = \Gamma_{4+\nu} \Gamma_4 = \Gamma_{4+m-\nu}\end{aligned}\quad (4.6)$$

Für die Produkte zwischen 2 zweidimensionalen Darstellungen kann man die Summen in den Gleichungen (3.64) und (3.72) über die $m - 1$ Klassen der Ordnung 2 ausrechnen, indem man die Produkte von Cosinussen mittels Additionstheoremen in Summen von Cosinussen umwandelt und deren Summen als Realteil von komplexen Exponentialfunktionen als geometrische Reihen schreibt. Man erhält so das Ergebnis

$$\Gamma_{4+\mu} \Gamma_{4+\nu} = \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_{4+\mu+\nu}^+ & (\mu + \nu < m) \\ \Gamma_3^+ + \Gamma_4^+ & (\mu + \nu = m) \\ \Gamma_{4+2m-\mu-\nu}^+ & (\mu + \nu > m) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_1^+ + \Gamma_2^- & (\mu = \nu) \\ \Gamma_{4+|\mu-\nu|} & (\mu \neq \nu) \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

Dabei sind die $^+$ -Indizes in der ersten Klammer nur für $\mu = \nu$ gemeint.

Für die Gruppen D_{2m+1} gilt die Tafel 4.15 eingeschränkt auf die beiden Darstellungen Γ_1 und Γ_2 , Gleichung (4.6) wird ersetzt durch die analoge Gleichung

$$\Gamma_1 \Gamma_{2+\nu} = \Gamma_{2+\nu} \Gamma_1 = \Gamma_2 \Gamma_{2+\nu} = \Gamma_{2+\nu} \Gamma_2 = \Gamma_{2+\nu} \quad (4.8)$$

und Gleichung (4.7) durch ($^+$ in der ersten Klammer wieder nur für $\mu = \nu$)

$$\Gamma_{2+\mu} \Gamma_{2+\nu} = \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_{2+\mu+\nu}^+ & (\mu + \nu \leq m) \\ \Gamma_{3+2m-\mu-\nu}^+ & (\mu + \nu > m) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_1^+ + \Gamma_2^- & (\mu = \nu) \\ \Gamma_{2+|\mu-\nu|} & (\mu \neq \nu) \end{array} \right\}. \quad (4.9)$$

Für die Gruppe T erhält man aus Tabelle 4.4 mittels der Gleichungen (3.64) und (3.72) die Multiplikationstafel

Tabelle 4.16: Multiplikationstafel für T

	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
Γ_1	Γ_1^+	Γ_2	Γ_3	Γ_4
Γ_2	Γ_2	Γ_3^+	Γ_1	Γ_4
Γ_3	Γ_3	Γ_1	Γ_2^+	Γ_4
Γ_4	Γ_4	Γ_4	Γ_4	$\Gamma_1^+ + \Gamma_2^+ + \Gamma_3^+ + \Gamma_4^+ + \Gamma_4^-$

in der das Produkt $\Gamma_4 \otimes \Gamma_4$ zwei Kopien der Darstellung Γ_4 enthält, die sich aber durch ihre Vertauschungssymmetrie unterscheiden lassen.

Für die Gruppe O erhält man aus Tabelle 4.5 mittels der Gleichungen (3.64) und (3.72) die Multiplikationstafel

Tabelle 4.17: Multiplikationstafel für O

	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5
Γ_1	Γ_1^+	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5
Γ_2	Γ_2	Γ_1^+	Γ_3	Γ_5	Γ_4
Γ_3	Γ_3	Γ_3	$\Gamma_1^+ + \Gamma_2^- + \Gamma_3^+$	$\Gamma_4 + \Gamma_5$	$\Gamma_4 + \Gamma_5$
Γ_4	Γ_4	Γ_5	$\Gamma_4 + \Gamma_5$	$\Gamma_1^+ + \Gamma_3^+ + \Gamma_4^- + \Gamma_5^+$	$\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5$
Γ_5	Γ_5	Γ_4	$\Gamma_4 + \Gamma_5$	$\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5$	$\Gamma_1^+ + \Gamma_3^+ + \Gamma_4^- + \Gamma_5^+$

und schließlich für die Gruppe Y aus Tabelle 4.6

Tabelle 4.18: Multiplikationstafel für Y

	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5
Γ_1	(1 ⁺)	(2)	(3)	(4)	(5)
Γ_2	(2)	(1 ⁺ , 2 ⁻ , 5 ⁺)	(4, 5)	(3, 4, 5)	(2, 3, 4, 5)
Γ_3	(3)	(4, 5)	(1 ⁺ , 3 ⁻ , 5 ⁺)	(2, 4, 5)	(2, 3, 4, 5)
Γ_4	(4)	(3, 4, 5)	(2, 4, 5)	(1 ⁺ , 2 ⁻ , 3 ⁻ , 4 ⁺ , 5 ⁺)	(2, 3, 4, 2 × 5)
Γ_5	(5)	(2, 3, 4, 5)	(2, 3, 4, 5)	(2, 3, 4, 2 × 5)	(1 ⁺ , 2 ⁻ , 3 ⁻ , 4 ⁺ , 4 ⁻ , 2 × 5 ⁺)

wobei wir wegen der beschränkten Seitenbreite anstelle der direkten Summe der irreduziblen Darstellungen eine Liste ihrer Indizes, bei Bedarf mit Angabe der Vielfachheit (2×5 bedeutet $2\Gamma_5$), eingetragen haben. Die beiden Darstellungen Γ_4 in $\Gamma_5 \otimes \Gamma_5$ können durch ihre Vertauschungssymmetrie unterschieden werden, die ebenfalls doppelt auftretenden Darstellungen Γ_5 jedoch nicht, weil sie beide positive Parität haben.

Wir verzichten auf eine Darstellung der Multiplikationstafeln der uneigentlichen Punktgruppen.

Die folgende Tabelle gibt ein Beispiel für die Analyse von Kroneckerpotenzen (3.84) nach Permutationsdarstellungen. Sie zeigt die Zerlegung der dritten Potenz der irreduziblen Darstellungen der Oktaedergruppe nach deren irreduziblen Darstellungen mit Angabe der Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_3 .

Tabelle 4.19: Zerlegung von Γ_μ^3 für die Oktaedergruppe O

	Zerlegung
Γ_1	$\Gamma_1^{[3]}$
Γ_2	$\Gamma_2^{[3]}$
Γ_3	$\Gamma_1^{[3]} + \Gamma_2^{[3]} + \Gamma_3^{[3]} + 2\Gamma_3^{[2,1]}$
Γ_4	$\Gamma_1^{[1^3]} + \Gamma_2^{[3]} + 2\Gamma_3^{[2,1]} + 2\Gamma_4^{[3]} + 2\Gamma_4^{[2,1]} + \Gamma_5^{[3]} + 2\Gamma_5^{[2,1]}$
Γ_5	$\Gamma_1^{[3]} + \Gamma_2^{[1^3]} + 2\Gamma_3^{[2,1]} + \Gamma_4^{[3]} + 2\Gamma_4^{[2,1]} + 2\Gamma_5^{[3]} + 2\Gamma_5^{[2,1]}$

5. Die Darstellungen der unendlichen Punktgruppen

In diesem Kapitel werden wir die Darstellungen der fünf unendlichen Punktgruppen diskutieren, die am Ende des Abschnitts "Punktgruppen" in Kapitel 2 genannt wurden. Wir werden für diese Gruppen homogene Maße angeben (siehe Gleichung (3.16)). Dies ist die einzige Voraussetzung für die Übertragung vieler Ergebnisse des Kapitels 4 auf unendliche Gruppen. Nach den Sätzen (3.5) und (3.6) garantiert die Existenz eines Maßes auf einer Gruppe z.B., dass alle ihre Darstellungen voll-reduzibel sind. Wir werden auf dieser Grundlage alle irreduziblen Darstellungen der unendlichen Punktgruppen beschreiben. Für ihre Charaktere folgt dann auch über das Skalarprodukt (3.16) die Orthonormierungseigenschaft (3.33).

Die Punktgruppe C_∞

Die abelsche Punktgruppe C_∞ im \mathcal{R}_3 besteht aus allen Drehungen $C(\alpha)$ um eine feste Achse \mathbf{k} . Für diese unendliche Gruppe gibt es das für alle 2π -periodischen Funktionen **homogene Maß**

$$\langle \Phi(\alpha) \rangle_{C_\infty} = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \Phi(\alpha). \quad (5.1)$$

Nach Satz 3.3 sind alle irreduziblen Darstellungen von C_∞ eindimensional. Wenn wir die Elemente der Gruppe durch den Drehwinkel α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) kennzeichnen, folgt angesichts der Funktionalgleichung $\chi(\alpha)\chi(\beta) = \chi(\alpha + \beta)$ der Exponentialfunktion und wegen der Bedingung $\chi(2\pi) = \chi(0) = 1$, dass es unendlich viele irreduzible Darstellungen gibt, die durch die Charaktertafel

Tabelle 5.1: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von C_∞

$0 \leq \alpha < 2\pi$	$\{C(\alpha)\}$
$n \in \mathcal{Z}$	1
Γ_n	$e^{i n \alpha}$

gegeben sind. Die Multiplikationsregeln für die irreduziblen Darstellungen von C_∞ berechnen sich nach Gleichung (3.61) mittels des Maßes (5.1) zu

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \chi_m(\alpha)\chi_n(\alpha)\chi_k^*(\alpha) = \delta_{k,m+n}$$

und daher gilt die offensichtliche Regel

$$\Gamma_m \Gamma_n = \Gamma_{m+n}. \quad (5.2)$$

Die Punktgruppe D_∞

Die Punktgruppe D_∞ enthält neben den Elementen der Gruppe C_∞ die zweizähligen Drehungen $u_\beta(\pi)$ um alle zur Drehachse \mathbf{k} senkrechten $(x \cos \beta + y \sin \beta)$ -Achsen mit $0 \leq \beta < \pi$. Die Elemente von D_∞ können wegen der Beziehung

$C(\alpha)u_0(\pi) = u_{\alpha/2}(\pi)$ auch durch die beiden Drehwinkel $0 \leq \alpha < 2\pi$ und $\beta = 0, \pi$ gekennzeichnet werden. Damit ist

$$\langle \Phi(\alpha, \beta) \rangle_{D_\infty} = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{4\pi} (\Phi(\alpha, 0) + \Phi(\alpha, \pi)) \quad (5.3)$$

ein **homogenes Maß** für alle in α 2π -periodischen Funktionen auf D_∞ , womit Satz (3.6) gilt.

Wegen $u_\beta(\pi)C(\alpha)u_\beta(\pi) = C(\alpha)$ und $C(\alpha)u_\beta(\pi)C(-\alpha) = u_{\alpha+\beta}(\pi)$ bilden alle Drehungen $C(\alpha)$ eine eigene Klasse α und alle Drehungen u_β liegen in einer gemeinsamen Klasse U .

Zur Bestimmung der irreduziblen Darstellungen geht man analog zur Argumentation für die Gleichungen (5.1-4) vor, nach der eine s -dimensionale Darstellung D einen Eigenvektor mit $D(C(\alpha))\mathbf{e}_1 = e^{in\alpha}\mathbf{e}_1$ haben muss. Wenn $D(u_0(\pi))\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, so folgt auch hier $D(u_0(\pi))\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$ und $D(C(\alpha))\mathbf{e}_2 = e^{-in\alpha}\mathbf{e}_2$. Falls nun $e^{in\alpha} \neq e^{-in\alpha}$, d.h. falls $n \neq 0$, so spannen die beiden Eigenvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 einen zweidimensionalen invarianten Unterraum des s -dimensionalen Darstellungsraums auf und durch die Matrizen

$$D(C(\alpha)) = \begin{pmatrix} e^{in\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-in\alpha} \end{pmatrix}, \quad D(u_0(\pi)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

die nicht miteinander vertauschen, wird eine zweidimensionale irreduzible Darstellung $\Gamma_{n(>0)}$ erzeugt. Nur für $n = 0$ ist der von \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 aufgespannte Raum reduzibel, weil die beiden Vektoren $\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2$ simultane Eigenvektoren der Matrizen (5.4) sind, und wir erhalten 2 eindimensionale Darstellungen $\Gamma_{0,\pm}$ mit $\chi_\pm(U) = \pm 1$. Insgesamt haben wir damit die folgende Charaktertafel erhalten.

Tabelle 5.2: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von D_∞

$0 \leq \alpha < 2\pi$	$\{C(\alpha)\}$	U
$n \in \mathcal{N}$	1	∞
$\Gamma_{0,\pm}$	1	± 1
$\Gamma_{n(>0)}$	$2 \cos n\alpha$	0

Die Multiplikationstafel für D_∞ ergibt sich auch hier leicht mittels des Maßes (5.3) zu

Tabelle 5.3: Multiplikationstafel für D_∞

	$\Gamma_{0,+}$	$\Gamma_{0,-}$	$\Gamma_{n(>0)}$
$\Gamma_{0,+}$	$\Gamma_{0,+}$	$\Gamma_{0,-}$	Γ_n
$\Gamma_{0,-}$	$\Gamma_{0,-}$	$\Gamma_{0,+}$	Γ_n
$\Gamma_{m(>0)}$	Γ_m	Γ_m	$\Gamma_{m+n} + \begin{cases} \Gamma_{0,+} + \Gamma_{0,-} & (m = n) \\ \Gamma_{ m-n } & (m \neq n) \end{cases}$

Die Gruppens $C_{\infty h}$

Die abelsche Gruppens $C_{\infty h}$ besteht aus allen Drehungen $C(\alpha)$ und allen Drehspiegelungen $S(\alpha)$ um eine feste Achse \mathbf{k} . Wegen $S^2(\alpha) = C(2\alpha)$ ergeben sich alle irreduziblen Darstellungen aus denen von C_{∞} durch die Ergänzung $\chi_n(S(\alpha)) = \pm\chi_n(C(\alpha))$. Die Gruppe kann durch den Drehwinkel α und durch die Variable $s = 0, 1$ parametrisiert werden, die Drehungen mit $s = 0$ und Drehspiegelungen mit $s = 1$ kennzeichnet. Als **homogenes Maß** ergibt sich

$$\langle \Phi(\alpha, s) \rangle_{C_{\infty h}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{4\pi} (\Phi(\alpha, 0) + \Phi(\alpha, 1)), \quad (5.5)$$

womit alle Darstellungen wieder vollreduzibel sind. Für die irreduziblen Darstellungen erhalten wir die folgende Charaktertafel.

Tabelle 5.4: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von $C_{\infty h}$

$0 \leq \alpha < 2\pi$	$C(\alpha)$	$S(\alpha)$
$n \in \mathcal{Z}$	1	1
$\Gamma_{n,\pm}$	$e^{in\alpha}$	$\pm e^{in\alpha}$

Mittels des Maßes (5.5) erhält man die Multiplikationstafel

Tabelle 5.5: Multiplikationstafel für $C_{\infty h}$

	$\Gamma_{n,+}$	$\Gamma_{n,-}$
$\Gamma_{m,+}$	$\Gamma_{m+n,+}$	$\Gamma_{m+n,-}$
$\Gamma_{m,-}$	$\Gamma_{m+n,-}$	$\Gamma_{m+n,+}$

Die Gruppe $C_{\infty v}$

Die Gruppe $C_{\infty v}$ besteht aus allen Drehungen $C(\alpha)$ um eine feste Achse \mathbf{k} und den Spiegelungen σ_{β} an allen vertikalen Ebenen, deren Normale gegenüber der x -Achse um den Winkel β ($0 \leq \beta < \pi$) um die \mathbf{k} -Achse verdreht ist. Jede Drehung bildet eine Klasse $\{C(\alpha)\}$, weil $\sigma_{\beta}C(\alpha)\sigma_{\beta} = C(\alpha)$. Wegen der Beziehung $C(\alpha)\sigma_0 = \sigma_0C(-\alpha) = \sigma_{\alpha/2}$ können die Spiegelungen, die angesichts von $C(\alpha)\sigma_0C(-\alpha) = \sigma_{\alpha}$ eine Klasse Σ_v bilden, auch mittels des Drehwinkels α gekennzeichnet werden. Wenn wir wieder durch den Parameter $s = 0, 1$ Drehungen und Spiegelungen unterscheiden, lautet das **homogene Maß** für diese Gruppe wie bei D_{∞}

$$\langle \Phi(\alpha, s) \rangle_{C_{\infty v}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{4\pi} (\Phi(\alpha, 0) + \Phi(\alpha, 1)). \quad (5.6)$$

Tatsächlich sind die Gruppen $C_{\infty v}$ und D_{∞} isomorph, weil mit $C_{\infty v} \times S_2 = D_{\infty} \times S_2$ das Isomorphieargument wie bei den entsprechenden endlichen Gruppen (siehe

Tabelle 2.2) greift. Die Charaktertafel stimmt daher auch mit Tabelle 5.2 überein. Wir geben sie hier nur wieder wegen der unterschiedlichen Bedeutung der Klassen U und Σ_v .

Tabelle 5.6: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von $C_{\infty v}$

$0 \leq \alpha < 2\pi$	$\{C(\alpha)\}$	Σ_v
$n \in \mathcal{N}$	1	∞
$\Gamma_{0,\pm}$	1	± 1
$\Gamma_{n(>0)}$	$2 \cos n\alpha$	0

Die Multiplikationstafel für $C_{\infty v}$ ist identisch mit der für D_{∞} , die in Tabelle 5.3 gezeigt ist.

Die Gruppe $D_{\infty h}$

Die Gruppe $D_{\infty h}$ besteht aus allen Drehungen $C(\alpha)$ und Drehspiegelungen $S(\alpha)$ um eine feste Achse \mathbf{k} sowie den zweizähligen Drehungen $u_{\beta}(\pi)$ aus D_{∞} und den Spiegelungen σ_{β} aus $C_{\infty v}$. Ihre Klassen mit einem einzigen Element sind $\{C(\alpha)\}$ und $\{S(\alpha)\}$, während die beiden Klassen U und Σ_v jeweils alle zweizähligen Drehungen bzw. alle Spiegelungen enthalten. Wenn wir die vier Typen von Klassen durch den Parameter $s = 0, 1, 2, 3$ abzählen, lautet das **homogene Maß**

$$\langle \Phi(\alpha, s) \rangle_{D_{\infty h}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{8\pi} (\Phi(\alpha, 0) + \Phi(\alpha, 1) + \Phi(\alpha, 2) + \Phi(\alpha, 3)). \quad (5.7)$$

Analog zu Tabelle 2.2 gilt $D_{\infty h} = D_{\infty} \times C_{1h}$. Es gilt speziell die Beziehung $u_{\beta+\pi/2}(\pi)S(0) = \sigma_{\beta}$. Daher ergibt sich die Charaktertafel nach Satz 3.8 aus den beiden Tafeln der Faktoren D_{∞} und C_{1h} .

Tabelle 5.7: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von $D_{\infty h}$

$0 \leq \alpha < 2\pi$	$\{C(\alpha)\}$	$\{S(\alpha)\}$	U	Σ_v
$n \in \mathcal{N}$	1	1	∞	∞
$\Gamma_{0,1}$	1	1	1	1
$\Gamma_{0,2}$	1	1	-1	-1
$\Gamma_{0,3}$	1	-1	1	-1
$\Gamma_{0,4}$	1	-1	-1	1
$\Gamma_{n(>0),\pm}$	$2 \cos n\alpha$	$\pm 2 \cos n\alpha$	0	0

Das Maß (5.7) führt auf die folgende Multiplikationstafel.

Tabelle 5.8: Multiplikationstafel für $D_{\infty h}$

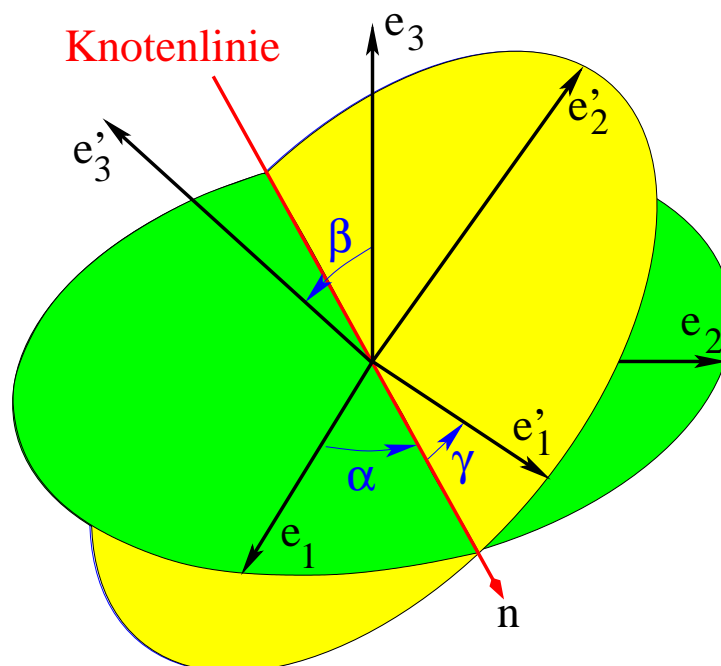
	$\Gamma_{0,1}$	$\Gamma_{0,2}$	$\Gamma_{0,3}$	$\Gamma_{0,4}$	$\Gamma_{n,+}$	$\Gamma_{n,-}$
$\Gamma_{0,1}$	$\Gamma_{0,1}$	$\Gamma_{0,2}$	$\Gamma_{0,3}$	$\Gamma_{0,4}$	$\Gamma_{n,+}$	$\Gamma_{n,-}$
$\Gamma_{0,2}$	$\Gamma_{0,2}$	$\Gamma_{0,1}$	$\Gamma_{0,4}$	$\Gamma_{0,3}$	$\Gamma_{n,+}$	$\Gamma_{n,-}$
$\Gamma_{0,3}$	$\Gamma_{0,3}$	$\Gamma_{0,4}$	$\Gamma_{0,1}$	$\Gamma_{0,2}$	$\Gamma_{n,-1}$	$\Gamma_{n,+}$
$\Gamma_{0,4}$	$\Gamma_{0,4}$	$\Gamma_{0,3}$	$\Gamma_{0,2}$	$\Gamma_{0,1}$	$\Gamma_{n,-}$	$\Gamma_{n,+}$
$\Gamma_{m,+}$	$\Gamma_{m,+}$	$\Gamma_{m,+}$	$\Gamma_{m,-}$	$\Gamma_{m,-}$	A	B
$\Gamma_{m,-}$	$\Gamma_{m,-}$	$\Gamma_{m,-}$	$\Gamma_{m,+}$	$\Gamma_{m,+}$	B	A

In Tabelle (5.8) stehen die Abkürzungen A und B für

$$\begin{aligned}
 A &= \Gamma_{m+n,+} + \begin{cases} \Gamma_{0,1} + \Gamma_{0,2} & (m = n) \\ \Gamma_{|m-n|,+} & (m \neq n) \end{cases}, \\
 B &= \Gamma_{m+n,-} + \begin{cases} \Gamma_{0,3} + \Gamma_{0,4} & (m = n) \\ \Gamma_{|m-n|,-} & (m \neq n) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Die volle eigentliche Drehgruppe

Die volle Drehgruppe ϑ_3 wird durch die **Eulerschen Winkel** parametrisiert, deren Definition wir anhand der folgenden Figur erklären wollen. Gezeigt sind dort das durch die Einheitsvektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 dargestellte ursprüngliche rechtshändige Dreibein, das für die Wahl des Koordinatensystems maßgeblich sein soll und das durch die Drehung $\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ um die Eulerschen Winkel α, β, γ in das gestrichelte Dreibein \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 und \mathbf{e}'_3 überführt wird. Die Konstruktion der Drehung erfolgt mithilfe der **Knotenlinie** als einer **orientierten Hilfslinie**, die durch den Vektor $\mathbf{n} = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}'_3)/|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}'_3|$ definiert ist. Zur Parametrisierung wird die Drehung $\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ in drei Schritte zerlegt:



1. Drehung $D_3(\alpha)$ um die \mathbf{e}_3 -Achse um den Winkel α so, dass der Vektor \mathbf{e}_1 in den Einheitsvektor \mathbf{n} überführt wird. Dabei liegt der Drehwinkel α im Intervall $0 \leq \alpha < 2\pi$.
2. Drehung $D_K(\beta) = D_3(\alpha)D_1(\beta)D_3(-\alpha)$ um die Knotenlinie, in der jetzt der Vektor \mathbf{e}_1 liegt, bis der Vektor \mathbf{e}_3 in den Vektor \mathbf{e}'_3 überführt ist. Der Drehwinkel β ist auf das Intervall $0 \leq \beta < \pi$ beschränkt, weil der Fall $\beta \geq \pi$ eine Umkehr der Orientierung der Knotenlinie zur Folge hätte und damit durch $\beta < \pi$ schon vollständig erfasst ist.
3. Drehung $D'_3(\gamma) = D_3(\alpha)D_1(\beta)D_3(\gamma)D_1(-\beta)D_3(-\alpha)$ um die \mathbf{e}'_3 -Achse, in der jetzt der Vektor \mathbf{e}_3 liegt, bis der Vektor \mathbf{e}_1 von der Knotenlinie in den Vektor \mathbf{e}'_1 überführt ist. Der Drehwinkel γ liegt im Intervall $0 \leq \gamma < 2\pi$.

Die obige Notation für die Drehmatrizen hat folgende Bedeutung: Mit D_3 bzw. D_1 wurden Drehungen um die \mathbf{e}_3 - bzw. um die \mathbf{e}_1 -Achse bezeichnet und mit D'_3 Drehungen um die \mathbf{e}'_3 -Achse. Alle Matrizen wurden auf die in den ungestrichelten Koordinaten einfachen Matrizen vom Typ D_3 und D_1 zurückgeführt. Man beachte die dadurch erfolgte Umkehrung der Reihenfolge der Faktoren gegenüber der obigen Aufzählung. Die gesamte Drehung wird durch die **Drehmatrix**

$$\begin{aligned}
D(\alpha, \beta, \gamma) &= D'_3(\gamma)D_k(\beta)D_3(\alpha) = D_3(\alpha)D_1(\beta)D_3(\gamma) \\
&= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma & -\sin \gamma \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha & \sin \beta \sin \alpha \\ \cos \gamma \sin \alpha + \cos \beta \sin \gamma \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \beta \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (5.9)
\end{aligned}$$

beschrieben. Die Darstellung (5.9) der Drehgruppe ϑ_3 durch dreidimensionale Matrizen ist die **Vektordarstellung**, die auch $SO(3)$ genannt wird. Man erkennt anhand der obigen Konstruktion, dass die Gruppe ϑ_3 durch die beiden einparametrischen Untergruppen

$$D_1(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}, \quad D_3(\delta) = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

erzeugt wird, die beide isomorph zur Gruppe C_∞ sind. Die Eulerschen Winkel spielen in der Mechanik starrer Körper eine wichtige Rolle als generalisierte Koordinaten.

Umgekehrt kann man bei vorgegebener eigentlich orthogonaler Drehmatrix D die zugehörigen Eulerschen Winkel berechnen, indem man mittels des verdrehten Dreibeins $\mathbf{e}'_i = D \mathbf{e}_i$ zunächst den Einheitsvektor

$$\mathbf{n} = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}'_3) / |\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}'_3| \quad (5.11)$$

in Richtung der Knotenlinie bestimmt. Die Eulerschen Winkel ergeben sich dann eindeutig aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}, & \sin \alpha &= (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_3 \\
\cos \beta &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_3 \\
\cos \gamma &= \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{n}, & \sin \gamma &= (\mathbf{n} \times \mathbf{e}'_1) \cdot \mathbf{e}'_3.
\end{aligned} \quad (5.12)$$

Wie in Kapitel 2 erläutert, kann die Drehung $D(\alpha, \beta, \gamma)$ auch als eine Drehung um eine Drehachse \mathbf{k} um einen Winkel φ aufgefasst werden. Den Drehwinkel φ kann man leicht aus der Bedingung $\text{Sp}D(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + 2 \cos \varphi$ berechnen und man erhält mit

$$\boxed{\cos \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}} \quad (5.13)$$

eine Formel, aus der der Winkel φ im Intervall $0 \leq \varphi < 2\pi$ eindeutig entnommen werden kann. Zur Berechnung der Drehachse macht man sich klar, dass die drei Vektoren $\mathbf{e}'_i - \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) senkrecht zum Einheitsvektor \mathbf{k} stehen. Man kann daher die Drehachse z.B. aus der Gleichung

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}'_3 - \mathbf{e}_3) &= 2 \sin \frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} (1 + \cos(\alpha - \gamma)) \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin(\alpha - \gamma) \sin \frac{\beta}{2} \\ (\sin \alpha + \sin \gamma) \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \\ &= 2 \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{(\sin \alpha + \sin \gamma)^2 + (\cos \alpha + \cos \gamma)^2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.14)$$

entnehmen. Man überzeugt sich anhand der obigen Figur davon, dass die Drehung um den Winkel φ bezüglich der so gewählten Drehachse rechtshändig ist, wenn man in (5.14) die positive Wurzel nimmt.

Um ein **homogenes Maß** mit der Gewichtsfunktion $h(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\boxed{\langle \Phi(\alpha, \beta, \gamma) \rangle_{\vartheta_3} = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma h(\alpha, \beta, \gamma) \Phi(\alpha, \beta, \gamma)} \quad (5.15)$$

auf der Gruppe ϑ_3 ist finden, genügt es, die Wirkung der beiden Erzeugenden (5.10) vor und nach einer Drehung $D(\alpha, \beta, \gamma)$ zu untersuchen. Die Erzeugende $D_3(\delta)$ bewirkt dabei wegen

$$D_3(\delta_1)D(\alpha, \beta, \gamma)D_3(\delta_2) = D(\alpha + \delta_1, \beta, \gamma + \delta_2)$$

triviale Translationen der Eulerschen Winkel und man sieht, dass für in α und γ 2π -periodische Funktionen $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ das Maß (5.15) mit einer von diesen beiden Winkeln unabhängigen Gewichtsfunktion homogen gegenüber dieser Erzeugenden ist.

Da Wirkung der anderen Erzeugenden D_1 komplizierter ist, nutzen wir aus, dass es genügt, Erzeugende mit infinitesimalem Winkel zu betrachten. Daher brauchen wir die Gleichung

$$D_1(\delta_1)D(\alpha, \beta, \gamma)D_1(\delta_2) = D(\alpha', \beta', \gamma') \quad (5.16)$$

nur in erster Ordnung in den gestrichenen Winkeln δ_1 und δ_2 auszuwerten. Indem wir dies unter Benutzung der Gleichungen (5.12) tun, erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \frac{\delta_2 \sin \gamma - \delta_1 \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} + \dots \\ \beta' &= \beta + \delta_1 \cos \alpha + \delta_2 \cos \gamma + \dots \\ \gamma' &= \gamma + \frac{\delta_1 \sin \alpha - \delta_2 \sin \gamma \cos \beta}{\sin \beta} + \dots \end{aligned} \quad (5.17)$$

Damit können wir das Maßintegral (5.15) in den gestrichenen Variablen mittels der Substitution (5.17) auf ungestrichene Variable umrechnen. Dabei geht die Funktionaldeterminante der Substitutionsgleichungen (5.17) ein, die in führender Ordnung in δ_i gleich $1 - (\delta_1 \cos \alpha + \delta_2 \cos \gamma)/\operatorname{tg} \beta$ ist, und die Änderung der Gewichtsfunktion $h(\beta') = h(\beta) + (\delta_1 \cos \alpha + \delta_2 \cos \gamma)h'(\beta)$. Das Produkt dieser beiden Faktoren ergibt in führender Ordnung $h(\beta) + (\delta_1 \cos \alpha + \delta_2 \cos \gamma)(h'(\beta) - h(\beta)/\operatorname{tg} \beta)$. Die Invarianz des Maßes gilt daher genau dann, wenn die Gewichtsfunktion der Differentialgleichung $h'(\beta) \sin \beta = h(\beta) \cos \beta$ genügt, deren Lösungsgesamtheit durch $h(\beta) = c \cdot \sin \beta$ gegeben ist. Die Normierungsforderung für das homogene Maß legt den Vorfaktor c fest und wir erhalten die Maßfunktion

$$\boxed{h(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\sin \beta}{8\pi^2}} \quad (5.18)$$

Mit dem homogenen Maß (5.15,18) ist gezeigt, dass alle Darstellungen der Drehgruppe vollreduzibel sind, und die verbleibende Aufgabe ist auch hier wieder die Bestimmung aller irreduziblen Darstellungen.

Während des Physikstudiums lernt man im Rahmen der Quantenmechanik, wie man die irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe ϑ_3 durch Betrachtung infinitesimaler Drehungen erhält. Im Grenzfall kleiner Winkel α haben die Matrizen (5.10) und die analoge dritte Matrix $D_2(\alpha)$ die Form

$$D_\nu(\alpha) = \mathbf{1} - i\alpha\Lambda_\nu + O(\alpha^2) \quad (\nu = 1,2,3) \quad (5.19)$$

mit den drei **infinitesimalen Erzeugenden**

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

wobei in (5.19) ein Faktor i eingefügt wurde, damit die Erzeugenden Λ_ν **hermitesche Matrizen** sind. Die einparametrischen Untergruppen lassen sich für beliebige α mittels der Erzeugenden als Exponentialfunktionen der Gestalt

$$D_\nu(\alpha) = e^{-i\alpha\Lambda_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad (5.21)$$

darstellen. Wenn man auf dem von den drei Erzeugenden über den komplexen Zahlen aufgespannten linearen Raum ein (nichtkommutatives) Produkt in Form eines Kommutators $[x, y] = xy - yx$ definiert, erweist sich die damit erhaltene **Lie-Algebra** als abgeschlossen, weil die Basiselemente die Vertauschungsrelationen

$$[\Lambda_1, \Lambda_2] = i\Lambda_3, \quad [\Lambda_2, \Lambda_3] = i\Lambda_1, \quad [\Lambda_3, \Lambda_1] = i\Lambda_2 \quad (5.22)$$

erfüllen. Die drei Basiselemente können als kartesische Komponenten eines Vektors Λ aufgefasst werden, mit dem sich die drei Vertauschungsrelationen kompakt als

$$\Lambda \times \Lambda = i\Lambda \quad (5.23)$$

schreiben lassen.

Anhand der obigen Vertauschungsrelationen kann man sofort die folgende Beziehung nachvollziehen:

$$D_1(\alpha)D_2(\beta)D_1(-\alpha)D_2(-\beta) = 1 - i\alpha\beta\Lambda_3 + \dots \quad (5.24)$$

Diese und die entsprechenden Beziehungen mit zyklisch vertauschten Indizes zeigen uns, dass die **Kommutatorgruppe der Drehgruppe** die ganze Drehgruppe ist. Daraus könnte man nach Satz 3.17 schließen, dass die triviale Darstellung die einzige eindimensionale irreduzible Darstellung ist.

Die Suche nach allen irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe kann auf die Suche nach allen irreduziblen linearen Darstellungen der Lie-Algebra (5.22) zurückgeführt werden. Das Ergebnis dieser Suche ist in allen Lehrbüchern der Quantenmechanik dokumentiert und besagt, dass es zu jeder Dimension $n \in \mathcal{N}$ genau eine Äquivalenzklasse von irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe gibt. Es erweist sich als nützlich, die nichthermiteschen Matrizen

$$\Lambda_{\pm} = \Lambda_1 \pm i\Lambda_2 \quad (\iff \Lambda_1 = \frac{\Lambda_+ + \Lambda_-}{2}, \Lambda_2 = \frac{\Lambda_+ - \Lambda_-}{2i}), \quad (5.25)$$

einzuführen, die adjungiert zueinander sind und die mit Λ_3 die Vertauschungsrelationen

$$[\Lambda_3, \Lambda_+] = \Lambda_+, \quad [\Lambda_3, \Lambda_-] = -\Lambda_-, \quad [\Lambda_+, \Lambda_-] = 2\Lambda_3 \quad (5.26)$$

erfüllen. Die ersten beiden Relationen sind äquivalent zu

$$\Lambda_3\Lambda_+ = \Lambda_+(\Lambda_3 + 1), \quad \Lambda_3\Lambda_- = \Lambda_-(\Lambda_3 - 1), \quad (5.27)$$

worauf die Bezeichnung **Auf- bzw. Absteigeoperatoren** für Λ_{\pm} beruht.

Außerdem macht man wesentlichen Gebrauch von dem **Casimiroperator**

$$\Lambda^2 = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = \frac{1}{2}(\Lambda_+\Lambda_- + \Lambda_-\Lambda_+) + \Lambda_3^2, \quad (5.28)$$

der zusammen mit den Operatoren Λ_i ebenfalls hermitesch ist, mit allen Elementen der Lie-Algebra vertauscht,

$$[\Lambda^2, \Lambda_i] = [\Lambda^2, \Lambda_{\pm}] = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.29)$$

und außerdem positiv semidefinit ist. Aus (5.28) und der letzten Gleichung in (5.26) gewinnen wir die Identitäten

$$\Lambda_-\Lambda_+ = \Lambda^2 - \Lambda_3(\Lambda_3 + 1), \quad \Lambda_+\Lambda_- = \Lambda^2 - \Lambda_3(\Lambda_3 - 1), \quad (5.30)$$

die die Eigenwerte von Λ_3 durch die Eigenwerte von Λ^2 beschränken, weil die beiden Operatoren $\Lambda_-\Lambda_+$ und $\Lambda_+\Lambda_-$ positiv semidefinit sind.

Stellen wir uns nun vor, dass wir eine Darstellung der drei Operatoren Λ_i durch hermitesche Matrizen haben. Dann können wir annehmen, dass die beiden Matrizen

Λ^2 und Λ_3 als hermitesche und miteinander kommutierende Matrizen simultan diagonal sind. Die Eigenwerte von Λ^2 parametrisieren wir angesichts der Gleichungen (5.30) durch den Ausdruck $\lambda(\lambda + 1)$, wobei wegen $\Lambda^2 \geq 0$ die Annahme $\lambda \geq 0$ keine Einschränkung bedeutet.

Wir wählen nun einen beliebigen simultanen normierten Eigenzustand der beiden diagonalen Matrizen aus, den wir in **Diracschreibweise** mit $|\lambda\mu\rangle$ bezeichnen wollen und für den dann

$$\Lambda^2|\lambda\mu\rangle = \lambda(\lambda + 1)|\lambda\mu\rangle, \quad \Lambda_3|\lambda\mu\rangle = \mu|\lambda\mu\rangle \quad (5.31)$$

gelten soll. Sodann betrachten wir die beiden Zustände $\Lambda_\pm|\lambda\mu\rangle$. Sie sind angesichts von (5.29) Eigenzustände zum selben Eigenwert $\lambda(\lambda + 1)$ von Λ^2 und angesichts von (5.27) von um ± 1 verschobenen Eigenwerten von Λ_3 , in Formeln

$$\Lambda^2(\Lambda_\pm|\lambda\mu\rangle) = \lambda(\lambda + 1)(\Lambda_\pm|\lambda\mu\rangle), \quad \Lambda_3(\Lambda_\pm|\lambda\mu\rangle) = (\mu \pm 1)(\Lambda_\pm|\lambda\mu\rangle). \quad (5.32)$$

Aus den Identitäten (5.30) gewinnen wir die Eigenwertgleichungen

$$\Lambda_-\Lambda_+|\lambda\mu\rangle = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu + 1)|\lambda\mu\rangle, \quad \Lambda_+\Lambda_-|\lambda\mu\rangle = (\lambda + \mu)(\lambda - \mu + 1)|\lambda\mu\rangle, \quad (5.33)$$

die wegen der Positivität der Operatoren $\Lambda_-\Lambda_+$ und $\Lambda_+\Lambda_-$ die Beschränkung

$$-\lambda \leq \mu \leq \lambda \quad (5.34)$$

implizieren.

Mit (5.32) und (5.34) scheinen wir uns in einem Dilemma zu befinden. Denn die wiederholte Anwendung (5.32) von Auf- oder Absteigeoperatoren scheint den Eigenwert μ bei festem λ beliebig anwachsen zu lassen, während er nach (5.34) beschränkt ist. Der einzige Ausweg aus diesem Dilemma besteht nach (5.33) darin, dass die Zustände $\Lambda_\pm|\lambda\mu\rangle$ für $\mu = \pm\lambda$ verschwindende Norm haben. Dies hat aber weitreichende Konsequenzen, weil der Eigenwert μ sich dann zwischen $-\lambda$ und λ in ganzen Schritten bewegen muss. Daher muss 2λ eine nichtnegative ganze Zahl $n = 0, 1, 2, \dots$ sein und jeder Wert des Parameters $\lambda = n/2$, der also nichtnegative ganzzahlige oder halbzahlige Werte annehmen kann, charakterisiert eine irreduzible Darstellung der Lie-Algebra. Da die Darstellung als Basis die Zustände mit $\mu = -\lambda, -\lambda + 1, \dots, \lambda$ hat, hat die Darstellung die Dimension $2\lambda + 1$.

Durch die Gleichungen (5.33) sind die Normquadrate der Zustände (5.32) gegeben. Die relativen Phasen benachbarter Zustände $|\lambda\mu\rangle$ und $|\lambda(\mu \pm 1)\rangle$ müssen durch eine Konvention festgelegt werden. Es ist üblich, diese Phasen so zu wählen, dass

$$\Lambda_\pm|\lambda\mu\rangle = \sqrt{\lambda(\lambda + 1) - \mu(\mu \pm 1)}|\lambda(\mu \pm 1)\rangle. \quad (5.35)$$

Damit sind die Basismatrizen nach (5.30,31,35) durch

$$\begin{aligned} \Lambda_3^{(\lambda)}(\mu, \nu) &= \mu \delta_{\mu, \nu} \\ \Lambda_\pm^{(\lambda)}(\mu, \nu) &= \sqrt{\lambda(\lambda + 1) - \mu\nu} \delta_{\mu \pm 1, \nu} \end{aligned} \quad (\mu, \nu = -\lambda, -\lambda + 1, \dots, \lambda) \quad (5.36)$$

gegeben. Man nennt die so durch die Phasenkonvention (5.35) festgelegte Darstellung die **Standarddarstellung**.

Aus jeder Darstellung $\Lambda^{(\lambda)}$ der Lie–Algebra (5.22) wollen wir mittels (5.21) eine Darstellung der Drehgruppe erzeugen, die durch die Formel

$$D^{(\lambda)}(\varphi) = e^{-i\varphi \cdot \Lambda} \quad (5.37)$$

gegeben ist. Man würde dabei erwarten, dass eine Drehung um den Winkel $\varphi = 2\pi$ äquivalent zur Drehung um den Winkel $\varphi = 0$ ist und deshalb die Einheitsmatrix ergeben sollte. Es gilt jedoch $e^{-2\pi im} = 1$ nur für ganzzahlige m , während man für halbzahlige m den Wert $e^{-2\pi im} = -1$ erhält. Wir erschließen daraus die Gleichung

$$\boxed{D^{(\lambda)}(2\pi) = (-1)^{2\lambda}}, \quad (5.38)$$

die für beliebige Richtungen der Drehachse gilt. Das bedeutet, dass die globale Erweiterung (5.37) der lokalen Darstellung (5.19) nur für ganzzahlige λ eine Darstellung der Drehgruppe \mathfrak{v}_3 ist, deren irreduzible Darstellungen wir gesucht hatten. Für alle halbzahligen Werte von λ definiert (5.37) eine größere Gruppe, die man die **universelle Überlagerungsgruppe** der Drehgruppe nennt und die durch die Darstellung $D^{(1/2)}$ exemplarisch beschrieben wird. Diese Darstellung ist die Gruppe aller eigentlich unitären zweidimensionalen Matrizen, die man auch **SU(2)** nennt. Sie ist eine Verdopplung der ursprünglichen Drehgruppe, die mit jeder Matrix D auch die Matrix $-D$ enthält. Das Zentrum Z von SU(2) besteht aus der Einheitsmatrix E und $-E$. Die Faktorgruppe $SU(2)/Z$ ist isomorph zu O(3). Die Abbildung, die jedem Paar $(D^{(1/2)}, -D^{(1/2)})$ von Matrizen aus SU(2) die Matrix $D^{(1)}$ aus O(3) mit denselben Eulerschen Winkeln zuordnet, ist ein Epimorphismus von SU(2) auf O(3).

Die irreduziblen Darstellungen mit ganzzahligem λ können auch als irreduzible Darstellungen der Überlagerungsgruppe aufgefasst werden, wenn man die beiden Elemente $D^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma)$ und $-D^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = D^{(1/2)}(\alpha+2\pi, \beta, \gamma)$ durch dieselbe Matrix $D^{(\lambda)}(\alpha, \beta, \gamma)$ darstellt. Zur einheitlichen Beschreibung der ganz- und halbzahligen Darstellungen sollte man auch das homogene Maß (5.15,18) in ein Maß auf der Überlagerungsgruppe umwandeln, indem man den Eulerschen Winkel α bis 4π laufen lässt. Dies hat die Gestalt

$$\boxed{\langle \Phi(\alpha, \beta, \gamma) \rangle_{SU(2)} = \int_0^{4\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma \frac{\sin \beta}{16\pi^2} \Phi(\alpha, \beta, \gamma)} \quad (5.39)$$

In vielen Anwendungen wird das Maß von Klassenfunktionen gebildet, die von den Eulerschen Winkeln nur über die Relation (5.13) abhängen. Man kann dann die Dreifachintegration des Maßes (5.39) auf eine Einfachintegration über den Drehwinkel φ umwandeln. Da φ nur vom Cosinus von $(\alpha+\gamma)/2$ abhängt, reduziert man im ersten Schritt die beiden Integrationen über α und γ auf eine Integration über die Variable $\delta = (\alpha + \gamma)/2$. Es erweist sich als vorteilhaft, auch die Integration über γ bis nach 4π zu verdoppeln, damit die zweite Substitutionsvariable

$\eta = \alpha - \gamma$ einfachere Grenzen bekommt. Am Ende kann man die δ -Integration wieder auf das Intervall $[0, \pi]$ falten und erhält die Ersetzung

$$\int_0^{4\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\gamma \rightarrow 8\pi \int_0^\pi d\delta.$$

Im zweiten Schritt substituiert man mittels $\cos(\varphi/2) = \cos(\beta/2) \cos \delta$ die β -Integration in eine φ -Integration, wobei das Intervall $0 < \varphi < \pi$ durch $0 < \delta < \pi/2$ und das Intervall $\pi < \varphi < 2\pi$ durch $\pi/2 < \delta < \pi$ abgedeckt wird. Eine Verdopplung des Integrationsintervalls auf $0 < \varphi < 4\pi$ ist für ganz allgemeine Klassenfunktionen $\Psi(\varphi)$ notwendig. Für Klassenfunktion $\Phi(\cos \frac{\varphi}{2})$ ergibt sich jedoch schließlich das homogene Maß

$$\boxed{\langle \Phi(\cos \frac{\varphi}{2}) \rangle_{SU(2)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \Phi(\cos \frac{\varphi}{2}) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} \Phi(x).} \quad (5.40)$$

Da alle Drehungen mit einem Drehwinkel φ in einer Klasse liegen, kann man die Charaktere der obigen irreduziblen Darstellungen als Spur der Diagonalmatrix $D_3^{(\lambda)}(\varphi)$ in Form einer geometrischen Reihe berechnen und erhält die Formel

$$\chi^{(\lambda)}(\varphi) = \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} e^{-i\varphi\mu} = \frac{e^{i\varphi(\lambda+1/2)} - e^{-i\varphi(\lambda+1/2)}}{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}} = \frac{\sin \varphi(\lambda + 1/2)}{\sin \varphi/2}, \quad (5.41)$$

nach der die Charaktere 2π -periodisch sind, sodass auf sie das Maß (5.40) angewandt werden kann. Angesichts (5.38) erhält man für die Charaktere zum Winkel $\varphi = 2\pi$ die Formel

$$\chi^{(\lambda)}(2\pi) = (-1)^{2\lambda} (2\lambda + 1), \quad (5.42)$$

die noch einmal die Notwendigkeit der Erweiterung auf die Überlagerungsgruppe für halbzahlige λ unterstreicht.

Die rechten Ausdrücke in Gleichung (5.41) lassen sich als Polynome in der Variablen $\cos(\varphi/2)$ schreiben, die eng mit den **Tschebyscheff-Polynomen zweiter Art** $U_n(x)$ zusammenhängen, denn es gilt

$$\chi^{(\lambda)}(\varphi) = U_{2\lambda}(\cos \frac{\varphi}{2}). \quad (5.43)$$

Die Polynome $U_n(x)$ erzeugt man aus der Rekursion

$$U_{n+1}(x) = 2x U_n(x) - U_{n-1}(x) \quad (U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x). \quad (5.44)$$

Sie haben die Orthonormierungseigenschaft

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} U_m(x) U_n(x) = \delta_{mn}. \quad (5.45)$$

Die Charaktere sind explizit durch die Formel

$$\chi^{(\lambda)}(\varphi) = \sum_{m=0}^{[\lambda]} \binom{2\lambda - m}{m} (-1)^m \left(2 \cos \frac{\varphi}{2}\right)^{2(\lambda-m)} \quad (5.46)$$

gegeben. Sie erfüllen angesichts von (5.45) die Orthonormierungsbeziehungen (3.34) mit dem Maß (5.40).

Die Multiplikationsregeln für die irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe werden in den Lehrbüchern zur Quantenmechanik durchweg anhand der Lie–Algebra (5.22) diskutiert. Wir können sie hier aus einer Formel für die Tschebyscheff–Polynome $U_n(x)$ gewinnen, die folgendes besagt:

$$U_n(x) U_m(x) = \sum_{k=0}^m U_{n-m+2k}(x) \quad (n \geq m). \quad (5.47)$$

Aus Gleichung (5.43) und mittels des homogenen Maßes (5.40) folgt daraus sofort die Multiplikationsregel

$$D^{(\nu)} D^{(\mu)} = \sum_{\lambda=0}^{2\mu} D^{(\nu-\mu+\lambda)} \quad (\nu \geq \mu). \quad (5.48)$$

6. Die Doppelpunktgruppen

Die in Kapitel 5 diskutierten Drehgruppen bestimmen das Transformationsverhalten von skalaren Feldern und von Tensorfeldern ganzzahliger Stufe. Wie wir in der obigen Diskussion der Drehgruppe $SO(3) = \mathfrak{v}_3$ gesehen haben, ist für die in der Quantenmechanik von Fermionen wichtigen **Spinorfelder** mit Spin $S = 1/2$ die Überlagerungsgruppe $SU(2)$ relevant. Damit sind für Spinorfelder auch nicht die in den Kapiteln 2 und 5 vorgestellten Punktgruppen zuständig, sondern die entsprechenden Untergruppen der Gruppe $SU(2)$, die man **Doppelpunktgruppen** nennt.

Die irreduziblen Darstellungen der Doppelpunktgruppen

Die infinitesimalen Erzeugenden von $SU(2)$ sind die Paulimatizen $s_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ mit den σ -Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Für die Konstruktion einer der Punktgruppe P entsprechenden Doppelgruppe $P^{(d)}$ bestimmt man für ein minimales Generatorensystem mit den Gleichungen (5.12) die Eulerschen Winkel (α, β, γ) und bildet damit die $SU(2)$ -Matrizen

$$D^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = D_3^{(1/2)}(\alpha) D_1^{(1/2)}(\beta) D_3^{(1/2)}(\gamma), \quad (6.2)$$

wobei die speziellen $SU(2)$ -Matrizen

$$D_3^{(1/2)}(\alpha) = e^{-i\alpha s_3}, \quad D_1^{(1/2)}(\beta) = e^{-i\beta s_1} \quad (6.3)$$

verwendet wurden. Aus den Generatoren erzeugt man dann die ganze Doppelpunktgruppe durch iterative Multiplikation der Generatoren. Die damit erhaltene zweidimensionale Darstellung der Doppelpunktgruppe nennt man die **Spinordarstellung**.

Die Ordnung einer Doppelpunktgruppe $P^{(d)}$ ist doppelt so groß wie die Ordnung von P , weil sie außer den $SU(2)$ -Matrizen mit den Eulerschen Winkeln der $O(3)$ -Matrizen, die wir die **positiven Elemente der Doppelgruppe** nennen wollen, zusätzlich, wie im Anschluss an Gleichung (5.38) beschrieben, die mit -1 multiplizierten enthält, die wir die **negativen Elemente** nennen. Das Urbild einer Klasse von P hat daher die doppelte Ordnung und kann entweder selbst eine Klasse von $P^{(d)}$ sein oder in ein Paar von Klassen von $P^{(d)}$ mit unveränderter Ordnung zerfallen. Im ersten Fall nennen wir die Klasse von $P^{(d)}$ eine **verdoppelte Klasse** und im zweiten Fall sprechen wir von einem **Klassenpaar** von $P^{(d)}$ und nennen die Klasse mit den positiven Elementen die **positive Klasse** und die mit den negativen Elementen die **negative Klasse** des Klassenpaars. Da verdoppelte Klassen mit jedem positiven Element auch das entsprechende negative Element

enthalten, müssen sie spurfrei sein. Spurfrei sind in $SU(2)$ nur die Drehungen um den Winkel π , sodass nur solche Drehungen verdoppelte Klassen bilden können. Allerdings werden nicht alle derartigen Klassen verdoppelt (siehe die Klasse der Ordnung $n = 2m + 1$ in D_n). Man bezeichnet die Klassen der Doppelgruppe mit demselben Symbol wie die Klasse der einfachen Gruppe und unterscheidet die negative Klasse eines Klassenpaars durch einen Strich '. Wenn $n_P^{(KP)}$ die Zahl der Klassenpaare ist, gilt für die Klassenzahl $q_P^{(d)}$ von $P^{(d)}$ die Gleichung

$$q_P^{(d)} = q_P + n_P^{(KP)}. \quad (6.4)$$

Man erhält offenbar q_P irreduzible Darstellungen der Doppelpunktgruppe $P^{(d)}$ aus den irreduziblen Darstellungen von P , indem man beiden $P^{(d)}$ -Urbildern eines Elements von P einfach die Darstellungsmatrix des Elements von P zuordnet. Diese irreduziblen Darstellungen nennen wir **alte irreduzible Darstellungen**. Für die Charaktere der alten Darstellungen gilt dann dieselbe Zuordnung. Die weiteren $n_P^{(KP)}$ irreduziblen Darstellungen von $P^{(d)}$ nennt man **neue irreduzible Darstellungen**. Sie haben die Eigenschaft, dass jedem Elementpaar $(D, -D)$ aus einem Klassenpaar ein $SU(2)$ -Matrizenpaar $(D^{(1/2)}, -D^{(1/2)})$ zugeordnet ist und jedem Element aus einer verdoppelten Klasse eine spurfreie $SU(2)$ -Matrix. Die Charaktere der neuen irreduziblen Darstellungen sind daher $(\chi, -\chi)$ für alle Klassenpaare und 0 für alle verdoppelten Klassen. Wir fassen das obige zusammen in

Satz 6.1:

Den q_P Klassen einer Punktgruppe P entsprechen $q_P^{(d)}$ Klassen ihrer Doppelgruppe $P^{(d)}$, die entweder verdoppelte Klassen von P sind oder Klassenpaare, die sich aus einer Klasse von P ergeben. Mit der Zahl $n_P^{(KP)}$ von Klassenpaaren ergibt Gleichung (6.4) die Zahl $q_P^{(d)}$ der Klassen und damit die Zahl der irreduziblen Darstellungen von $P^{(d)}$. Unter den irreduziblen Darstellungen von $P^{(d)}$ sind q_P alte, die identische Darstellungsmatrizen für Partner in Klassenpaaren haben, und $n_P^{(KP)}$ neue, deren Darstellungsmatrizen sich bei Partnern aus Klassenpaaren im Vorzeichen unterscheiden und bei Elementen aus verdoppelten Klassen spurfrei sind. Daraus ergeben sich die oben beschriebenen offensichtlichen Eigenschaften der Charaktere der alten und der neuen irreduziblen Darstellungen.

Zur Berechnung der Charaktere der Doppelpunktgruppen kann man das in Satz 3.21 genannte Gleichungssystem (3.54) verwenden, für das man die Klassenmultiplikationskoeffizienten braucht. Da man mit diesen Koeffizienten nach Satz 1.7 auch die Kommutatorgruppe bestimmen kann, findet man mit Satz 3.17 die Anzahl der eindimensionalen Darstellungen von $P^{(d)}$. Diese Kenntnis erlaubt für alle eigentlichen Punktgruppen die eindeutige Ermittlung der Dimensionen der neuen Darstellungen mittels des Satzes 3.10. Mit dieser Zusatzinformation ergeben sich aus der Lösung von (3.54) eindeutige Charaktertafeln für alle eigentlichen Doppelpunktgruppen, wenn man die Orthonormierung der Charaktere und die in Satz

6.1 genannten Eigenschaften beachtet. Im folgenden geben wir die Ergebnisse dieser Lösung für alle eigentlichen Punktgruppen an.

Die zyklischen Doppelgruppen $C_n^{(d)}$

Da C_n vom Rang 1 ist mit dem Generator $C(\varphi_n)$ der Ordnung n , hat der zugeordnete Generator in $SU(2)$ die Ordnung $2n$ und $C_n^{(d)}$ ist isomorph zur Punktgruppe C_{2n} . Die positiven ($K_{2\kappa-1}$) und negativen ($K_{2\kappa}$) Klassen sind (D_n steht für $D^{(1/2)}(\varphi_n)$)

$$K_{2\kappa-1} = \{D_n^{\kappa-1}\}, K_{2\kappa} = K'_{2\kappa-1} = \{D_n^{n+\kappa-1}\} = \{-D_n^{\kappa-1}\} \quad (\kappa = 1, \dots, n). \quad (6.5)$$

Die irreduziblen Darstellungsmatrizen der Doppelgruppe, die alle eindimensional und daher identisch mit ihren Charakteren sind, ergeben sich aus Tabelle 5.1 in Kapitel 5. Die alten Darstellungen haben die Charaktere

$$\chi_{2\kappa-1}^{(\nu)} = \chi_{2\kappa}^{(\nu)} = (\zeta_{2n}^{2(\nu-1)})^{\kappa-1} \quad (\kappa, \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (6.6)$$

und die neuen

$$\chi_{2\kappa-1}^{(n+\nu)} = -\chi_{2\kappa}^{(n+\nu)} = \begin{cases} (\zeta_{2n}^{2(\nu-1)})^{\kappa-1} & (n \text{ gerade}) \\ (-\zeta_{2n}^{2(\nu-1)})^{\kappa-1} & (n \text{ ungerade}) \end{cases} \quad (\kappa, \nu = 1, 2, \dots, n). \quad (6.7)$$

Obwohl die Doppelpunktgruppen $C_n^{(d)}$ abelsch sind, zeigen sie in ihren irreduziblen Darstellungen einen Gerade–ungerade–Effekt, wie man in Gleichung (6.7) gesehen hat.

Die Dieder–Doppelgruppen $D_n^{(d)}$

Die Dieder–Doppelgruppe $D_n^{(d)}$ hat die Ordnung $4n$. Sie besteht aus $n+3$ Klassen, und zwar 2 Klassen der Ordnung 1, $n-1$ Klassen der Ordnung 2 sowie 2 Klassen der Ordnung n . Von ihren $n+3$ irreduziblen Darstellungen sind 4 eindimensional und $n-1$ zweidimensional. Damit scheint der Gerade–ungerade–Effekt von D_n hinsichtlich der Klassen und der irreduziblen Darstellungen (siehe die Tabellen 5.2 und 5.3) bei den Doppelgruppen nicht aufzutreten. Jedoch ist die Zahl der Klassenpaare und die Aufteilung der irreduziblen Darstellungen in alte und neue für gerade und ungerade n verschieden. Wir beschreiben daher im folgenden die beiden Fälle getrennt.

Für **gerade** $n = 2m$ wird eine der beiden Klassen der Ordnung 1 in D_n zu einem Klassenpaar von Klassen der Ordnung 1 und die andere zu einer verdoppelten Klasse der Ordnung 2. Die $m-1$ Klassen der Ordnung 2 in D_n werden allesamt zu Klassenpaaren der Ordnung 2 und die beiden Klassen der Ordnung m werden beide verdoppelt zu Klassen der Ordnung $n = 2m$. Die Gesamtzahl der Klassenpaare ist $n^{(KP)} = m$ und es gibt 3 einzelne Klassen. Interessant ist, dass die abelsche Gruppe D_2 zu einer **nichtabelschen Doppelgruppe** wird.

Für gerade $n = 2m$ ergeben die 4 eindimensionalen und die $m - 1$ zweidimensionalen Darstellungen von D_n 4 alte eindimensionale und $m - 1$ alte zweidimensionale Darstellungen. Die $n^{(KP)} = m$ neuen Darstellungen sind alle zweidimensional. Die erste neue zweidimensionale Darstellung Γ_{4+m} ist identisch mit der Spinordarstellung $D_{2m}^{(1/2)}$.

Tabelle 6.1: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von $D_{n=2m}^{(d)}$

$\mu = 1, \dots, m-1$ $\nu = 1, \dots, m$	e	e'	$C_n^\kappa (1 \leq \kappa \leq m-1)$	$C_n^{\prime\kappa}$	C_n^m	U_u	U_g
	1	1	2	2	2	n	n
Γ_1	1	1	1	1	1	1	1
Γ_2	1	1	1	1	1	-1	-1
Γ_3	1	1	$(-1)^\kappa$	$(-1)^\kappa$	$(-1)^m$	1	-1
Γ_4	1	1	$(-1)^\kappa$	$(-1)^\kappa$	$(-1)^m$	-1	1
$\Gamma_{4+\mu}$	2	2	$2 \cos(\frac{2\mu\kappa\pi}{n})$	$2 \cos(\frac{2\mu\kappa\pi}{n})$	$2(-1)^\mu$	0	0
$\Gamma_{m+3+\nu}$	2	-2	$2 \cos(\frac{(2\nu-1)\kappa\pi}{n})$	$-2 \cos(\frac{(2\nu-1)\kappa\pi}{n})$	0	0	0

Für **ungerade** $n = 2m + 1$ wird die (einzige) Klasse der Ordnung 1 zu einem Klassenpaar. Die m Klassen der Ordnung 2 werden alle zu $2m = n - 1$ Klassenpaaren und die (einzige) Klasse der Ordnung $2m + 1$ wird zu einem Klassenpaar von Klassen der Ordnung $2m + 1 = n$. Die Gesamtzahl der Klassenpaare ist $n^{(KP)} = m + 2$ und es gibt keine einzelnen Klassen.

Für ungerade $n = 2m + 1$ ergeben die beiden eindimensionalen und die m zweidimensionalen Darstellungen von D_n zwei alte eindimensionale und m alte zweidimensionale Darstellungen. Von den $n^{(KP)} = m + 2$ neuen Darstellungen sind 2 eindimensional und m zweidimensional. Die erste neue zweidimensionale Darstellung Γ_{m+4} ist auch hier identisch mit der Spinordarstellung $D_{2m+1}^{(1/2)}$.

Tabelle 6.2: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von $D_{n=2m+1}^{(d)}$

$\mu = 1, \dots, m$ $\nu = 1, \dots, m$	e	e'	$C_n^\kappa (1 \leq \kappa \leq m)$	$C_n^{\prime\kappa}$	U	U'
	1	1	2	2	n	n
Γ_1	1	1	1	1	1	1
Γ_2	1	1	1	1	-1	-1
$\Gamma_{2+\mu}$	2	2	$2 \cos(\frac{2\mu\kappa\pi}{n})$	$2 \cos(\frac{2\mu\kappa\pi}{n})$	0	0
Γ_{m+3}	1	-1	$(-1)^\kappa$	$-(-1)^\kappa$	i	$-i$
Γ_{m+4}	1	-1	$(-1)^\kappa$	$-(-1)^\kappa$	$-i$	i
$\Gamma_{m+4+\nu}$	2	-2	$2 \cos(\frac{(2\nu-1)\kappa\pi}{n})$	$-2 \cos(\frac{(2\nu-1)\kappa\pi}{n})$	0	0

Die Tetraeder–Doppelgruppe $T^{(d)}$

In der Doppelpunktgruppe zur Tetraedergruppe T werden die Klassen der Ordnung 1 und 4 aus T (siehe Tabelle (5.4)) zu Klassenpaaren und die Klasse der Ordnung 3 zu einer verdoppelten Klasse. Damit gibt es insgesamt 7 Klassen, 2 Klassen der Ordnung 1, 4 Klassen der Ordnung 4 und eine Klasse der Ordnung 6 und die Zahl der neuen Darstellungen, die alle zweidimensional sind, ist 3. Die Spinordarstellung von $T^{(d)}$ ist identisch mit Γ_5 .

Tabelle 6.3: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von $T^{(d)}$

	e	e'	$C(\varphi_3)$	$C'(\varphi_3)$	$C(-\varphi_3)$	$C'(-\varphi_3)$	$C(\varphi_2)$
	1	1	4	4	4	4	6
Γ_1	1	1	1	1	1	1	1
Γ_2	1	1	ζ_3	ζ_3	ζ_3^2	ζ_3^2	1
Γ_3	1	1	ζ_3^2	ζ_3^2	ζ_3	ζ_3	1
Γ_4	3	3	0	0	0	0	-1
Γ_5	2	-2	1	-1	1	-1	0
Γ_6	2	-2	ζ_3	$-\zeta_3$	ζ_3^2	$-\zeta_3^2$	0
Γ_7	2	-2	ζ_3^2	$-\zeta_3^2$	ζ_3	$-\zeta_3$	0

Die Oktaeder–Doppelgruppe $O^{(d)}$

In der Doppelpunktgruppe zur Oktaedergruppe O werden die Klassen e , $C(\pm\varphi_3)$ und $C(\pm\varphi_4)$ aus O (Tabelle (5.5)) zu Klassenpaaren und die Klassen $C^2(\pm\varphi_4)$ und $C(\pm\varphi_2)$ zu verdoppelten Klassen. Damit gibt es insgesamt 8 Klassen, 2 Klassen der Ordnung 1, 3 Klassen der Ordnung 6, 2 Klassen der Ordnung 8 und eine Klasse der Ordnung 12. Es gibt 3 neue Darstellungen, 2 zweidimensionale und eine vierdimensionale. Die Spinordarstellung ist identisch mit Γ_6 .

Tabelle 6.4: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von $O^{(d)}$

	e	e'	$C^2(\varphi_4)$	$C(\pm\varphi_4)$	$C'(\pm\varphi_4)$	$C(\pm\varphi_3)$	$C'(\pm\varphi_3)$	$C(\varphi_2)$
	1	1	6	6	6	8	8	12
Γ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
Γ_2	1	1	1	-1	-1	1	1	-1
Γ_3	2	2	2	0	0	-1	-1	0
Γ_4	3	3	-1	1	1	0	0	-1
Γ_5	3	3	-1	-1	-1	0	0	1
Γ_6	2	-2	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1	-1	0
Γ_7	2	-2	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	-1	0
Γ_8	4	-4	0	0	0	-1	1	0

Die Ikosaeder–Doppelgruppe $Y^{(d)}$

In der Doppelpunktgruppe zur Ikosaedergruppe Y werden die Klassen e , $C(\pm\varphi_5)$, $C^2(\pm\varphi_5)$ und $C(\pm\varphi_3)$ aus Y (siehe Tabelle (5.6)) zu Klassenpaaren und die Klasse $C(\pm\varphi_2)$ zu einer verdoppelten Klasse. Damit gibt es insgesamt 9 Klassen, 2 Klassen der Ordnung 1, 4 Klassen der Ordnung 12, 2 Klassen der Ordnung 20 und eine Klasse der Ordnung 30. Es gibt 4 neue Darstellungen, 2 zweidimensionale, eine vierdimensionale und eine sechsdimensionale. Die Spinordarstellung von $Y^{(d)}$ ist Γ_6 .

Tabelle 6.5: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von $Y^{(d)}$

	e	e'	C_5	C'_5	C_5^2	$C_5'^2$	C_3	C'_3	C_2
	1	1	12	12	12	12	20	20	30
Γ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Γ_2	3	3	$2 \cos(\frac{\pi}{5})$	$2 \cos(\frac{\pi}{5})$	$-2 \cos(\frac{2\pi}{5})$	$-2 \cos(\frac{2\pi}{5})$	0	0	-1
Γ_3	3	3	$-2 \cos(\frac{2\pi}{5})$	$-2 \cos(\frac{2\pi}{5})$	$2 \cos(\frac{\pi}{5})$	$2 \cos(\frac{\pi}{5})$	0	0	-1
Γ_4	4	4	-1	-1	-1	-1	1	1	0
Γ_5	5	5	0	0	0	0	-1	-1	1
Γ_6	2	-2	$2 \cos(\frac{\pi}{5})$	$-2 \cos(\frac{\pi}{5})$	$2 \cos(\frac{2\pi}{5})$	$-2 \cos(\frac{2\pi}{5})$	1	-1	0
Γ_7	2	-2	$-2 \cos(\frac{2\pi}{5})$	$2 \cos(\frac{2\pi}{5})$	$-2 \cos(\frac{\pi}{5})$	$2 \cos(\frac{\pi}{5})$	1	-1	0
Γ_8	4	-4	1	-1	-1	1	-1	1	0
Γ_9	6	-6	-1	1	1	-1	0	0	0

Die neuen Darstellungen der Doppelgruppen sind meist von zweiter Art, d.h. sie sind **nichtreell selbstkonjugiert** (siehe Satz 3.16), mit den einzigen Ausnahmen der nicht selbstkonjugierten, aber **zueinander konjugierten Paare** Γ_6 und Γ_7 von $T^{(d)}$, Γ_{m+3} und Γ_{m+4} von $D_{2m+1}^{(d)}$ sowie $\Gamma_{n+\mu+1}$ und $\Gamma_{2n+1-\mu}$ von $C_n^{(d)}$ für $1 \leq \mu \leq (n-1)/2$.

Erweiterung der Multiplikationstabellen auf Doppelpunktgruppen

Nach der Aufstellung der Charaktertabellen für die Doppelpunktgruppen erweitern wir im folgenden die Multiplikationstabellen in Kapitel 5 um die Produkte der neuen mit den alten und neuen irreduziblen Darstellungen. Benutzt werden dazu wie in Kapitel 5 die Gleichungen (3.64) und (3.72).

Die Multiplikationsregeln (5.5) für die **zyklischen Punktgruppen** $C_n^{(d)}$ sind zu ergänzen durch die Regeln:

neue ($1 \leq \nu \leq n$) \otimes alte ($1 \leq \mu \leq n$) Darstellungen

$$\Gamma_{n+\nu} \Gamma_\mu = \Gamma_{n+\nu+\mu-1}, \quad (6.8)$$

neue ($1 \leq \nu \leq n$) \otimes neue ($1 \leq \mu \leq n$) Darstellungen

$$\Gamma_{n+\nu} \Gamma_{n+\mu} = \begin{cases} \Gamma_{\nu+\mu} & (n \text{ gerade}) \\ \Gamma_{\nu+\mu-1} & (n \text{ ungerade}) \end{cases}. \quad (6.9)$$

Bei den **Diedergruppen** $D_n^{(d)}$ müssen wieder die Fälle gerader und ungerader n getrennt dokumentiert werden.

Für **gerade** $n = 2m$ ergeben sich die folgenden Regeln:

neue ($1 \leq \nu \leq m$) \otimes eindim. alte

$$\begin{aligned} \Gamma_{m+3+\nu} \Gamma_1 &= \Gamma_{m+3+\nu} \Gamma_2 = \Gamma_{m+3+\nu}, \\ \Gamma_{m+3+\nu} \Gamma_3 &= \Gamma_{m+3+\nu} \Gamma_4 = \Gamma_{2m+4-\nu}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

neue ($1 \leq \nu \leq m$) \otimes zweidim. alte ($1 \leq \mu < m$)

$$\begin{aligned} \Gamma_{m+3+\nu} \Gamma_{4+\mu} &= \begin{cases} \Gamma_{m+3+\nu-\mu} & (\mu < \nu) \\ \Gamma_{m+4+\mu-\nu} & (\mu \geq \nu) \end{cases} \\ &+ \begin{cases} \Gamma_{m+3+\mu+\nu} & (\mu + \nu \leq m) \\ \Gamma_{3m+4-\mu-\nu} & (\mu + \nu > m) \end{cases}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

neue ($1 \leq \mu \leq m$) \otimes neue ($1 \leq \nu \leq m$)

$$\begin{aligned} \Gamma_{m+3+\nu} \Gamma_{m+3+\mu} &= \begin{cases} \Gamma_1^- + \Gamma_2^+ & (\mu = \nu) \\ \Gamma_{4+|\mu-\nu|} & (\mu \neq \nu) \end{cases} \\ &+ \begin{cases} \Gamma_3^+ + \Gamma_4^+ & (\mu + \nu = m + 1) \\ \Gamma_{m+4-|m+1-\mu-\nu|}^+ & (\mu + \nu \neq m + 1) \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Für **ungerade** $n = 2m + 1$ ergeben sich die folgenden Regeln:

eindim. neue ($\nu = 1, 2$) \otimes eindim. alte ($\mu = 1, 2$)

$$\Gamma_{m+2+\nu} \Gamma_\mu = \Gamma_{m+3+|\mu-\nu|}, \quad (6.13)$$

eindim. neue ($\nu = 1, 2$) \otimes zweidim. alte ($1 \leq \mu \leq m$)

$$\Gamma_{m+2+\nu} \Gamma_{2+\mu} = \Gamma_{2m+5-\mu}, \quad (6.14)$$

zweidim. neue ($1 \leq \nu \leq m$) \otimes eindim. alte ($\mu = 1, 2$)

$$\Gamma_{m+4+\nu} \Gamma_\mu = \Gamma_{m+4+\nu}, \quad (6.15)$$

zweidim. neue ($1 \leq \nu \leq m$) \otimes zweidim. alte ($1 \leq \mu \leq m$)

$$\begin{aligned} \Gamma_{m+4+\nu} \Gamma_{2+\mu} &= \begin{cases} \Gamma_{m+3} + \Gamma_{m+4} & (\mu + \nu = m + 1) \\ \Gamma_{2m+5-|m+1-\mu-\nu|} & (\mu + \nu \neq m + 1) \end{cases} \\ &+ \begin{cases} \Gamma_{m+5+\mu-\nu} & (\nu \leq \mu) \\ \Gamma_{m+4+\nu-\mu} & (\nu > \mu) \end{cases}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

eindim. neue ($\nu = 1, 2$) \otimes eindim. neue ($\mu = 1, 2$)

$$\Gamma_{m+2+\nu} \Gamma_{m+2+\mu} = \Gamma_{2-|\mu-\nu|}^+, \quad (6.17)$$

eindim. neue ($\nu = 1, 2$) \otimes zweidim. neue ($1 \leq \mu \leq m$)

$$\Gamma_{m+2+\nu} \Gamma_{m+4+\mu} = \Gamma_{m+3-\mu}, \quad (6.18)$$

zweidim. neue ($1 \leq \nu \leq m$) \otimes zweidim. neue ($1 \leq \mu \leq m$)

$$\Gamma_{m+4+\nu} \Gamma_{m+4+\mu} = \begin{cases} \Gamma_1^- + \Gamma_2^+ & (\mu = \nu) \\ \Gamma_{2+|\mu-\nu|} & (\mu \neq \nu) \end{cases} + \begin{cases} \Gamma_{m+2-|m+1-\mu-\nu|}^+ & (\mu + \nu \leq m + 1) \\ \Gamma_{m+3-|m+1-\mu-\nu|}^+ & (\mu + \nu > m + 1) \end{cases}. \quad (6.19)$$

Die \pm -Signaturen gelten, auch wenn sie nicht explizit für die Fälle $\mu = \nu$ angebracht wurden, immer nur für diese Fälle.

Für die Gruppen $T^{(d)}$, $O^{(d)}$ und $Y^{(d)}$ erhält man aus den Tabellen 6.3-6.5 die folgenden Ergänzungen zu den Multiplikationstafeln (5.16-18).

Tabelle 6.6: Multiplikationstafelergänzung für $T^{(d)}$

	Γ_5	Γ_6	Γ_7
Γ_1	Γ_5	Γ_6	Γ_7
Γ_2	Γ_6	Γ_7	Γ_5
Γ_3	Γ_7	Γ_5	Γ_6
Γ_4	$\Gamma_5 + \Gamma_6 + \Gamma_7$	$\Gamma_5 + \Gamma_6 + \Gamma_7$	$\Gamma_5 + \Gamma_6 + \Gamma_7$
Γ_5	$\Gamma_1^- + \Gamma_4^+$	$\Gamma_2 + \Gamma_4$	$\Gamma_3 + \Gamma_4$
Γ_6	$\Gamma_2 + \Gamma_4$	$\Gamma_3^- + \Gamma_4^+$	$\Gamma_1 + \Gamma_4$
Γ_7	$\Gamma_3 + \Gamma_4$	$\Gamma_1 + \Gamma_4$	$\Gamma_2^- + \Gamma_4^+$

Tabelle 6.7: Multiplikationstafelergänzung für $O^{(d)}$

	Γ_6	Γ_7	Γ_8
Γ_1	Γ_6	Γ_7	Γ_8
Γ_2	Γ_7	Γ_6	Γ_8
Γ_3	Γ_8	Γ_8	$\Gamma_6 + \Gamma_7 + \Gamma_8$
Γ_4	$\Gamma_6 + \Gamma_8$	$\Gamma_7 + \Gamma_8$	$\Gamma_6 + \Gamma_7 + 2\Gamma_8$
Γ_5	$\Gamma_7 + \Gamma_8$	$\Gamma_6 + \Gamma_8$	$\Gamma_6 + \Gamma_7 + 2\Gamma_8$
Γ_6	$\Gamma_1^- + \Gamma_4^+$	$\Gamma_2 + \Gamma_5$	$\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5$
Γ_7	$\Gamma_2 + \Gamma_5$	$\Gamma_1^- + \Gamma_4^+$	$\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5$
Γ_8	$\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5$	$\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5$	$\Gamma_1^- + \Gamma_2^+ + \Gamma_3^- + 2\Gamma_4^+ + \Gamma_5^+ + \Gamma_5^-$

Tabelle 6.8: Multiplikationstafelergänzung für $Y^{(d)}$

	Γ_6	Γ_7	Γ_8	Γ_9
Γ_1	(6)	(7)	(8)	(9)
Γ_2	(6, 8)	(9)	(6, 8, 9)	(7, 8, 2 × 9)
Γ_3	(9)	(7, 8)	(7, 8, 9)	(6, 8, 2 × 9)
Γ_4	(7, 9)	(6, 9)	(8, 2 × 9)	(6, 7, 2 × 8, 2 × 9)
Γ_5	(8, 9)	(8, 9)	(6, 7, 8, 2 × 9)	(6, 7, 2 × 8, 3 × 9)
Γ_6	(1 ⁻ , 2 ⁺)	(4)	(2, 5)	(3, 4, 5)
Γ_7	(4)	(1 ⁻ , 3 ⁺)	(3, 5)	(2, 4, 5)
Γ_8	(2, 5)	(3, 5)	(1 ⁻ , 2 ⁺ , 3 ⁺ , 4 ⁺ , 5 ⁻)	(2, 3, 2 × 4, 2 × 5)
Γ_9	(3, 4, 5)	(2, 4, 5)	(2, 3, 2 × 4, 2 × 5)	(1 ⁻ , 2 × 2 ⁺ , 2 × 3 ⁺ , 4 ⁺ + 4 ⁻ , 5 ⁺ + 2 × 5 ⁻)

Subduzierte Darstellungen von $O(3)$ und $SU(2)$

In diesem Abschnitt stellen wir die durch alle eigentlichen Punktgruppen und deren Doppelgruppen subduzierten Darstellungen $D^{(\lambda,s)}$ der irreduziblen Darstellungen (5.37) der vollen Drehgruppe $O(3)$ bzw. deren Überlagerungsgruppe $SU(2)$ vor. Wir weisen darauf hin, dass die subduzierten Darstellungen von $SU(2)$ nur neue irreduzible Darstellungen der Doppelpunktgruppen enthalten.

Man betrachte die Gleichung (3.88) sowie die Gleichung (5.41) der Charaktere von $D^{(\lambda)}$. Da der Parameter λ unendlich viele Werte $2\lambda = 0, 1, 2, \dots$ annehmen kann, gibt es zu jeder Punktgruppe eine unendliche Liste subduzierter Darstellungen. Wir werden daher zunächst eine einfache Regel ableiten, mit der diese unendlichen Listen auf endliche zurückgeführt werden.

Dazu betrachten wir die Charaktere (5.41) für die in den Punktgruppen vorkommenden diskreten Drehwinkel. Zunächst gilt für den Drehwinkel $\varphi = 0$

$$\chi^{(\lambda)}(0) = 2\lambda + 1. \quad (6.20)$$

Für den erzeugenden Drehwinkel $\varphi_n = 2\pi/n$ einer n -zähligen Drehachse finden wir angesichts der Formel (5.41) die Periodizitätsbeziehung

$$\chi^{(\lambda+n)}(\varphi_n) = \chi^{(\lambda)}(\varphi_n). \quad (6.21)$$

Die Charaktere aller Vielfachen des Winkels φ_n zeigen die gleiche Periode n . Wenn wir das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahligkeiten aller Drehachsen einer Punktgruppe P mit $n_z(P)$ bezeichnen, haben daher alle Charaktere zu nicht verschwindenden Drehwinkeln die Periode $n_z(P)$ und es gilt für die Charaktere der durch P subduzierten Darstellung $D^{(\lambda,s)}$

$$\chi^{(\lambda+n_z(P),s)}(\varphi) = \chi^{(\lambda,s)}(\varphi) + 2n_z(P) \delta_{\varphi,0}. \quad (6.22)$$

Nach Gleichung (3.43) ist der additive Zusatz in Gleichung (6.22) proportional zu den Charakteren der regulären Darstellung von P . Wenn P die Ordnung N und die q irreduziblen (im Falle von $P^{(d)}$ neuen) Darstellungen Γ_μ hat, folgt daher für die subduzierten Darstellungen mit Gleichung (3.45) die Periodizitätsbeziehung

$$D^{(\lambda+n_z(P),s)} = D^{(\lambda,s)} \oplus \frac{2n_z(P)}{N} \sum_{\mu=1}^q s^{(\mu)} \Gamma_\mu. \quad (6.23)$$

Diese Beziehung gilt auch für halbzahlige λ , wenn man nur hier unter der regulären Darstellung einer Doppelgruppe die Projektion auf den Unterraum ihrer neuen irreduziblen Darstellungen versteht. Für halbzahlige λ gibt es außerdem die Besonderheit, dass die Charaktere zweizähliger Drehachsen verschwinden,

$$\chi^{(\lambda)}(\pi) = 0 \quad (\lambda \text{ halbzahlig}). \quad (6.24)$$

Dies hat zur Folge, dass zweizählige Drehungen in Doppelgruppen bei der Berechnung der Periode $n_z^{(d)}$ nicht berücksichtigt werden müssen. Die folgende Tabelle gibt die Perioden für alle Punktgruppen und deren Doppelgruppen zusammen mit den Ordnungen N der einfachen Punktgruppen an.

Tabelle 6.9: Perioden der Kompatibilität

P	C_n	D_{2m}	D_{2m+1}	T	O	Y
n_z	n	$2m$	$2(2m+1)$	6	12	30
$n_z^{(d)}$	n	$2m$	$2m+1$	3	12	15
N	n	$4m$	$2(2m+1)$	12	24	60

Angesichts von Gleichung (6.23) brauchen wir im folgenden die subduzierten Darstellungen nur für $\lambda < n_z$ bzw. für $\lambda + \frac{1}{2} < n_z^{(d)}$ anzugeben. Für die Punktgruppenserien C_n und D_n und die entsprechenden Doppelgruppenserien werden wir sie anhand von Listen L bzw. $L^{(d)}$ der Länge n_z bzw. $n_z^{(d)}$ erläutern. Diese Listen sind so zu verstehen, dass für $D^{(\lambda-1)}$ und für $D^{(\lambda-\frac{1}{2})}$ die direkte Summe der ersten λ Elemente der Liste die subduzierte Darstellung ergibt. Durch Punkte „...“ angedeutete Serien in den Listen können für kleine n auch leer sein.

Die Liste für C_n hat n Elemente und lautet

$$L(C_n) = (\Gamma_1, \Gamma_2 \oplus \Gamma_n, \Gamma_3 \oplus \Gamma_{n-1}, \dots, \Gamma_n \oplus \Gamma_2). \quad (6.25)$$

Die Doppelgruppe $C_n^{(d)}$ hat n neue Darstellungen $\Gamma_{n+1}, \dots, \Gamma_{2n}$. Die Liste für $C_n^{(d)}$ bei geraden $n = 2m$ hat auch n Elemente und lautet

$$L(C_{2m}^{(d)}) = (\Gamma_{n+1} \oplus \Gamma_{2n}, \Gamma_{n+2} \oplus \Gamma_{2n-1}, \dots, \Gamma_{2n} \oplus \Gamma_{n+1}). \quad (6.26)$$

Die Liste für $C_n^{(d)}$ bei ungeraden $n = 2m + 1$ hat ebenfalls n Elemente und lautet

$$L(\mathcal{C}_{2m+1}^{(d)}) = (\Gamma_{n+m+1} \oplus \Gamma_{n+m+2}, \Gamma_{n+m} \oplus \Gamma_{n+m+3}, \dots, \Gamma_{n+2} \oplus \Gamma_{2n}, \Gamma_{n+1} \oplus \Gamma_{n+1}, \Gamma_{2n} \oplus \Gamma_{n+2}, \dots, \Gamma_{n+m+2} \oplus \Gamma_{n+m+1}). \quad (6.27)$$

In den Listen für D_n soll ein Eintrag der Gestalt Γ_1/Γ_2 bedeuten, dass für gerade λ die Darstellung Γ_1 und für ungerade λ die Darstellung Γ_2 zu verwenden ist. Für gerade $n = 2m$ hat D_{2m} 4 eindimensionale und $m - 1$ zweidimensionale irreduzible Darstellungen. Die Liste für gerade $n = 2m$ hat n Elemente und lautet

$$L(D_{2m}) = (\{\Gamma_1/\Gamma_2\}, \Gamma_5, \dots, \Gamma_{m+3}, \Gamma_3 \oplus \Gamma_4, \Gamma_{m+3}, \dots, \Gamma_5). \quad (6.28)$$

Für ungerade $n = 2m + 1$ hat D_{2m+1} 2 eindimensionale und m zweidimensionale irreduzible Darstellungen. Die Liste für D_n für ungerade $n = 2m + 1$ hat nach Tabelle (6.9) $2n$ Elemente. Die Verdopplung der Länge geht allerdings nur auf den Wechsel zwischen den beiden eindimensionalen Darstellungen Γ_1 und Γ_2 zurück und es gilt die verkürzte Periodizitätsbeziehung

$$D^{(\lambda+n,s)} = D^{(\lambda,s)} \oplus \sum_{\mu=1}^q s^{(\mu)} \Gamma_{\mu} \oplus (-1)^{\lambda} (\Gamma_2 \ominus \Gamma_1). \quad (6.29)$$

Die verkürzte Liste für D_{2m+1} hat dann wieder n Elemente und lautet

$$L(D_{2m+1}) = (\{\Gamma_1, \Gamma_2\}, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{m+2}, \Gamma_{m+2}, \dots, \Gamma_3). \quad (6.30)$$

Für gerade $n = 2m$ hat die Gruppe $D_{2m}^{(d)}$ m neue zweidimensionale irreduzible Darstellungen $\Gamma_{m+4}, \dots, \Gamma_{n+3}$. Die Liste für $D_n^{(d)}$ für gerade $n = 2m$ hat n Elemente und lautet

$$L(D_{2m}^{(d)}) = (\Gamma_{m+4}, \dots, \Gamma_{n+3}, \Gamma_{n+3}, \dots, \Gamma_{m+4}). \quad (6.31)$$

Für ungerade $n = 2m+1$ hat die Gruppe $D_{2m+1}^{(d)}$ 2 neue eindimensionale irreduzible Darstellungen $\Gamma_{m+2}, \Gamma_{m+3}$ und m neue zweidimensionale irreduzible Darstellungen $\Gamma_{m+4}, \dots, \Gamma_{n+2}$. Die Liste für $D_n^{(d)}$ für ungerade $n = 2m + 1$ hat n Elemente und lautet

$$L(D_{2m+1}^{(d)}) = (\Gamma_{m+4}, \dots, \Gamma_{n+2}, \Gamma_{n+2}, \dots, \Gamma_{m+4}, \Gamma_{m+3} \oplus \Gamma_{m+2}). \quad (6.32)$$

Für die Gruppen T , O und Y und ihre Doppelgruppen gibt es neben (6.23) auch verkürzte Periodizitätsbeziehungen. So gilt für T die Beziehung

$$D^{(\lambda+3,s)} = D^{(\lambda,s)} \oplus \begin{cases} 2\Gamma_4 & (\lambda \text{ gerade}) \\ \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4 & (\lambda \text{ ungerade}). \end{cases} \quad (6.33)$$

Zur Erinnerung: T hat 3 eindimensionale und 1 dreidimensionale irreduzible Darstellung (siehe Tabelle 5.4). Zur besseren Übersicht geben wir in der folgenden

Tabelle alle subduzierten Darstellungen an, die sich nicht durch Gleichung (6.23) erübrigen.

Tabelle 6.10: Subduzierte Darstellungen für T

$D^{(0)}$	$D^{(1)}$	$D^{(2)}$	$D^{(3)}$	$D^{(4)}$	$D^{(5)}$
Γ_1	Γ_4	$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4$	$\Gamma_1 \oplus 2\Gamma_4$	$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus 2\Gamma_4$	$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus 3\Gamma_4$

Man überzeugt sich leicht, dass die Tabelle die verkürzte Periodezität (6.33) bestätigt.

Die kurze Periode $n_z^{(d)} = 3$ bei $T^{(d)}$ ergibt die kurze Tabelle

Tabelle 6.11: Subduzierte Darstellungen für $T^{(d)}$

$D^{(\frac{1}{2})}$	$D^{(\frac{3}{2})}$	$D^{(\frac{5}{2})}$
Γ_5	$\Gamma_6 \oplus \Gamma_7$	$\Gamma_5 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7$

Zur Erinnerung: $T^{(d)}$ hat 3 zweidimensionale neue irreduzible Darstellungen (siehe Tabelle 6.3).

Für die Gruppe O mit $n_z = 12$ gibt es zwei verkürzte Perioden 6 und 4 über die Beziehungen ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$)

$$O^{(\lambda+6,s)} = O^{(\lambda,s)} \oplus \begin{cases} \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus 2\Gamma_5 & (\lambda = 4r, 4r + 1) \\ \Gamma_1 \oplus \Gamma_3 \oplus 2\Gamma_4 \oplus \Gamma_5 & (\lambda = 4r + 2, 4r + 3) \end{cases} \quad (6.34)$$

und

$$O^{(\lambda+4,s)} = O^{(\lambda,s)} \oplus \begin{cases} \Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus \Gamma_5 & (\lambda = 3r, 3r + 1) \\ \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_4 \oplus \Gamma_5 & (\lambda = 3r + 2). \end{cases} \quad (6.35)$$

Zur Erinnerung: O hat 2 eindimensionale, 1 zweidimensionale und 3 dreidimensionale irreduzible Darstellungen (siehe Tabelle 5.5). Wir geben trotz der verkürzten Perioden in der folgenden Tabelle wieder alle subduzierten Darstellungen bis $\lambda = 11$ an.

Tabelle 6.12: Subduzierte Darstellungen für O

$D^{(0,s)}$	$D^{(1,s)}$	$D^{(2,s)}$
Γ_1	Γ_4	$\Gamma_3 \oplus \Gamma_5$
$D^{(3,s)}$	$D^{(4,s)}$	$D^{(5,s)}$
$\Gamma_2 \oplus \Gamma_4 \oplus \Gamma_5$	$\Gamma_1 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus \Gamma_5$	$\Gamma_3 \oplus 2\Gamma_4 \oplus \Gamma_5$
$D^{(6,s)}$	$D^{(7,s)}$	$D^{(8,s)}$
$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus 2\Gamma_5$	$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus 2\Gamma_4 \oplus 2\Gamma_5$	$\Gamma_1 \oplus 2\Gamma_3 \oplus 2\Gamma_4 \oplus 2\Gamma_5$
$D^{(9,s)}$	$D^{(10,s)}$	$D^{(11,s)}$
$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus 3\Gamma_4 \oplus 2\Gamma_5$	$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus 2\Gamma_3 \oplus 2\Gamma_4 \oplus 3\Gamma_5$	$\Gamma_2 \oplus 2\Gamma_3 \oplus 3\Gamma_4 \oplus 3\Gamma_5$

Auch für die Doppelgruppe $O^{(d)}$ mit $n_z^{(d)} = 12$ gibt es zwei verkürzte Perioden 6 und 4 über die Beziehungen $(\lambda = 1/2, 3/2, 5/2, \dots)$

$$O^{(\lambda+6,s)} = O^{(\lambda,s)} \oplus \begin{cases} 2\Gamma_7 \oplus 2\Gamma_8 & (\lambda = 4r + 1/2) \\ \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus 2\Gamma_8 & (\lambda = 4r + 3/2, 4r + 7/2) \\ 2\Gamma_6 \oplus 2\Gamma_8 & (\lambda = 4r + 5/2) \end{cases} \quad (6.36)$$

und

$$O^{(\lambda+4,s)} = O^{(\lambda,s)} \oplus \begin{cases} 2\Gamma_8 & (\lambda = 3r + 1/2) \\ \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 & (\lambda = 3r + 3/2, 3r + 5/2). \end{cases} \quad (6.37)$$

Zur Erinnerung: $O^{(d)}$ hat 2 zweidimensionale und 1 vierdimensionale neue irreduzible Darstellungen (siehe Tabelle 6.4). Wir geben in der folgenden Tabelle alle subduzierten Darstellungen bis $\lambda = 23/2$ an.

Tabelle 6.13: Subduzierte Darstellungen für $O^{(d)}$

$D^{(1/2,s)}$	$D^{(3/2,s)}$	$D^{(5/2,s)}$	$D^{(7/2,s)}$
Γ_6	Γ_8	$\Gamma_7 \oplus \Gamma_8$	$\Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8$
$D^{(9/2,s)}$	$D^{(11/2,s)}$	$D^{(13/2,s)}$	$D^{(15/2,s)}$
$\Gamma_6 \oplus 2\Gamma_8$	$\Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus 2\Gamma_8$	$\Gamma_6 \oplus 2\Gamma_7 \oplus 2\Gamma_8$	$\Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus 3\Gamma_8$
$D^{(17/2,s)}$	$D^{(19/2,s)}$	$D^{(21/2,s)}$	$D^{(23/2,s)}$
$2\Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus 3\Gamma_8$	$2\Gamma_6 \oplus 2\Gamma_7 \oplus 3\Gamma_8$	$\Gamma_6 \oplus 2\Gamma_7 \oplus 4\Gamma_8$	$2\Gamma_6 \oplus 2\Gamma_7 \oplus 4\Gamma_8$

Die langen Perioden 30 bzw. 15 der Punktgruppen Y bzw. $Y^{(d)}$ rufen in besonderem Maße nach verkürzten Periodenbeziehungen. Für Y gilt

$$Y^{(\lambda+15,s)} = Y^{(\lambda,s)} \oplus \begin{cases} 2\Gamma_2 \oplus 2\Gamma_3 \oplus 2\Gamma_4 \oplus 2\Gamma_5 & (\lambda = 2r) \\ \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus 2\Gamma_4 \oplus 3\Gamma_5 & (\lambda = 2r + 1) \end{cases} \quad (6.38)$$

und

$$Y^{(\lambda+10,s)} = Y^{(\lambda,s)} \oplus \begin{cases} \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus 2\Gamma_5 & (\lambda = 3r, 3r + 1) \\ \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus 2\Gamma_4 \oplus \Gamma_5 & (\lambda = 3r + 2). \end{cases} \quad (6.39)$$

Zur Erinnerung: Y hat 1 eindimensionale, 2 dreidimensionale, 1 vierdimensionale und 1 fünfdimensionale irreduzible Darstellung (siehe Tabelle 5.6). Wir geben in der folgenden Tabelle alle subduzierten Darstellungen bis $\lambda = 11$ an, sodass alle weiteren Darstellungen mittels (6.39) bestimmt werden können.

Tabelle 6.14: Subduzierte Darstellungen für Y

$D^{(0,s)}$	$D^{(1,s)}$	$D^{(2,s)}$
Γ_1	Γ_2	Γ_5
$D^{(3,s)}$	$D^{(4,s)}$	$D^{(5,s)}$
$\Gamma_3 \oplus \Gamma_4$	$\Gamma_4 \oplus \Gamma_5$	$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_5$
$D^{(6,s)}$	$D^{(7,s)}$	$D^{(8,s)}$
$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_4 \oplus \Gamma_5$	$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus \Gamma_5$	$\Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus 2\Gamma_5$
$D^{(9,s)}$	$D^{(10,s)}$	$D^{(11,s)}$
$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus 2\Gamma_4 \oplus \Gamma_5$	$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus 2\Gamma_5$	$2\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus 2\Gamma_5$

Die Doppelgruppe $Y^{(d)}$ mit $n_z^{(d)} = 15$ hat eine verkürzte Periode 10 über die Beziehung ($\lambda = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$)

$$Y^{(\lambda+10,s)} = Y^{(\lambda,s)} \oplus \begin{cases} 2\Gamma_8 \oplus 2\Gamma_9 & (\lambda = 3r + 1/2) \\ \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus 2\Gamma_9 & (\lambda = 3r + 3/2, 3r + 5/2) \end{cases} \quad (6.40)$$

Zur Erinnerung: $Y^{(d)}$ hat 2 zweidimensionale, 1 vierdimensionale und 1 sechsdimensionale neue irreduzible Darstellung (siehe Tabelle 6.5). Wir geben in der folgenden Tabelle alle subduzierten Darstellungen bis $\lambda = 23/2$ an, sodass alle weiteren Darstellungen mittels (6.40) bestimmt werden können.

Tabelle 6.15: Subduzierte Darstellungen für $Y^{(d)}$

$D^{(1/2,s)}$	$D^{(3/2,s)}$	$D^{(5/2,s)}$	$D^{(7/2,s)}$
Γ_6	Γ_8	Γ_9	$\Gamma_7 \oplus \Gamma_9$
$D^{(9/2,s)}$	$D^{(11/2,s)}$	$D^{(13/2,s)}$	$D^{(15/2,s)}$
$\Gamma_8 \oplus \Gamma_9$	$\Gamma_6 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9$	$\Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9$	$\Gamma_8 \oplus 2\Gamma_9$
$D^{(17/2,s)}$	$D^{(19/2,s)}$	$D^{(21/2,s)}$	$D^{(23/2,s)}$
$\Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus 2\Gamma_9$	$\Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus 2\Gamma_9$	$\Gamma_6 \oplus 2\Gamma_8 \oplus 2\Gamma_9$	$\Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus 2\Gamma_8 \oplus 2\Gamma_9$

7. Lie–Gruppen

Nachdem wir in Kapitel 6 die Lie–Gruppe $SU(2)$ diskutiert haben, wenden wir uns in diesem Kapitel einer umfassenderen Behandlung von Lie–Gruppen am Beispiel der **speziellen unitären Gruppen $SU(n)$** zu. Eine umfassende Behandlung der Darstellungstheorie dieser Gruppen würde allerdings den Rahmen dieser Vorlesung sprengen. Wir beschränken uns daher auf die Behandlung der Beziehungen zwischen den Lie–Gruppen und ihren Lie–Algebren.

Wir betrachten den linearen Raum \mathcal{C}_n aller n –dimensionalen **Spaltenvektoren** aus komplexen Zahlen $|v\rangle = (v_1, \dots, v_n)$. Jedem solchen Spaltenvektor $|v\rangle$ ordnen wir einen adjungierten **Zeilenvektor** $\langle v| = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ zu, mit dem wir ein hermitesches positiv definites **Skalarprodukt** $\langle w|v\rangle = \sum_{\nu=1}^n w_\nu^* v_\nu$ definieren. Mit diesem Skalarprodukt wird \mathcal{C}_n zu einem **Hilbertraum**. Die Länge eines Vektors $l(v)$ wird durch $l(v) = \sqrt{\langle v|v\rangle}$ gegeben.

Wir betrachten weiter die Menge $U(n)$ aller komplexwertigen n –dimensionalen Matrizen, die die Länge jedes Vektors aus \mathcal{C}_n invariant lassen, d.h. für jedes $U \in U(n)$ und jedes $|v\rangle \in \mathcal{C}_n$ gilt

$$\langle v|U^\dagger U v\rangle = \langle v|v\rangle. \quad (7.1)$$

Indem man für je zwei Vektoren $|v\rangle$ und $|w\rangle$ aus \mathcal{C}_n die Invarianz der Längen der vier Vektoren $|v\rangle \pm |w\rangle$ und $|v\rangle \pm i|w\rangle$ nutzt, beweist man die Invarianz des Skalarproduktes, $\langle U w|U v\rangle = \langle w|v\rangle$, und damit die Beziehung $U^\dagger U = E$, wo E die n –dimensionale Einheitsmatrix ist. Damit ist wegen $(UV)^\dagger = V^\dagger U^\dagger$ auch jedes Produkt UV zweier Elemente aus $U(n)$ unitär und $U(n)$ eine Gruppe. Aus der Gruppeneigenschaft folgt, dass das Linksinverse U^\dagger zu U auch Rechtsinverses ist, d.h. es gilt auch $UU^\dagger = E$.

Mittels des Determinantenmultiplikationssatzes ergibt sich, dass alle $U \in U(n)$ die Eigenschaft $|\det U| = 1$ haben. Man kann darüber hinaus zeigen, dass alle Eigenwerte unitärer Matrizen den Betrag 1 haben. Denn unitäre Matrizen sind unitär diagonalisierbar. Da jeder Eigenvektor $|u\rangle$ mit $U|u\rangle = e_u|u\rangle$ invariante Länge hat, hat der Eigenwert e_u den Betrag 1. Wenn wir uns U mittels der unitären Matrix V diagonalisiert denken, $UV = VU_d$, lässt sich die Diagonalmatrix U_d der Eigenwerte als Exponentialfunktion $U_d = e^{iH_d}$ mit einer hermiteschen Diagonalmatrix H_d darstellen. Die Umkehrung der Diagonalisierung ergibt dann die Beziehung $U = e^{iH}$ mit der hermiteschen Matrix $H = V H_d V^\dagger$. Man nennt die Matrizen H **Erzeugende oder Generatoren** der Gruppe $U(n)$. Weiterhin gilt $\det U = \det U_d = e^{i\text{Sp}H_d} = e^{i\text{Sp}H}$.

Wir fassen das obige zusammen in

Satz 7.1:

Die längenerhaltenden Matrizen $U \in U(n)$ bilden eine Gruppe und haben die Eigenschaft $U^\dagger U = UU^\dagger = E$. Sie sind in der Form $U = e^{iH}$ darstellbar mit einer hermiteschen Matrix H als Generator. Ihre Eigenwerte haben den Betrag 1 und es gilt $\det U = e^{i\text{Sp}H}$ und damit auch $|\det U| = 1$.

Die Untermenge der speziellen unitären Matrizen $SU(n)$ besteht aus allen unitären Matrizen U mit der Nebenbedingung $\det U = 1$. Sie ist eine Untergruppe der Gruppe $U(n)$. In der Darstellung $U = e^{iH}$ folgt dann aus $\det U = e^{i\text{Sp}H}$, dass der Generator H spurfrei ist. Die Menge der Generatoren von $SU(n)$ hat die Eigenschaft, dass mit zwei Generatoren A und B auch die Matrix

$$D(A, B) = -D(B, A) = -i[A, B] \quad (7.2)$$

hermitesch und spurfrei und daher ein Generator ist. Der lineare Raum der Dimension $d_n = n^2 - 1$, den man über den reellen Zahlen aus den Generatoren von $SU(n)$ bildet, erhält mit dieser **antisymmetrischen Produktoperation** die Struktur einer **Lie–Algebra**, die man $\mathfrak{su}(n)$ nennt. Die Gruppe $SU(n)$ nennt man daher auch eine **Lie–Gruppe**. Man nennt d_n die **Ordnung der Lie–Gruppe $SU(n)$** . Die Diagonalmatrizen aus $\mathfrak{su}(n)$ bilden einen linearen Unterraum paarweise vertauschender Matrizen aus $\mathfrak{su}(n)$ maximaler Dimension $r_n = n - 1$. Derartige Unterräume nennt man **Cartan–Algebren** und deren Dimension r_n nennt man den **Rang der Lie–Gruppe $SU(n)$** . Wir fassen das obige zusammen in

Satz 7.2:

Die speziellen unitären Matrizen $U \in SU(n)$ bilden eine Untergruppe von $U(n)$. In ihrer Darstellung $U = e^{iH}$ sind die Generatoren spurfrei, $\text{Sp}H = 0$, und bilden die Lie–Algebra $\mathfrak{su}(n)$. Die Dimension $d_n = n^2 - 1$ von $\mathfrak{su}(n)$ nennt man die Ordnung von $SU(n)$ und die Dimension $r_n = n - 1$ ihrer Cartan–Unteralgebren nennt man den Rang von $SU(n)$.

Die **Äquivalenzklassen** K von $SU(n)$ erhält man durch Betrachtung der Eigenwerte ihrer Elemente U . Jede Klasse kann durch eine Diagonalmatrix aus $SU(n)$ mit den n Eigenwerten

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\gamma}) = (e^{i\gamma_1}, \dots, e^{i\gamma_n}) \quad (7.3)$$

repräsentiert werden. Dabei können die n Winkel γ_ν im Intervall $0 \leq \gamma_\nu < 2\pi$, da ihre Summe ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein muss, unter der Nebenbedingung

$$\sum_{\nu=1}^n \gamma_\nu = 2\pi\mu \quad (\mu = 0, 1, \dots, n-1) \quad (7.4)$$

variieren. Da gerade (und zwar nur gerade) Permutationen der n Koordinatenachsen von \mathcal{C}_n durch Permutationsmatrizen aus $SU(n)$ erzeugt werden, repräsentieren Winkelsysteme $\boldsymbol{\gamma}$, die sich durch gerade Permutationen ihrer n Elemente unterscheiden, dieselbe Klasse. Die Nebenbedingung (7.4) für $\mu = 0$ entspricht der **Klasse des Einselements** K_0 von $SU(n)$. Alle anderen Fälle $\mu = 1, \dots, n-1$ entsprechen zueinander disjunkten $(n-1)$ -parametrischen **Klassenfamilien** $K_\mu(\boldsymbol{\gamma})$. Die Nebenbedingung und die erwähnte Permutationssymmetrie prägen diesen Klassenfamilien für $n > 2$ eine komplexe topologische Struktur auf.

Für Kommutatoren (7.2) gelten die **Jacobi–Identität**

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (7.5)$$

und die **Produktrechenregeln**

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C], \quad [BC, A] = B[C, A] + [B, A]C. \quad (7.6)$$

Die Strukturen einer Lie-Gruppe und deren Lie-Algebra kann man dokumentieren, indem man eine Basis $\mathbf{F} = (F^{(1)}, \dots, F^{(d_n)})$ der Lie-Algebra wählt und alle ihre Elemente mit d_n reellen Parametern $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{d_n})$ mittels der Gleichung

$$H(\boldsymbol{\alpha}) = - \sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j F^{(j)} = - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{F} \quad (7.7)$$

parametrisiert. Dementsprechend werden alle Elemente von $SU(n)$ parametrisiert durch die Formel

$$U(\boldsymbol{\alpha}) = e^{iH(\boldsymbol{\alpha})} = e^{-i \sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j F^{(j)}} = e^{-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{F}}. \quad (7.8)$$

Die Struktur von $SU(n)$ ist durch ihre **Multiplikationsregeln** bestimmt, die sich in der Parametrisierung (7.8) als

$$\boxed{U(\boldsymbol{\alpha})U(\boldsymbol{\beta}) = U(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))} \quad (7.9)$$

darstellen, wodurch die **Multiplikationsfunktion** $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ definiert wird.

Die Struktur von $\mathfrak{su}(n)$ ist durch ihre Vertauschungsregeln bestimmt, die sich in der Parametrisierung (7.7) als

$$\boxed{[F^{(j)}, F^{(k)}] = i \sum_l f(j, k, l) F^{(l)},} \quad (7.10)$$

darstellen, wodurch die reellen, in ihren beiden ersten Indizes antisymmetrischen **Strukturkonstanten**,

$$f(j, k, l) = -f(k, j, l) \quad (7.11)$$

definiert werden.

Wir wollen zeigen, dass die Multiplikationsfunktion $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ von $SU(n)$ und die **Strukturkonstanten** $f(j, k, l)$ von $\mathfrak{su}(n)$ einander bedingen. Dazu betrachten wir zunächst die Generatoren

$$F^{(j)}(\boldsymbol{\beta}) = U(-\boldsymbol{\beta})F^{(j)}U(\boldsymbol{\beta}). \quad (7.12)$$

Um ihre Abhängigkeit von $\boldsymbol{\beta}$ zu berechnen, bilden wir die Ableitung

$$\frac{d}{dx} F^{(j)}(x\boldsymbol{\beta}) = i \sum_{k=1}^{d_n} \beta_k [F^{(k)}, F^{(j)}](x\boldsymbol{\beta}) = - \sum_{k,l=1}^{d_n} \beta_k f(k, j, l) F^{(l)}(x\boldsymbol{\beta}), \quad (7.13)$$

die uns noch einmal bestätigt, dass $F^{(j)}(x\boldsymbol{\beta})$ in der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(n)$ liegt. Mittels des Matrixsystems $A(\boldsymbol{\beta})$, das wir durch seine Matrixelemente

$$A_{j,l}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=1}^{d_n} \beta_k A_{j,l}^{(k)}, \quad A_{j,l}^{(k)} = -i f(k, j, l) \quad (7.14)$$

definieren, können wir dieses System von Differentialgleichungen als eine vektorielle Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \mathbf{F}(x\boldsymbol{\beta}) = -iA(\boldsymbol{\beta})\mathbf{F}(x\boldsymbol{\beta}) \quad (7.15)$$

schreiben, deren Lösung für $x = 1$ mit der Anfangsbedingung $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{F}$ durch

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}) = e^{-iA(\boldsymbol{\beta})} \mathbf{F} \quad (7.16)$$

gegeben ist. Damit haben wir gezeigt, dass die Abhängigkeit der Funktionen $F^{(j)}(\boldsymbol{\beta})$ von ihren Argumenten $\boldsymbol{\beta}$ durch die Strukturkonstanten bestimmt wird.

Mit den Matrizen $e^{-iA(\boldsymbol{\beta})}$ haben wir eine d_n -dimensionale Darstellung von $\mathrm{SU}(n)$ konstruiert, die man die **adjungierte Darstellung** nennt. Denn wenn wir mit $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ die Funktion

$$\mathbf{F}_\alpha(\boldsymbol{\beta}) = U(-\boldsymbol{\beta})U(-\boldsymbol{\alpha})\mathbf{F}U(\boldsymbol{\alpha})U(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})) \quad (7.17)$$

bilden, gilt mit (7.9,12,16)

$$e^{-iA(\boldsymbol{\alpha})}e^{-iA(\boldsymbol{\beta})} = e^{-iA(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))}. \quad (7.18)$$

Die adjungierte Darstellung ist eine **treue Darstellung** der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(n)$, d.h. die **Basiselemente $A^{(j)}$ sind linear unabhängig**. Denn nehmen wir einmal an, es gelte $\sum_j \alpha_j A^{(j)} = 0$. Dann impliziert (7.14) die Gültigkeit von $\sum_j \alpha_j f(j, k, l) = 0$ für alle k und l . Mit (7.10) und (7.11) impliziert dies weiter $[F^{(k)}, \sum_j \alpha_j F^{(j)}] = 0$ für alle k , d.h. es gäbe ein Element in $\mathfrak{su}(n)$, das mit allen Elementen von $\mathfrak{su}(n)$ vertauscht. Das ist aber wegen der linearen Unabhängigkeit der Basis $F^{(j)}$ nicht möglich außer für $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Wir halten dieses Ergebnis fest in

Satz 7.3:

Die adjungierte Darstellung ist **treu**, d.h. ihre Basiselemente sind linear unabhängig oder in Formeln, $A(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ ist nur für $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ möglich.

Die rein imaginären Matrizen $A^{(k)}$ sind allerdings hermitesch nur dann und genau dann, wenn $f(j, k, l)$ totalantisymmetrisch ist. Auf diesen Aspekt werden wir noch später zurückkommen (siehe die Gleichungen (7.30,31)).

Um eine Beziehung zwischen Multiplikationsfunktion und Strukturkonstanten zu gewinnen, betrachten wir als nächstes die Ableitung der Identität (7.9) nach dem Parameter α_j und erhalten

$$\sum_{l=1}^{d_n} \frac{\partial U(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_l} \frac{\partial \gamma_l}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial U(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} U(\boldsymbol{\beta}). \quad (7.19)$$

Wenn wir in dieser Gleichung β gleich $-\alpha$ setzen, sodass $\gamma = \mathbf{0}$ wird, erhalten wir wegen $\partial U(\gamma)/\partial \gamma_l|_{\beta=-\alpha} = -i F^{(l)}$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial U(\alpha)}{\partial \alpha_j} = -i \sum_{l=1}^{d_n} S_{j,l}(\alpha) F^{(l)} U(\alpha). \quad (7.20)$$

Dabei haben wir eine Matrix S durch ihre Matrixelemente

$$S_{j,l}(\alpha) = \left(\frac{\partial \gamma_l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_j} \right)_{\beta=-\alpha} \quad (7.21)$$

eingeführt und können die d_n Differentialgleichungen (7.20) in der Vektorgleichung

$$\frac{\partial U(\alpha)}{\partial \alpha} = -i S(\alpha) \mathbf{F} U(\alpha). \quad (7.22)$$

zusammenfassen. Die Ableitung in dieser Gleichung kann man auch explizit berechnen mittels der Formel

$$\frac{\partial U(\alpha)}{\partial \alpha} = -i \int_0^1 dx U(x \alpha) \mathbf{F} U((1-x) \alpha) = -i \int_0^1 dx \mathbf{F}(-x \alpha) U(\alpha), \quad (7.23)$$

sodass man mit (7.16) das Ergebnis

$$S(\alpha) = \int_0^1 dx e^{ixA(\alpha)} \quad (7.24)$$

erhält. Indem man diese Gleichung nach α_k differenziert und dann α gleich $\mathbf{0}$ setzt, findet man mit (7.14)

$$\left(\frac{\partial S_{j,l}(\alpha)}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha=\mathbf{0}} = -\frac{1}{2} f(j, k, l). \quad (7.25)$$

Schließlich ersetzt man in (7.19) die Ableitungen auf der linken bzw. rechten Seite durch die Ausdrücke in (7.23,16) bzw. (7.22) und gewinnt die Differentialgleichung

$$\int_0^1 dx e^{ixA(\gamma(\alpha, \beta))} \frac{\partial \gamma(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = S(\alpha), \quad (7.26)$$

deren Lösung mit der Anfangsbedingung $\gamma(\mathbf{0}, \beta) = \beta$ die Multiplikationsfunktion ergibt.

Zurückblickend haben wir jetzt die gewünschte Aussage bewiesen. Denn aus den Gleichungen (7.21) und (7.25) lernen wir, dass die Multiplikationsfunktion die Strukturkonstanten festlegt und aus (7.14), (7.24) und (7.26) lernen wir umgekehrt, dass die Strukturkonstanten die Multiplikationsfunktion festlegen. Dieser Sachverhalt impliziert auch, dass beliebige Darstellungen einer Lie-Gruppe und beliebige

Darstellungen einer Lie–Algebra einander gegenseitig bestimmen. Wir halten dieses Ergebnis fest in

Satz 7.4:

Die Multiplikationsfunktion einer Lie–Gruppe und die Strukturkonstanten ihrer Lie–Algebra bestimmen einander gegenseitig. Dies gilt auch für beliebige Darstellungen.

Man kann also insbesondere alle Darstellungen von $SU(n)$ aus Darstellungen von $su(n)$ gewinnen. Das gilt natürlich auch für die adjungierte Darstellung (7.18). Wir wollen trotzdem kurz explizit zeigen, dass deren Generatoren (7.14) die Vertauschungsregeln (7.10) erfüllen.

Mittels der Jacobi–Identität (7.5) gewinnt man für die Strukturkonstanten durch Betrachtung des Doppelkommutators

$$[F^{(l)}, [F^{(m)}, F^{(j)}]] = - \sum_{k,n} f(m, j, k) f(l, k, n) F^{(n)} \quad (7.27)$$

die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{d_n} (f(m, j, k) f(l, k, n) + f(j, l, k) f(m, k, n) + f(l, m, k) f(j, k, n)) = 0. \quad (7.28)$$

Mit dieser Beziehung kann man die folgende Rechnung durchführen,

$$\begin{aligned} [A^{(m)}, A^{(l)}]_{(j,n)} &\stackrel{(7.14)}{=} - \sum_k (f(m, j, k) f(l, k, n) - f(l, j, k) f(m, k, n)) \\ &\stackrel{(7.11)}{=} - \sum_k (f(m, j, k) f(l, k, n) + f(j, l, k) f(m, k, n)) \\ &\stackrel{(7.28)}{=} \sum_k f(l, m, k) f(j, k, n) \stackrel{(7.11,14)}{=} i \sum_k f(m, l, k) A_{j,n}^{(k)} \end{aligned}$$

und erhält damit tatsächlich die (7.10) entsprechende Gleichung

$$[A^{(m)}, A^{(l)}] = i \sum_k f(m, l, k) A^{(k)}. \quad (7.29)$$

Wie nach Satz 7.3 bemerkt, ist die Basis $A^{(j)}$ der adjungierten Darstellung im allgemeinen nur dann hermitesch, wenn die Strukturkonstanten totalantisymmetrisch sind. Tatsächlich gibt es für die Gruppen $SU(n)$ Basissysteme mit dieser Eigenschaft. Das folgende derartige Basissystem ist nach [Murray Gell–Mann](#) benannt und besteht aus $r_n = n - 1$ reellen diagonalen Matrizen,

$$\boxed{C_{\mu,\nu}^{(j)} = \frac{\delta_{\mu,\nu}}{\sqrt{2j(j+1)}} \left(\sum_{\kappa=1}^j \delta_{\kappa,j} - j \delta_{\mu,j+1} \right) \quad (j = 1 \dots, r_n),} \quad (7.30)$$

die eine Cartan–Unteralgebra aufspannen, sowie aus $(d_n - r_n)/2 = n(n - 1)/2$ Paaren von nichtdiagonalen hermiteschen Matrizen mit verschwindenden Diagonalelementen

$$1 \leq j < k \leq n : \quad \boxed{\begin{cases} F_{\mu,\nu}^{(j,k)} = \frac{1}{2}(\delta_{\mu,j}\delta_{\nu,k} + \delta_{\mu,k}\delta_{\nu,j}) \\ F_{\mu,\nu}^{(k,j)} = \frac{i}{2}(\delta_{\mu,j}\delta_{\nu,k} - \delta_{\mu,k}\delta_{\nu,j}). \end{cases}} \quad (7.31)$$

Die Existenz einer solchen Basis ist darauf zurückzuführen, dass die Gruppen $SU(n)$ **kompakte Lie–Gruppen** sind. Für kompakte Lie–Gruppen existiert ein homogenes Maß. Für den Spezialfall $SU(2)$ haben wir ein solches Maß in Kapitel 5 angegeben. Nach Satz 3.6 sind damit alle Darstellungen von $SU(n)$ äquivalent zu einer unitären Darstellung und damit nach Satz 3.5 vollreduzibel.

8. Die Permutationsgruppen S_n

Wir betrachten eine Menge von $n (\geq 2)$ Elementen, die in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind. Den Übergang in beliebige Reihenfolge derselben Menge von Elementen nennt man eine **Permutation**. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Elemente der Menge die ersten n natürlichen Zahlen sind und dass diese Zahlen in der vorgegebenen Reihenfolge aufsteigend angeordnet sind. Dann kann eine Permutation P durch die Abbildung

$$P(\nu) = m_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n) \quad (8.1)$$

oder durch ein Symbol der Form

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

dargestellt werden, wobei die Menge $\{m_\nu | \nu = 1, \dots, n\}$ aus den natürlichen Zahlen 1 bis n besteht. Wenn man ein Produkt zweier Permutationen P_1 und P_2 durch die Abbildung

$$(P_1 P_2)(\nu) = P_1(P_2(\nu)) \quad (8.3)$$

definiert, bildet die Menge aller Permutationen eine Gruppe der Ordnung $n!$, die man die **symmetrische Gruppe S_n** nennt. Das Einselement von S_n ist die identische Permutation $P_e(\nu) = \nu$ und das Inverse von $P(\nu) = m_\nu$ ist die Umkehrfunktion $P^{-1}(m_\nu) = \nu$.

Wir formulieren den folgenden

Satz 8.1:

Jede endliche Gruppe G der Ordnung n ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n .

Beweis:

Die Isomorphie folgt unter Benutzung der regulären Realisierung (1.8) von G als Abbildungsgruppe. Wir denken uns die n Elemente von G in einer beliebigen Reihenfolge angeordnet. Dann weist die Abbildung (1.8) jedem Element $g \in G$ umkehrbar eindeutig eine Permutation der Reihe der Gruppenelemente zu. \square

Eine elegante Methode zum **Auffinden von Untergruppen** von S_n besteht in dem folgenden Verfahren. Man betrachtet eine beliebige Funktion von n Variablen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und wendet die Permutationen aus S_n auf die n Variablen an. Dann bildet die Menge derjenigen Permutationen, die die Funktion f invariant lassen, eine Untergruppe von S_n .

Die Funktion

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq \mu, \nu \leq n} (x_\mu - x_\nu) \quad (8.4)$$

bleibt unter einer gewissen Untergruppe von S_n invariant, die man die **alternierende Gruppe** A_n nennt, und wechselt unter allen nicht zu A_n gehörenden Permutationen ihr Vorzeichen. Die Elemente von A_n nennt man **gerade Permutationen** und die anderen **ungerade Permutationen**. Als **Signatur einer Permutation** bezeichnet man die Funktion

$$\sigma(P) = \begin{cases} +1 & (P \text{ gerade}) \\ -1 & (P \text{ ungerade}). \end{cases} \quad (8.5)$$

Die speziellen Permutationen $T_{\mu\nu}$, deren einzige Wirkung darin besteht, die beiden Zahlen μ und ν zu vertauschen, nennt man **Transpositionen**. Man macht sich leicht klar, dass man jede Permutation erzeugen kann, indem man eine Reihe von Transpositionen hintereinander ausführt. Alle Transpositionen sind offenbar ungerade Permutationen. Daher enthalten Darstellungen gerader (ungerader) Permutationen durch Produkte von Transpositionen immer eine gerade (ungerade) Zahl von Faktoren. Durch Multiplikation der geraden Permutationen mit der Transposition T_{12} ordnet man jeder geraden Permutation umkehrbar eindeutig eine ungerade Permutation zu. Daher gibt es gleich viele gerade und ungerade Permutationen und die alternierende Gruppe A_n hat die Ordnung $n!/2$. Offensichtlich ist auch, dass A_n eine **invariante Untergruppe** von S_n ist. Wir halten fest:

Satz 8.2:

Die alternierende Gruppe A_n aller geraden Permutationen von n Elementen ist ein Normalteiler der symmetrischen Gruppe S_n mit Index 2.

Um die Konjugationsklassen von Permutationsgruppen charakterisieren zu können, führen wir die **Zyklenzerlegung** von Permutationen ein. Zu einer beliebig vorgegebenen Permutation P von n Elementen wählen wir dazu ein beliebiges Element m_1 aus und bilden die Folge $m_{\nu+1} = P(m_\nu)$, die periodisch ist, weil es eine natürliche Zahl k mit $m_{k+1} = m_1$ geben muss. Die endliche Folge paarweise verschiedener Zahlen $(m_1 m_2 \dots m_k)$ der Länge k , die zu jedem ihrer Elemente das nächstfolgende als Bildelement unter Anwendung von P angibt, nennen wir einen **Zyklus**. Indem wir das beschriebene Verfahren rekursiv auf die restlichen Elemente anwenden, erhalten wir eine Darstellung der ganzen Permutation P als Produkt von r elementfremden Zyklen. Durch Sortieren der Zyklen nach fallender Länge bringt man die Zyklendarstellung in eine **Normalform**. Als **Zyklusstruktur**

$$l = [k_1, k_2, \dots, k_{r(l)}] \quad (8.6)$$

bezeichnet man die Folge $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{r(l)} \geq 1$ der Zykluslängen.

Man erkennt jetzt sehr leicht, dass konjugierte Elemente $Q^{-1}PQ$ ($Q \in S_n$) zur Permutation P dieselbe Zyklusstruktur wie P haben. Die Konjugation ändert nur die Belegung der Zyklen mit den Zahlen 1 bis n . Mit geeignetem $Q \in S_n$ kann man tatsächlich jede mögliche Belegung erreichen. Daher sind die **Konjugationsklassen** von S_n eindeutig den Zyklusstrukturen zugeordnet und jede Klasse K_μ enthält alle möglichen Belegungen ihrer Zyklusstruktur. Bei der Berechnung der

Zahl der verschiedenen Belegungen hat man zu beachten, dass die i zyklischen Permutationen der Belegung eines Zyklus sowie die $(\mu_{\kappa,i})!$ Vertauschungen von $\mu_{\kappa,i}$ Zyklen gleicher Länge i bei festgehaltener Belegung aller Zyklen die Gesamtbelegung nicht ändern. Daher gilt für die Ordnung der Klasse K_{κ} die Formel

$$n_{\kappa} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i^{\mu_{\kappa,i}} \cdot (\mu_{\kappa,i})!)} \quad (8.7)$$

Da die Summe der Zyklenlängen gleich der Gruppenordnung n ist,

$$\sum_{\rho=1}^{r(l)} k_{\rho} = n, \quad (8.8)$$

entspricht jede Zyklenstruktur einer additiven Zerlegung von n in natürliche Zahlen. Solche Zerlegungen heißen **Partitionen** von n . Wir halten daher fest:

Satz 8.3:

Die Klassen der symmetrischen Gruppe S_n werden eindeutig durch die Partitionen von n charakterisiert.

Um in der Zyklendarstellung eine Permutation zu invertieren, braucht man nur in jedem Zyklus die Reihenfolge der Elemente umzukehren:

$$(m_1 m_2 \dots m_k)^{-1} = (m_k m_{k-1} \dots m_1). \quad (8.9)$$

Daraus folgt insbesondere, dass jede Permutation in der gleichen Klasse wie ihre Inverse liegt.

Ein Zyklus kann mittels der Formel

$$(m_1 m_2 \dots m_k) = T_{m_1 m_k} \dots T_{m_1 m_3} T_{m_1 m_2} \quad (8.10)$$

durch ein Produkt von Transpositionen ausgedrückt werden. Daraus entnehmen wir, dass die Signatur eines Zykluses durch

$$\sigma(m_1 m_2 \dots m_k) = (-1)^{k-1} \quad (8.11)$$

gegeben ist und die Signatur einer beliebigen Permutation $P \in S_n$ mit der Zyklenstruktur l der Länge $r(l)$ durch

$$\sigma(P) = (-1)^{n-r(l)}. \quad (8.12)$$

Die **Kommutatorgruppe** (siehe Definition 1.1) von S_n enthält offenbar nur gerade Permutationen und muss daher eine Untergruppe der alternierenden Gruppe A_n sein. Wir erinnern daran, dass die Kommutatorgruppe die kleinste Erweiterung der Menge aller Kommutatoren zur Untergruppe ist und wollen nachweisen, dass sie gleich der Gruppe A_n ist. Dazu betrachten wir zu drei beliebigen Elementen

λ, μ, ν den Kommutator zweier Transpositionen $T_{\lambda\nu}T_{\mu\nu}T_{\lambda\nu}T_{\mu\nu} = (\lambda\mu\nu)$, womit beliebige Zyklen der Länge $l = 3$ Elemente der Kommutatorgruppe sind. Mit dem Produkt $(\kappa\lambda\mu)(\lambda\mu\nu) = T_{\kappa\lambda}T_{\mu\nu}$ zweier solcher Zyklen gehören zur Kommutatorgruppe alle Produkte zweier elementfremder Transpositionen, aus denen man aber alle geraden Permutationen erzeugen kann, womit der Nachweis $(S_n)_K = A_n$ geführt ist.

Satz 8.4:

Die alternierende Gruppe A_n ist die Kommutatorgruppe der symmetrischen Gruppe S_n .

Da die Zahl der eindimensionalen irreduziblen Darstellungen einer Gruppe G nach Satz 3.16 gleich dem Index ihrer Kommutatorgruppe G_K ist, folgt aus dem Satz 8.4, dass S_n genau zwei solche Darstellungen hat.

Man kann dieses Ergebnis aber auch durch eine einfache direkte Betrachtung gewinnen und dabei die beiden eindimensionalen Darstellungen, für die man sich insbesondere im Rahmen der Quantenmechanik identischer Teilchen interessiert, explizit konstruieren. Man betrachtet dazu die Charaktere eindimensionaler Darstellungen für die **Klasse der Transpositionen** \mathcal{T} . Da jede Transposition zu sich selbst invers ist, $T_{\mu\nu}^2 = P_e$, können die Charaktere dieser Klasse nur die Werte $\chi(\mathcal{T}) = \pm 1$ annehmen. Mit dem Charakter der Transpositionen für eindimensionale Darstellungen sind aber die Charaktere aller Permutationen festgelegt und daher hat die Gruppe S_n genau 2 eindimensionale Darstellungen, die totalsymmetrische Darstellung $\chi(P) = 1$ (für alle $P \in S_n$) und die totalantisymmetrische Darstellung $\chi(P) = \sigma(P)$ (siehe Gleichung (8.5)). Wir halten fest:

Satz 8.5:

Die symmetrische Gruppe S_n hat genau zwei eindimensionale irreduzible Darstellungen, die totalsymmetrische Darstellung mit $\chi(P) \equiv 1$ und die totalantisymmetrische Darstellung mit $\chi(P) = \sigma(P)$.

Um die Zahl der Klassen und die damit übereinstimmende Zahl der irreduziblen Darstellungen von S_n bestimmen zu können, muss man die Zahl $p(n)$ der Partitionen von n berechnen (siehe dazu Anhang B). Die folgende Tabelle zeigt die Werte von $p(n)$ von $n = 1$ bis $n = 20$.

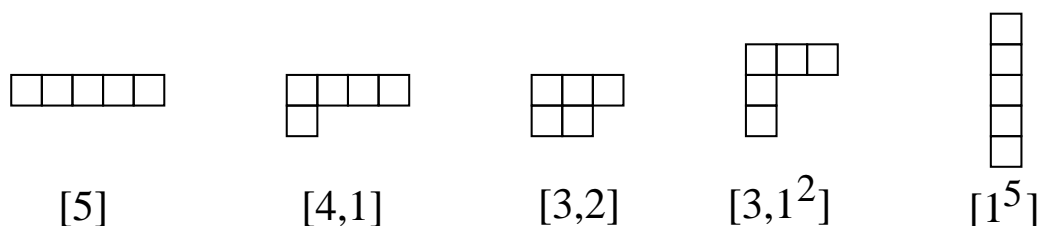
Tabelle 8.1: Anzahl $p(n)$ der Klassen von S_n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$p(n)$	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627

Um die **irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe** S_n zu finden, nutzen wir deren **reguläre Darstellung** (1.8), die nach Satz 3.14 jede s -dimensionale irreduzible Darstellung s -fach enthält. Es wird sich zeigen, dass den

Partitionen von n eindeutig irreduzible Darstellungen zugeordnet werden können, die paarweise inäquivalent zueinander sind. Da die Zahl der Partitionen von n gleich der Zahl der Klassen von S_n ist, hat man damit ein vollständiges System irreduzibler Darstellungen.

Zur besseren Veranschaulichung ist es üblich, die Zyklenstrukturen l graphisch durch **Young–Diagramme** zu repräsentieren. Man reiht dazu n quadratische Kästchen nach Vorgabe der Normalform einer Zyklenstruktur so in r Zeilen aneinander, dass die ρ -te Zeile aus l_ρ Kästchen besteht. Die folgende Figur zeigt einige Beispiele für Zyklenstrukturen der Zahl $n = 5$. (Eine μ -fache Wiederholung einer Zyklenlänge l_ν wird auch mit l_ν^μ bezeichnet.)



Wir werden in der Menge aller Partitionen von n eine **Ordnungsrelation** brauchen. Die nennen die Partition l größer bzw. kleiner als die Partition m , $l > m$ bzw. $l < m$, wenn der erste verschiedene Eintrag in der Zahlenreihe $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{r(l)}$ größer bzw. kleiner als der entsprechende Eintrag in $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{r(m)}$ ist. Wir werden die Zeile, an der die Relation zwischen l und m entschieden wird, die **diskriminierende Zeile** nennen. Wenn eine solche Zeile nicht existiert, müssen die beiden Partitionen identisch sein, $l = m$. Damit ist die **Menge der Partitionen vollständig geordnet**.

Es erweist sich auch als nützlich, jeder Partition l eine **assozierte Partition** \tilde{l} zuzuordnen, indem man in dem entsprechenden Young–Diagramm die Zeilen mit den Spalten vertauscht. So sind die beiden Partitionen $[5]$ und $[1^5] = [1, 1, 1, 1, 1]$ oder die beiden Partitionen $[3, 2]$ und $[2^2, 1] = [2, 2, 1]$ assoziiert zueinander und die Partition $[3, 1^2] = [3, 1, 1]$ ist zu sich selbst assoziiert. Wenn wir wie in Gleichung (8.6) die assoziierte Partition zu $l = [l_1, \dots, l_{r(l)}]$ mit $\tilde{l} = [\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_{\tilde{r}(l)}]$ bezeichnen, ist $\tilde{r}(l) = l_1$ die Zahl der Spalten von l , \tilde{l}_σ die Länge der Spalte σ im Young–Diagramm von l und es gilt $r(l) = \tilde{l}_1$.

Die Kästchen eines Young–Diagramms können auf $n!$ Arten mit den Zahlen 1 bis n durchnummeriert werden. Jede dieser Anordnungen nennt man ein **Young–Tableau**. Das Tableau, in dem die Zahlen in aufsteigender Reihenfolge in die Zeilen geschrieben sind, nennt man das **Normaltableau** $\Theta_l(P_e)$ der entsprechenden Zyklenstruktur l . Ein Tableau, in dem die Kästchen nach Vorgabe der Permutation P vertauscht sind, bezeichnet man mit $\Theta_l(P)$.

Die lineare Abbildung, die jede Permutation $P \in S_N$ auf dem Darstellungsraum \mathcal{R}_{S_n} der regulären Darstellung (1.8) erzeugt, bezeichnen wir hier ebenfalls einfach mit P . Wir werden im folgenden Operatoren, die auf \mathcal{R}_{S_n} wirken, zu jeder Partition l definieren. Wenn wir einen solchen Operator adjungieren, so ist dies im

Sinne von (1.10) bezüglich des Skalarproduktes (1.11) gemeint. Der Raum \mathcal{R}_{S_n} kann hier auch als linearer Raum über den reellen Zahlen verstanden werden.

Als **Zeileninvarianzgruppe** $U(l)$ bezeichnen wir die Untergruppe von S_n , unter der alle Kästchen in ihrer Zeile verbleiben. Diese Untergruppe hat die Ordnung

$$n_l = \prod_{\rho=1}^{r(l)} (l_\rho)! \quad (8.13)$$

und wir bilden damit einen Symmetrisierungsoperator

$$s_l = \frac{1}{n_l} \sum_{P \in U(l)} P \quad (8.14)$$

und einen Antisymmetrisierungsoperator

$$a_l = \frac{1}{n_l} \sum_{P \in U(l)} \sigma(P) P. \quad (8.15)$$

Als **Spalteninvarianzgruppe** $\tilde{U}(l)$ bezeichnen wir die Untergruppe von S_n , unter der alle Kästchen in ihrer Spalte verbleiben. Diese Untergruppe hat die Ordnung

$$\tilde{n}_l = \prod_{\sigma=1}^{\tilde{r}(l)} (\tilde{l}_\sigma)! \quad (8.16)$$

und die Symmetrisierer nennen wir

$$\tilde{s}_l = \frac{1}{\tilde{n}_l} \sum_{Q \in \tilde{U}(l)} Q \quad (8.17)$$

und

$$\tilde{a}_l = \frac{1}{\tilde{n}_l} \sum_{Q \in \tilde{U}(l)} \sigma(Q) Q. \quad (8.18)$$

Wichtige Eigenschaften der so definierten Operatoren fassen wir im folgenden Satz zusammen.

Satz 8.6:

- (a) Die oben definierten Symmetrisierer sind Projektionsoperatoren, d.h. sie sind hermitesch und idempotent,

$$\begin{aligned} s_l^\dagger &= s_l, & a_l^\dagger &= a_l, & \tilde{s}_l^\dagger &= \tilde{s}_l, & \tilde{a}_l^\dagger &= \tilde{a}_l, \\ s_l^2 &= s_l, & a_l^2 &= a_l, & \tilde{s}_l^2 &= \tilde{s}_l, & \tilde{a}_l^2 &= \tilde{a}_l, \end{aligned} \quad (8.19)$$

und es gilt weiter:

$$\begin{aligned} P s_l &= s_l P = s_l, & P a_l &= a_l P = \sigma(P) a_l & (P \in U(l)), \\ Q \tilde{s}_l &= \tilde{s}_l Q = \tilde{s}_l, & Q \tilde{a}_l &= \tilde{a}_l Q = \sigma(Q) \tilde{a}_l & (Q \in U(\tilde{l})). \end{aligned} \quad (8.20)$$

- (b) Wenn für zwei Partitionen entweder $l > m$ oder $\tilde{l} < \tilde{m}$ gilt, dann folgt für beliebige $P \in S_n$

$$\tilde{a}_m P s_l = s_l P \tilde{a}_m = \tilde{s}_m P a_l = a_l P \tilde{s}_m = 0. \quad (8.21)$$

- (c) Für alle Permutationen $R \in S_n$ gilt mit $P' \in U(l), Q' \in \tilde{U}(\tilde{l})$

$$\begin{aligned} s_l R \tilde{a}_l &= s_l \tilde{a}_l \cdot \begin{cases} \sigma(Q') & (R = P' Q') \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \\ \tilde{a}_l R s_l &= \tilde{a}_l s_l \cdot \begin{cases} \sigma(Q') & (R = Q' P') \\ 0 & (\text{sonst}). \end{cases} \end{aligned} \quad (8.22)$$

Beweis:

- (a) Die Hermitizität folgt daraus, dass die Operatoren P der regulären Darstellung (1.8) unitär sind und dass die Untergruppen $U(l)$ und $\tilde{U}(\tilde{l})$ mit jeder Permutation P auch die inverse Permutation $P^{-1} = P^\dagger$ enthalten. Die Idempotenz ist offensichtlich.
- (b) Vorangeschickt sei die Bemerkung, dass die beiden Bedingungen $l > m$ und $\tilde{l} < \tilde{m}$ einander nicht implizieren. Dies ist in der folgenden Figur durch ein Beispiel demonstriert, in dem $l > m$, aber nicht $\tilde{l} < \tilde{m}$ gilt. Da (8.21) invariant unter der Vertauschung von l mit \tilde{m} und von m mit \tilde{l} ist, brauchen wir den Beweis nur unter der Voraussetzung $l > m$ zu führen.



- Wir betrachten zunächst den Fall $P = P_e$. Die Bedingung $l > m$ hat ja zur Folge, dass es im Young-Diagramm von l eine diskriminierende Zeile gibt, die kürzer als die entsprechende Zeile von m ist. Daher liegt mindestens ein Kästchen aus der längeren Zeile von l in der folgenden Zeile des Young-Diagramms von m . Es gibt folglich zwei Kästchen μ und ν , die im Young-Diagramm von l in derselben Zeile und im Young-Diagramm von m in derselben Spalte stehen. Dies wird in der obigen Figur am Beispiel der beiden farbig markierten Kästchen gezeigt. Wir definieren mit

$$s_{\mu\nu} = \frac{e + T_{\mu\nu}}{2}, \quad a_{\mu\nu} = \frac{e - T_{\mu\nu}}{2}, \quad s_{\mu\nu} a_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} s_{\mu\nu} = 0 \quad (8.23)$$

zwei orthogonale Projektoren, die bezüglich der beiden Einträge μ und ν symmetrisieren bzw. antisymmetrisieren. Es gilt dann offensichtlich

$$s_l s_{\mu\nu} = s_{\mu\nu} s_l = s_l, \quad \tilde{a}_m a_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \tilde{a}_m = \tilde{a}_m, \quad (8.24)$$

woraus sich (8.21) für den Fall $P = P_e$ angesichts von

$$\begin{aligned} \tilde{a}_m P s_l &= \tilde{a}_m a_{\mu\nu} P s_{\mu\nu} s_l = 0 \\ s_l P \tilde{a}_m &= s_l s_{\mu\nu} P a_{\mu\nu} \tilde{a}_m = 0 \end{aligned} \quad (8.25)$$

und analoger Betrachtungen unter Vertauschung von Symmetrisierung und Antisymmetrisierung ergibt.

- Wenn P nun eine beliebige Permutation aus S_n ist, müssen wir zeigen, dass es zwei Kästchen μ und ν gibt, die vor der Anwendung von P beide gemeinsam in einer der Zeilen von l lagen und die nach der Anwendung von P gemeinsam in einer der Spalten von m liegen. Wenn dieser Nachweis gelingt, ergibt (8.25) wieder die Richtigkeit von (8.21).
- Für $P = P_e$ gab es ein solches Paar von Kästchen in der diskriminierenden Zeile des Young–Diagramms von l . **Nehmen wir also an**, dass nach Anwendung von P die Kästchen in der diskriminierenden Zeile von l alle in verschiedenen Spalten von m liegen. Da die diskriminierende Zeile und alle darunterliegenden Zeilen von m kürzer als die diskriminierende Zeile von l sind, muss nach der Permutation mindestens eins der Kästchen aus der diskriminierenden Zeile von l in einer Zeile von m oberhalb der diskriminierenden Zeile liegen. Damit ergibt sich für die Kästchen in dieser Zeile von l dasselbe Problem, das wir vorher mit der diskriminierenden Zeile von l hatten. Durch Wiederholung dieser Argumentation erhält man schließlich dasselbe Dilemma für die erste Zeile von l und damit einen Widerspruch zu der Annahme.
- (c) Der Beweis der zweiten Zeile von (8.22) erledigt sich mit der Bemerkung, dass $(\tilde{a}_l R s_l)^\dagger = s_l R^{-1} \tilde{a}_l$. Den Beweis der ersten Zeile beginnen wir mit einer offensichtlichen Feststellung über die Bilder eines Paares μ, ν von Kästchen unter der Permutation R :

$$\begin{aligned} R(\mu) = \kappa, \quad R(\nu) = \lambda &\Rightarrow R T_{\mu\nu} = T_{\kappa\lambda} R \\ &\Rightarrow R s_{\mu\nu} = s_{\kappa\lambda} R, \quad R a_{\mu\nu} = a_{\kappa\lambda} R. \end{aligned} \quad (8.26)$$

- Nehmen wir nun an, es gäbe in einer Spalte des Young–Diagramms von l ein Paar von Kästchen μ, ν , die nach Anwendung der Permutation R in derselben Zeile stehen. Dann folgt anhand von (8.23,24,26)

$$s_l R \tilde{a}_l = s_l s_{\kappa\lambda} R a_{\mu\nu} \tilde{a}_l = s_l s_{\kappa\lambda} a_{\kappa\lambda} R \tilde{a}_l = 0, \quad (8.27)$$

womit die zweite Alternative in (8.22) bewiesen ist.

- Wenn ein solches Paar μ, ν nicht existiert, so gilt für jede Zeile von l , dass alle Kästchen, die nach der Permutation in einer Zeile stehen, vor der Permutation in lauter verschiedenen Spalten gestanden haben. Es muss dann eine Permutation $P^{-1} \in U(l)$ geben, die alle Kästchen in ihre ursprüngliche

Spalte stellt. (Damit diese Aussage richtig ist, darf es kein Kästchen geben, das vor der Permutation in einer Spalte stand, die in seiner Zeile z nach der Permutation nicht vorkommt. Wenn es ein solches Kästchen gäbe, könnten die Kästchen in den über der Zeile z liegenden Zeilen nicht jeweils alle aus verschiedenen Spalten gestammt haben.) Mit der Permutation P^{-1} gilt dann $P^{-1}R \in \tilde{U}(l)$, womit die erste Alternative in (8.22) bewiesen ist. \square

Wir definieren nach diesen vorbereitenden Betrachtungen jetzt das Paar von zueinander adjungierten Operatoren

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_l &= \sum_{P \in U(l)} \sum_{Q \in \tilde{U}(l)} \sigma(Q) P Q = (n_l s_l) (\tilde{n}_l \tilde{a}_l) \\ \mathcal{Y}_l^\dagger &= \sum_{P \in U(l)} \sum_{Q \in \tilde{U}(l)} \sigma(Q) Q P = (\tilde{n}_l \tilde{a}_l) (n_l s_l).\end{aligned}\tag{8.28}$$

Wichtige Eigenschaften dieser Operatoren halten wir im folgenden Satz fest.

Satz 8.7:

Für alle Partitionen l, m gilt

$$\mathcal{Y}_l R \mathcal{Y}_m = \mathcal{Y}_m R \mathcal{Y}_l = \mathcal{Y}_l^\dagger R \mathcal{Y}_m = \mathcal{Y}_l R \mathcal{Y}_m^\dagger = 0 \quad (l \neq m, R \in \mathcal{R}_{S_n}), \tag{8.29}$$

$$\mathcal{Y}_l = \sum_{R \in S_n} c_{lR} \cdot R \neq 0 \quad (c_{lR} = 0, \pm 1, c_{lP_e} = +1), \tag{8.30}$$

$$\mathcal{Y}_l^2 = \gamma_l \cdot \mathcal{Y}_l, \quad \sum_{Q \in S_n} c_{lQ} c_{lRQ^{-1}} = \gamma_l c_{lR} \quad (\gamma_l \text{ natürliche Zahl}). \tag{8.31}$$

$$\mathcal{Y}_l \mathcal{Y}_l^\dagger \mathcal{Y}_l = \gamma_l n_l \tilde{n}_l \cdot \mathcal{Y}_l \tag{8.32}$$

$$\text{Sp}(\mathcal{Y}_l^\dagger \mathcal{Y}_l) = \text{Sp}(\mathcal{Y}_l \mathcal{Y}_l^\dagger) = n_l \tilde{n}_l n!, \quad \sum_{Q \in S_n} c_{lQ}^2 = n_l \tilde{n}_l \tag{8.33}$$

Beweise:

Zu (8.29): Da die Behauptung symmetrisch in l und m ist, genügt es, den Fall $l > m$ zu betrachten. Dann gilt wegen (8.21) $\mathcal{Y}_m R \mathcal{Y}_l \propto s_m(\tilde{a}_m R s_l) \tilde{a}_l = s_m \cdot 0 \cdot \tilde{a}_l = 0$, $\mathcal{Y}_l R \mathcal{Y}_m \propto s_l(\tilde{a}_l R s_m) \tilde{a}_m = \sum_{R'} c_{lR'} (s_l \cdot R' \cdot \tilde{a}_m) = 0$ sowie $\mathcal{Y}_l^\dagger R \mathcal{Y}_m \propto \tilde{a}_l (s_l R s_m \tilde{a}_m) = 0$ und $\mathcal{Y}_l R \mathcal{Y}_m^\dagger \propto (s_l \tilde{a}_l R \tilde{a}_m) s_m = 0$.

Zu (8.30): Dazu zeigen wir zunächst, dass in der Doppelsumme (8.29) kein $R \in S_n$ mehr als einmal vorkommt, weil wegen $U(l) \cap \tilde{U}(l) = \{P_e\}$ aus $PQ = P'Q'$ die Beziehung $U(l) \ni P^{-1}P' = Q(Q')^{-1} \in \tilde{U}(l)$ und damit $P = P'$ und $Q = Q'$ folgt. Um noch zu zeigen, dass $c_{lP_e} = +1$ gilt, braucht man nur aus $PQ = P_e$ die Folgerung $U(l) \ni P = Q^{-1} \in \tilde{U}(l)$ zu ziehen, die nur für $P = Q = P_e$ erfüllt ist.

Zu (8.31): Wegen (8.22) gilt $\mathcal{Y}_l^2 \propto s_l(\tilde{a}_l s_l) \tilde{a}_l \propto s_l \tilde{a}_l \propto \mathcal{Y}_l$. Es bleibt zu beweisen, dass der Faktor γ_l , den man wegen $c_{lP_e} = 1$ als den Koeffizienten von P_e in \mathcal{Y}_l^2 bestimmen kann, eine natürliche Zahl ist. In der Mehrfachsumme

$$\mathcal{Y}_l^2 = \sum_{\substack{P, P' \in U(l) \\ Q, Q' \in \tilde{U}(l)}} \sigma(QQ') P Q P' Q' \tag{8.34}$$

ist das Produkt $PQP'Q'$ genau dann gleich dem Einselement P_e , wenn die Beziehung (*) $P^{-1} = QP'Q'$ gilt. Wenn wir ein beliebiges $Q' \in \tilde{U}(l)$ nehmen, muss $P' \in U(l)$ die Bedingung erfüllen, dass ein $Q \in \tilde{U}(l)$ existiert, das alle Kästchen in die ursprüngliche Zeile zurückführt, damit schließlich ein $P \in U(l)$ gefunden werden kann, das die obige Beziehung (*) erfüllt. Da dieses Q die Zeilenumverteilung durch Q' rückgängig machen muss, haben Q und Q' dieselbe Signatur und alle nichtverschwindenden Terme $PQP'Q'$ in (8.30) tragen mit dem Vorfaktor $\sigma(QQ') = +1$ bei. Daher ist der Koeffizient γ_l des Einselements für \mathcal{Y}_l^2 eine natürliche Zahl.

Die Summenregel für die Koeffizienten c ergibt sich durch Einsetzen von (8.30) und Spurbildung.

Zu (8.32): Unter Benutzung von (8.19,28,30) folgt (8.32) mit

$$\mathcal{Y}_l \mathcal{Y}_l^\dagger \mathcal{Y}_l = (n_l \tilde{n}_l)^3 \cdot s_l \tilde{a}_l \tilde{a}_l s_l s_l \tilde{a}_l = (n_l \tilde{n}_l) \cdot \mathcal{Y}_l^2 = \gamma_l n_l \tilde{n}_l \cdot \mathcal{Y}_l.$$

Zu (8.33): Die Spuren in (8.33) sind gegeben durch das Produkt des Koeffizienten c_{lP_e} von P_e in

$$\mathcal{Y}_l^\dagger \mathcal{Y}_l = \sum_{\substack{P, P' \in U(l) \\ Q, Q' \in \tilde{U}(l)}} \sigma(QQ') Q P P' Q' \quad (8.35)$$

mit $\text{Sp } P_e = n!$. Da die Beziehung $Q' P' P Q = P_e$ äquivalent zu $\tilde{U}(l) \ni (Q')^{-1} Q^{-1} = P' P \in U(l)$ ist, gilt sie wegen $U(l) \cap \tilde{U}(l) = \{P_e\}$ genau dann, wenn $P' = P^{-1}$ und $Q' = Q^{-1}$.

Die Summenregel ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen von (8.30). \square

Als nächstes definieren wir die Operatoren

$$\boxed{\mathcal{I}_l = \frac{\mathcal{Y}_l^\dagger \mathcal{Y}_l}{\gamma_l n_l \tilde{n}_l}, \quad \mathcal{J}_l = \frac{\mathcal{Y}_l \mathcal{Y}_l^\dagger}{\gamma_l n_l \tilde{n}_l},} \quad (8.36)$$

deren Eigenschaften wir im folgenden Satz festhalten wollen.

Satz 8.8:

- (a) Die Operatoren (8.33) sind hermitesche Projektoren auf \mathcal{R}_{S_n} , d.h. es gelten die Beziehungen $\mathcal{I}_l^\dagger = \mathcal{I}_l$, $\mathcal{J}_l^\dagger = \mathcal{J}_l$ und $\mathcal{I}_l^2 = \mathcal{I}_l$, $\mathcal{J}_l^2 = \mathcal{J}_l$.
- (b) Für $l \neq m$ und beliebiges $R \in \mathcal{R}_{S_n}$ gilt $\mathcal{I}_l R \mathcal{I}_m = \mathcal{J}_l R \mathcal{J}_m = 0$ und $\mathcal{I}_l R \mathcal{J}_m = \mathcal{J}_l R \mathcal{I}_m = 0$.
- (c) Es gilt $\mathcal{Y}_l \mathcal{I}_l = \mathcal{J}_l \mathcal{Y}_l$ und $\mathcal{Y}_l^\dagger \mathcal{J}_l = \mathcal{I}_l \mathcal{Y}_l^\dagger$.
- (d) Die Bildräume der Projektoren

$$\mathcal{E}_{\mathcal{I}_l} = \mathcal{R}_{S_n} \mathcal{I}_l, \quad \mathcal{E}_{\mathcal{J}_l} = \mathcal{R}_{S_n} \mathcal{J}_l \quad (8.37)$$

haben die gleiche Dimension

$$s^{(l)} = \text{Sp } \mathcal{I}_l = \text{Sp } \mathcal{J}_l = \frac{n!}{\gamma_l}. \quad (8.38)$$

(e) Die Bildräume der Projektoren stehen in der Beziehung

$$\mathcal{E}_{\mathcal{I}l} = \mathcal{E}_{\mathcal{J}l}\mathcal{Y}_l = \mathcal{R}_{S_n}\mathcal{Y}_l, \quad \mathcal{E}_{\mathcal{J}l} = \mathcal{E}_{\mathcal{I}l}\mathcal{Y}_l^\dagger = \mathcal{R}_{S_n}\mathcal{Y}_l^\dagger. \quad (8.39)$$

- (f) Für jedes $i \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}l}$ gilt $i\mathcal{I}_l = i$.
(g) Die Bildräume zu verschiedenen Partitionen $l \neq m$ sind orthogonal aufeinander, d.h. für $i_{l/m} \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}l/m}$ und $j_{l/m} \in \mathcal{E}_{\mathcal{J}l/m}$ gilt $\langle i_l | i_m \rangle = \langle j_l | j_m \rangle = \langle i_l | j_m \rangle = 0$.
(h) Die Bildräume sind invariant und irreduzibel unter der Wirkung aller Permutationen $P \in S_n$, d.h. dass für jedes Element $i \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}/\mathcal{J}l}$ die Menge $\{Pi | P \in S_n\}$ gleich dem ganzen Bildraum ist und dass für je zwei Elemente $i_\rho, i_\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}/\mathcal{J}l}$ ein $P \in S_n$ existiert, mit dem $\langle i_\rho | Pi_\sigma \rangle \neq 0$.

Beweise:

- (a) Die Hermitizität ist per Definition offensichtlich und die Idempotenz ergibt sich sofort, wenn man (8.32) von links mit \mathcal{Y}_l bzw. von rechts mit \mathcal{Y}_l^\dagger multipliziert.
(b) Die Behauptung folgt sofort aus (8.29) und (8.36).
(c) Beide Formeln folgen sofort aus (8.36) durch Multiplikation mit \mathcal{Y}_l bzw. mit \mathcal{Y}_l^\dagger .
(d) Aus (8.33) und (8.36) folgt, dass die beiden Spuren beide gleich $n!/\gamma_l$ sind. Die Spur eines hermiteschen Projektors ist aber gleich der Dimension des Raumes, auf den er projiziert.
(e) Anhand der obigen Formeln (c) folgt $\mathcal{E}_{\mathcal{I}l}\mathcal{Y}_l^\dagger = \mathcal{R}_{S_n}\mathcal{I}_l\mathcal{Y}_l^\dagger = \mathcal{R}_{S_n}\mathcal{Y}_l^\dagger\mathcal{J}_l \supset \mathcal{E}_{\mathcal{J}l}$. Indem man auf dies von rechts den Operator \mathcal{Y}_l anwendet, erhält man $\mathcal{E}_{\mathcal{I}l} = \mathcal{E}_{\mathcal{I}l}\mathcal{Y}_l^\dagger\mathcal{Y}_l \supset \mathcal{E}_{\mathcal{J}l}\mathcal{Y}_l$. Eine analoge Betrachtung ergibt $\mathcal{E}_{\mathcal{J}l}\mathcal{Y}_l = \mathcal{R}_{S_n}\mathcal{J}_l\mathcal{Y}_l = \mathcal{R}_{S_n}\mathcal{Y}_l\mathcal{I}_l \supset \mathcal{E}_{\mathcal{I}l}$ und damit $\mathcal{E}_{\mathcal{J}l} = \mathcal{E}_{\mathcal{J}l}\mathcal{Y}_l\mathcal{Y}_l^\dagger \supset \mathcal{E}_{\mathcal{I}l}\mathcal{Y}_l^\dagger$. Dies beweist das jeweils erste Gleichheitszeichen in (8.39). Das zweite folgt dann anhand von (8.32) und (8.36).
(f) Es gibt ein $f \in \mathcal{R}_{S_n}$ mit $i = f\mathcal{I}_l$ und damit gilt $i\mathcal{I}_l = f\mathcal{I}_l^2 = f\mathcal{I}_l = i$.
(g) Seien $i_{l/m} = f_{i,l/m}\mathcal{I}_l$ und $j_{l/m} = f_{j,l/m}\mathcal{J}_l$. Dann folgt anhand der obigen Formeln (b) $\langle i_l | i_m \rangle \propto \text{Sp}(\mathcal{I}_l f_{i,l} f_{i,m} \mathcal{I}_m) = 0$ und analoge Gleichungen.
(h) Dies ist offensichtlich wegen $P\mathcal{R}_{S_n} = \mathcal{R}_{S_n}$. \square

Bemerkung:

In (8.37) wurden Darstellungsräume $\mathcal{E}_{\mathcal{I}l}$ bzw. $\mathcal{E}_{\mathcal{J}l}$ durch Anwendung der Projektionsoperatoren \mathcal{I}_l bzw. \mathcal{J}_l definiert. Angesichts von (8.37) könnte man auf die Idee kommen, die nach (8.31) idempotenten, aber nichthermiteschen Operatoren \mathcal{Y}_l/γ_l und $\mathcal{Y}_l^\dagger/\gamma_l$ als einfachere Projektoren zu verwenden. Dazu ist zu bemerken, dass nichthermitesche idempotente Operatoren \mathcal{O} sich nicht als Projektionsoperatoren eignen, weil die Orthogonalität der komplementären Komponenten $P_{\parallel} = P\mathcal{O}$ und $P_{\perp} = P(1 - \mathcal{O})$ nicht $\mathcal{O}(1 - \mathcal{O}) = 0$, sondern $\mathcal{O}(1 - \mathcal{O}^\dagger) = 0$ verlangt.

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel vorbereitet, die zur Bildung der irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n notwendig sind. Als Darstellungsraum verwenden wir die Räume $\mathcal{E}_{\mathcal{I}l}$ oder $\mathcal{E}_{\mathcal{J}l}$, die nach Punkt (h) in Satz 8.8 invariant und irreduzibel unter der Anwendung aller Permutationen $P \in S_n$ sind. Wir wählen in diesen Räumen orthonormierte Basissysteme $\{i_\sigma\}_{\sigma=1}^{s^{(l)}}$ oder $\{j_\sigma\}_{\sigma=1}^{s^{(l)}}$ und bilden damit die **irreduziblen Darstellungsmatrizen**

$$D_{\rho\sigma}^{(\mathcal{I}l)}(P) = \langle i_\rho | P i_\sigma \rangle = \frac{\text{Sp}(i_\rho^\dagger P i_\sigma)}{n!} \quad (8.40)$$

oder die analogen Matrizen $D_{\rho\sigma}^{(\mathcal{J}l)}(P)$. Dass damit eine Darstellung erzeugt wird, folgt aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^{s^{(l)}} D_{\rho\sigma}^{(\mathcal{I}l)}(P) D_{\sigma\tau}^{(\mathcal{I}l)}(Q) &= \sum_{\sigma=1}^{s^{(l)}} \langle P^{-1} i_\rho | \mathcal{I}_l | i_\sigma \mathcal{I}_l \rangle \langle i_\sigma \mathcal{I}_l | Q i_\tau \mathcal{I}_l \rangle \\ &= \langle i_\rho | \mathcal{I}_l | P Q i_\tau \mathcal{I}_l \rangle = D_{\rho\tau}^{(\mathcal{I}l)}(P Q). \end{aligned} \quad (8.41)$$

Hierbei ergibt sich das zweite Gleichheitszeichen, weil im Unterraum $\mathcal{E}_{\mathcal{I}l}$ der Operator

$$\sum_{\sigma=1}^{s^{(l)}} |i_\sigma \mathcal{I}_l\rangle \langle i_\sigma \mathcal{I}_l| = P_e \quad (\text{innerhalb } \mathcal{E}_{\mathcal{I}l}) \quad (8.42)$$

wie der Einsoperator P_e wirkt und weil die Zustände $|Q i_\tau \mathcal{I}_l\rangle$ und $|P^{-1} i_\rho \mathcal{I}_l\rangle$ nach Punkt (h) in Satz 8.8 beide in $\mathcal{E}_{\mathcal{I}l}$ liegen.

Nachdem wir zu jeder Partition zwei Darstellungen $D^{(\mathcal{I}l)}$ und $D^{(\mathcal{J}l)}$ konstruiert haben, bleibt zu zeigen, dass verschiedenen Partitionen inäquivalente Darstellungen zugeordnet sind. Außerdem ist die Beziehung zwischen den beiden zu einer Partition gehörigen Darstellungen zu klären. Zur Untersuchung dieser Fragen brauchen wir die Charaktere der Darstellungen.

Zur Betrachtung der Charaktere ist es vorteilhaft, sich von der Wahl der obigen Basis unabhängig zu machen und sie als Spur über den ganzen Darstellungsraum der regulären Darstellung unter Benutzung der Projektionsoperatoren zu berechnen. Wir verwenden deshalb mit $R \in S_n$ und Punkt (a) aus Satz 8.8 die Formeln

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{I}}^{(l)}(R) &= \sum_{S \in S_n} \langle S \mathcal{I}_l | R S \mathcal{I}_l \rangle = \sum_{S \in S_n} \frac{\text{Sp}(R S \mathcal{I}_l S^{-1})}{n!} \\ \chi_{\mathcal{J}}^{(l)}(R) &= \sum_{S \in S_n} \langle S \mathcal{J}_l | R S \mathcal{J}_l \rangle = \sum_{S \in S_n} \frac{\text{Sp}(R S \mathcal{J}_l S^{-1})}{n!}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Zur weiteren Auswertung dieser Formeln brauchen wir die folgende Beziehung,

$$\begin{aligned} \gamma_l \sum_{S \in S_n} S \mathcal{Y}_l^\dagger \mathcal{Y}_l S^{-1} &= \sum_{S \in S_n} \sum_{P \in U(l)} \sum_{Q \in \tilde{U}(l)} \sigma(Q) S \mathcal{Y}_l^\dagger P Q S^{-1} \\ &\stackrel{(S=TPQ)}{=} \sum_{T \in S_n} \sum_{P \in U(l)} \sum_{Q \in \tilde{U}(l)} \sigma(Q) T P Q \mathcal{Y}_l^\dagger T^{-1} = \sum_{T \in S_n} T \mathcal{Y}_l \mathcal{Y}_l^\dagger T^{-1}, \end{aligned} \quad (8.44)$$

aus der angesichts von (8.36) und (8.43) folgt, dass die beiden Charaktere $\chi_{\mathcal{I}}^{(l)}(R)$ und $\chi_{\mathcal{J}}^{(l)}(R)$ identisch und damit ihre Darstellungen äquivalent sind. Wir werden deshalb im folgenden den unteren Index in der Bezeichnung für die Charaktere weglassen.

Zur Vereinfachung der Formeln für die Charaktere verhilft die Identität

$$\begin{aligned} \gamma_l \sum_{S \in S_n} S \mathcal{Y}_l^\dagger \mathcal{Y}_l S^{-1} &\stackrel{(8.31)}{=} \sum_{S \in S_n} S \mathcal{Y}_l^\dagger \mathcal{Y}_l^2 S^{-1} = \sum_{S \in S_n} \sum_{P \in U(l)} \sum_{Q \in \tilde{U}(l)} \sigma(Q) S \mathcal{Y}_l^\dagger \mathcal{Y}_l P Q S^{-1} \\ &\stackrel{(S=TPQ)}{=} \sum_{T \in S_n} \sum_{P \in U(l)} \sum_{Q \in \tilde{U}(l)} \sigma(Q) T P Q \mathcal{Y}_l^\dagger \mathcal{Y}_l T^{-1} \\ &= \sum_{T \in S_n} T \mathcal{Y}_l \mathcal{Y}_l^\dagger \mathcal{Y}_l T^{-1} \stackrel{(8.32)}{=} \gamma_l n_l \tilde{n}_l \sum_{T \in S_n} T \mathcal{Y}_l T^{-1}, \end{aligned} \quad (8.45)$$

mit der man in der Formel für die Charaktere (8.43) \mathcal{I}_l durch \mathcal{Y}_l/γ_l ersetzen kann. Indem man noch Gleichung (8.38) und $\text{Sp}(RSQS^{-1}) = n! \cdot \delta_{P,S^{-1}R^{-1}S}$ beachtet, erhält man mit den Koeffizienten aus Gleichung (8.30) die Formel

$$\boxed{\chi^{(l)}(R) = \frac{s^{(l)}}{n!} \sum_{S \in S_n} c_{lS^{-1}R^{-1}S} = \frac{s^{(l)}}{n!} \sum_{S \in S_n} c_{lS^{-1}RS}.} \quad (8.46)$$

Letzteres gilt, weil jede Permutation in der gleichen Klasse wie ihre Inverse liegt. Nach den Gleichungen (8.30) und (8.46) sind die Charaktere der Darstellungen der symmetrischen Gruppen rationale Zahlen und daher nach den Sätzen A.2 und A.3 als rationale ganz-algebraische Zahlen **ganzzahlig**.

Um die Inäquivalenz der Darstellungen zu verschiedenen Partitionen zu zeigen, folgern wir aus (8.29) die Beziehung

$$0 = \mathcal{Y}_l^\dagger R \mathcal{Y}_m = \sum_{P, Q \in S_n} c_{lP} c_{mQ} P^{-1} R Q \stackrel{(P=RQS)}{=} \sum_{S \in S_n} \left(\sum_{Q \in S_n} c_{lRQS} c_{mQ} \right) S^{-1}. \quad (8.47)$$

Das Skalarprodukt der Charaktere zweier Darstellungen ergibt damit nach (8.46)

$$\begin{aligned} \langle \chi^{(l)} | \chi^{(m)} \rangle &= \sum_{R \in S_n} \chi^{(l)}(R) \chi^{(m)}(R) \propto \sum_{P, Q, R \in S_n} c_{lP^{-1}RP} c_{mQ^{-1}RQ} \\ &\stackrel{(R'=P^{-1}RP)}{=} \sum_{P, Q' \in S_n} \left(\sum_{R' \in S_n} c_{lR'} c_{mQ'^{-1}PR'P^{-1}Q} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Damit haben wir für eine Gruppe mit $p(n)$ Klassen ebensoviele inäquivalente irreduzible Darstellungen gefunden. Wir fassen die Ergebnisse der obigen Betrachtungen zusammen in

Satz 8.9:

Die durch Projektion mittels der Projektoren (8.36) aus der regulären Darstellung der symmetrischen Gruppe S_n gewonnenen Darstellungen (8.40) bilden ein vollständiges System inäquivalenter irreduzibler Darstellungen von S_n . Jede dieser Darstellungen ist durch eine Partition von n gekennzeichnet.

Die assoziierten Partitionen l und \tilde{l} zugeordneten Darstellungen (8.40) $D^{(\mathcal{I}l)}$ und $D^{(\mathcal{I}\tilde{l})}$ nennt man **assozierte irreduzible Darstellungen**. Falls l selbstassoziert ist, bezeichnet man $D^{(\mathcal{I}l)}$ als eine **selbstassozierte irreduzible Darstellung**. Um eine Beziehung zwischen einem Paar assoziierter Darstellungen zu erhalten benutzt man die **assozierte Gruppenalgebra**

$$\mathcal{R}'_{S_n} = \left\{ f'(c) = \sum_{P \in S_n} c'_P P \ (c'_P = \sigma(P) c_P, f(c) = \sum_{P \in S_n} c_P P \in \mathcal{R}_{S_n}) \right\}. \quad (8.49)$$

Mit der Definition (8.49) ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen den Elementen von \mathcal{R}_{S_n} und \mathcal{R}'_{S_n} gegeben, mit der die Beziehung

$$P f' = \sigma(P) (P f)' \quad (8.50)$$

gilt. Daraus ergeben sich sofort die folgenden Relationen für die Projektoren (8.14,15),

$$s_l f' = (a_l f)', \quad a_l f' = (s_l f)', \quad \mathcal{Y}_{\tilde{l}} f' = (\mathcal{Y}_l^\dagger f)', \quad \mathcal{Y}_{\tilde{l}}^\dagger f' = (\mathcal{Y}_l f)', \quad (8.51)$$

und eine beliebige Permutation $P \in S_n$ wirkt wie

$$P \mathcal{Y}_{\tilde{l}} f' = \sigma(P) (P \mathcal{Y}_l^\dagger f)'. \quad (8.52)$$

Damit folgen schließlich für die Darstellungen (8.40) von S_n und deren Charaktere die Beziehungen

$$\boxed{D^{(\mathcal{I}\tilde{l})}(P) = \sigma(P) D^{(\mathcal{J}l)}(P)} \quad (8.53)$$

und

$$\boxed{\chi^{(\tilde{l})}(P) = \sigma(P) \chi^{(l)}(P) = (-1)^{n-r(l_P)} \chi^{(l)}(P)}. \quad (8.54)$$

Hierbei bezeichnet $r(l_P)$ die Länge der Zyklenstruktur von P .

Die beiden eindimensionalen Darstellungen aus Satz 8.5 sind ein Paar von assoziierten irreduziblen Darstellungen. Ihre Kennzeichnung durch Partitionen halten wir fest in

Satz 8.10:

Die totalsymmetrische Darstellung von S_n ist die Darstellung

$$D^{(\mathcal{I}[n])}(P) = D^{(\mathcal{J}[n])}(P) = \chi^{([n])}(P) = 1 \quad (8.55)$$

und die totalantisymmetrische Darstellung ist deren assoziierte Darstellung

$$D^{(\mathcal{I}[1^n])}(P) = D^{(\mathcal{J}[1^n])}(P) = \chi^{([1^n])}(P) = (-1)^{n-r(l_P)}. \quad (8.56)$$

Beweis:

Die für die Konstruktion der eindimensionalen Darstellungen relevanten Untergruppen von S_n sind $U([n]) = S_n$, $\tilde{U}([n]) = \{P_e\}$, $U([1^n]) = \{P_e\}$ und $\tilde{U}([1^n]) = S_n$. Daher gilt $\mathcal{Y}_{[n]} = s_{[n]}$ und $\mathcal{Y}_{[1^n]} = a_{[n]}$ und folglich $P\mathcal{Y}_{[n]} = \mathcal{Y}_{[n]}$ und $P\mathcal{Y}_{[1^n]} = \sigma(P)\mathcal{Y}_{[1^n]}$. Zudem gilt auch $\mathcal{Y}_{[n]} = \mathcal{Y}_{[n]}^\dagger$ und $\mathcal{Y}_{[1^n]} = \mathcal{Y}_{[1^n]}^\dagger$. \square

Mit (8.56) ergibt sich für die assoziierte Darstellung (8.53) auch sofort die Kroneckerproduktrelation (siehe (3.63)) $D^{(\mathcal{I}\tilde{l})} = D^{(\mathcal{J}l)}(P) \otimes D^{([1^n])}$.

Aus (8.54) folgt auch sofort der weitere Satz

Satz 8.11:

Für selbstassozierte irreduzible Darstellungen ($l = \tilde{l}$) gilt $\chi^{(l)}(P) = 0$ für alle Permutationen mit ungeradem $n - r(l_P)$.

Anhang C enthält die Charaktertafeln der Gruppen S_n für $n = 2, 3, \dots, 8$.

Es gibt kompakte Formeln für die Charaktere von S_n . Zur Berechnung der Dimension der irreduziblen Darstellung $\mathbf{l} = [l_1, \dots, l_r]$ definiert man die Zahlen

$$\lambda_\rho = l_\rho + r - \rho \quad (\rho = 1, \dots, r), \quad (8.57)$$

mit denen man das doppelte Produkt

$$\Delta(\mathbf{l}) = \prod_{1 \leq \sigma < \rho \leq r} (\lambda_\sigma - \lambda_\rho) \quad (8.58)$$

bildet. Damit ergibt sich die Dimension der irreduziblen Darstellung \mathbf{l} von S_n zu

$$s^{(\mathbf{l})} = \frac{n! \Delta(\mathbf{l})}{\prod_{\rho=1}^r \lambda_\rho!}. \quad (8.59)$$

Diese Formel ist recht effizient. Zu einer entsprechenden Formel für den Charakter der Klasse $\kappa = [1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots]$ (zur Notation siehe Gleichung (D.1) im Anhang D) bildet man mit Variablen z_ρ ($\rho = 1, \dots, r$) die **Frobeniussche erzeugende Funktion**

$$F_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \left[\prod_{1 \leq \sigma < \rho \leq r} (z_\sigma - z_\rho) \right] \cdot \prod_{i=1}^n \left(\sum_{\rho=1}^r z_\rho^i \right)^{m_i}, \quad (8.60)$$

die ein homogenes Polynom vom Grade $n + r(r-1)/2$ in den r Variablen z_ρ ist. Der Charakter $\chi_\kappa^{(\mathbf{l})}$ ergibt sich als der Koeffizient des Terms $\left(\prod_{\rho=1}^r z_\rho^{\lambda_\rho} \right)$ in $F_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})$.

Die Formeln (8.57-60) zitieren wir hier ohne Herleitung aus dem im Literaturverzeichnis genannten Buch von J.S. Lomont, Seite 262. (Die Formel ((.60) für die Frobeniusfunktion F ist dort allerdings fehlerhaft angegeben, indem der Parameter r überall durch n ersetzt ist.)

Die Effizienz der verschiedenen Methoden zur Berechnung der Charaktertafeln von S_n ist im Anhang D diskutiert.

Anhänge

A. Ganz–algebraische Zahlen

Die Charaktere endlicher Gruppen haben die Eigenschaft, ganz–algebraische Zahlen zu sein. Um dies zeigen zu können, beginnen wir diesen Anhang mit der

Definition A.1:

Eine komplexe Zahl $\alpha \in \mathcal{C}$ nennt man ganz–algebraisch, wenn es ganze Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{Z}$ gibt, sodass für das Ganzheitspolynom $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ die Gleichung

$$p(\alpha) = \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0. \quad (\text{A.1})$$

gilt. (Entscheidend ist hier, dass die höchste Potenz α^n den Vorfaktor 1 hat.) Die Menge aller ganz–algebraischen Zahlen nennt man $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}$.

Folgerung:

Wenn $n \geq 2$ eine ganze Zahl ist, so ist n -te Einheitswurzel

$$\zeta_n = e^{2\pi i/n} \quad (\text{A.2})$$

ganz–algebraisch.

Wir werden die Eigenschaft brauchen, dass die Menge $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}$ einen Ring im Körper \mathcal{C} der komplexen Zahlen bildet, d.h. dass Summen und Produkte ganz–algebraischer Zahlen wieder ganz–algebraisch sind:

Satz A.1:

Die ganz–algebraischen Zahlen bilden einen Unterring von \mathcal{C} , d.h. Summen und Produkte ganz–algebraischer Zahlen sind wieder ganz–algebraisch.

Beweis:

- Seien $p_1(x)$ und $p_2(x)$ zwei Ganzheitspolynome mit den Graden n_1 und n_2 , für die

$$p_1(\alpha) = 0, \quad p_2(\beta) = 0 \quad (\text{A.3})$$

gilt, sodass α und β ganz–algebraische Zahlen sind. Wir bilden die $N = n_1n_2$ komplexen Zahlen $\alpha^\mu\beta^\nu$ ($\mu = 0, 1, \dots, n_1 - 1; \nu = 0, 1, \dots, n_2 - 1$) und nennen sie nach einer beliebig gewählten Durchnummerierung x_1, x_2, \dots, x_N .

- Sei nun $f(x, y)$ ein beliebiges Polynom in den beiden Variablen x und y mit ganzzahligen Koeffizienten. Wir betrachten die komplexe Zahl $f = f(\alpha, \beta)$. Dann können wir die komplexen Zahlen $f \cdot x_\kappa$ mittels der Gleichungen (A.3) durch ganzzahlige Linearkombinationen der komplexen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_N ausdrücken und erhalten damit das homogene lineare Gleichungssystem

$$f \cdot x_\kappa = \sum_{\lambda=1}^N c_{\kappa\lambda} x_\lambda \quad (\kappa = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{A.4})$$

für die Variablen x_1, x_2, \dots, x_N . Da dieses Gleichungssystem mit den gegebenen Werten von x_1, x_2, \dots, x_N eine nichttriviale Lösung hat, verschwindet die Determinante seiner Koeffizienten. Diese Determinante ist jedoch ein Ganzheitspolynom in f vom Grade N und daher ist f ganz–algebraisch. \square

Der folgende Satz, der im Beweis des Satzes 3.20 gebraucht wird, charakterisiert die rationalen ganz–algebraischen Zahlen,

Satz A.2:

Die ganz–algebraischen rationalen Zahlen sind ganzzahlig und alle ganzen Zahlen sind ganz–algebraisch, d.h.

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{Q} = \mathcal{Z}. \quad (\text{A.5})$$

Beweis:

- Zum einen ist jedes $\alpha \in \mathcal{Z}$ trivialerweise ganz–algebraisch, weil $\alpha^1 - \alpha \cdot \alpha^0 = 0$.
- Sei andererseits $\alpha = p/q \in \mathcal{Q}$ ganz–algebraisch mit teilerfremden p und $q > 0$ aus \mathcal{Z} . Indem man die Ganzheitsgleichung (A.1) mit q^n multipliziert und p^n alleinstellt, erhält man $p^n = -a_1 p^{n-1} q - a_2 p^{n-2} q^2 - \dots - a_n q^n$. Hätte q nun einen Primfaktor, so würde dieser die rechte Seite und damit auch p^n und folglich p teilen. Es folgt $q = 1$, d.h. $\alpha \in \mathcal{Z}$. \square

Wir verfügen jetzt über alle Voraussetzungen zum Beweis des

Satzes A.3:

Die Charaktere der Darstellungen einer endlichen Gruppe G wie auch die in Gleichung (3.53) definierten Eigenwerte der Klassenmatrizen aller irreduziblen Darstellungen von G sind ganz–algebraische Zahlen.

Beweis:

- Nach deren in den Gleichungen (A.2) und (3.41) festgestellten Eigenschaften ergibt sich die Behauptung für Charaktere sofort aus dem Satz A.1.
- Aus den Matrizen (3.42) der regulären Darstellung von G bilden wir nach Gleichung (3.51) Klassenmatrizen $S_{\kappa}^{\text{reg}} = \sum_{g \in K_{\kappa}} D^{\text{reg}}(g)$. Diese Klassenmatrizen sind einerseits Matrizen, deren Elemente nach (3.42) ausschließlich die Zahlen 0 und 1 sind. Sie enthalten andererseits, auf Blockdiagonalgestalt gebracht, nach Gleichung (3.45) die Klassenmatrizen (3.53) aller irreduziblen Darstellungen $s^{(\nu)}$ –fach, sodass die Eigenwerte $\lambda_{\kappa}^{(\nu)}$ dieser Klassenmatrizen auch Eigenwerte der ganzzahligen Klassenmatrizen S_{κ}^{reg} sind. Da das charakteristische Polynom $\det(S_{\kappa}^{\text{reg}} - \lambda_{\kappa}^{(\nu)} E)$ ein Ganzheitspolynom ist, folgt aus der Definition A.1 die Behauptung. \square

Dieser Satz wird im Beweis des Satzes 3.20 benötigt.

B. Partitionen

Wie schon in Kapitel 8 erwähnt nennt man additive Zerlegungen einer natürlichen Zahl n eine **Partition von n** . Partitionen, die sich nur in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden, betrachtet man als identisch. In Kapitel 8 wurde auch gezeigt, dass die **Klassen der symmetrischen Gruppe S_n** eindeutig durch die Partitionen von n charakterisiert sind. Die Kenntnis der Zahl der Klassen und der damit übereinstimmenden Zahl der irreduziblen Darstellungen von S_n erfordert daher die Bestimmung der Zahl $p(n)$ aller Partitionen von n .

Eine Möglichkeit, die Zahl der Partitionen für endliche n rekursiv zu bestimmen, ergibt sich durch die Einführung der Funktion $p(n, m)$, die die Zahl aller Partitionen von n mit dem größten Summanden m angibt. Es gilt dann

$$p(n) = \sum_{m=1}^n p(n, m). \quad (\text{B.1})$$

Für $m = n$ gibt es genau eine Partition, d.h. es gilt $p(n, n) = 1$. Alle Partitionen mit m kleiner als n haben neben dem Summanden m mindestens einen weiteren Summanden. Wenn man in allen solchen Partitionen den größten Summanden m streicht, erhält man alle Partitionen der Zahl $n - m$, deren größter Summand l die Werte 1 bis $s(m, n) = \min[n - m, m]$ annehmen kann. Dies erlaubt die Formulierung der linearen Rekursion

$$p(n, m) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{s(m, n)} p(n - m, l) & (m < n) \\ 1 & (m = n), \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

mittels der die Tabelle 8.1 erstellt wurde.

Asymptotik von $p(n)$ für große n

Interessant ist auch die Asymptotik von $p(n)$ im Grenzfall großer n , zu der **Hardy und Ramanujan [Proc. London Math. Soc. 17, 75ff (1918)]** Pionierarbeit geleistet haben und für die später mit recht großem mathematischen Aufwand exakte Formeln entwickelt wurden. Am Ende dieses Anhangs werden wir eine exakte Formel angeben. Wir wollen hier zunächst unter Benutzung einer wichtigen, schon von Hardy und Ramanujan verwendeten Transformationsformel aus der Theorie elliptisch modularer Funktionen eine knappe Ableitung einer gegenüber der Hardy–Ramanujan–Formel verbesserten Formel vorstellen, wobei die Hardy–Ramanujan–Formel als Zwischenprodukt abfallen wird. Einen Beweis der Transformationsformel werden wir anschließend dokumentieren.

Das Standardverfahren zur Berechnung der Asymptotik bei linearen Rekursionen besteht in der Berechnung der **erzeugenden Funktion**, die wir mit $p(0) = p(1) = 1$ als $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n$ definieren wollen. Da in der n -Summe alle Partitionen aller natürlichen Zahlen enthalten sind, kann diese Summe auch als Vielfachsumme über alle Partitionssummanden $l = 1, 2, \dots, \infty$ und deren Vielfachheiten $k = 0, 1, \dots, \infty$ geschrieben werden. Man erhält so

$$\boxed{\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^{kl} = \prod_{l=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^l}.} \quad (\text{B.3})$$

Da das Produkt in (B.3) für beliebige $\epsilon > 0$ in der komplexen x -Ebene im Kreis $|x| \leq 1 - \epsilon$ gleichmäßig konvergiert, ist die erzeugende Funktion $\Phi(x)$ im Einheitskreis $|x| < 1$ analytisch. Der Residuensatz liefert dann die Umkehrformel

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x^{n+1}} \Phi(x), \quad (\text{B.4})$$

wobei das Linienintegral den Punkt $x = 0$ entgegen dem Uhrzeigersinn umrundet.

Aus (B.3) geht hervor, dass die erzeugende Funktion $\Phi(x)$ an allen Einheitswurzeln singulär ist. Da die Einheitswurzeln auf dem Einheitskreis dicht liegen, kann $\Phi(x)$ nirgendwo über das Innere des Einheitskreises analytisch fortgesetzt werden. Dies macht die Berechnung des Integrals (B.4) schwieriger als für viele andere Abzählprobleme.

Die Asymptotik für $n \rightarrow \infty$ ist daher mittels einer **Sattelpunktintegration** zu berechnen. Der Integrand in (B.4) divergiert bei $x \searrow 0$ und bei Annäherung an den Einheitskreis. Da $\Phi(x)$ bei $x = 1$ die stärkste Divergenz besitzt, weil nur dort jeder Faktor in (B.3) einen Pol hat, erwartet man den führenden Beitrag zum Integral (B.4) aus der Umgebung des Minimums x_0 des Integranden im Intervall $0 < x < 1$. In der komplexen x -Ebene hat der Integrand als analytische Funktion an der Stelle dieses Minimums einen Sattelpunkt, also ein Maximum längs der Linie $x = x_0 + i\xi$ (ξ reell) senkrecht zur reellen Achse. Dieses Maximum wird für große n beliebig scharf und seine Umgebung liefert den führenden Beitrag zum Integral in (B.4), wenn man den Integrationsweg durch diesen Sattelpunkt legt.

Wir werden sehen, dass die Position x_0 des Maximums mit $n \rightarrow \infty$ beliebig nahe bei $x = 1$ liegt. Deshalb besteht die Herausforderung darin, die erzeugende Funktion für $x \rightarrow 1$ auszuwerten. Dies gelingt sehr effizient unter Hinzuziehung der Theorie elliptisch modularer Funktionen. Die **Dedekindsche η -Funktion**, die mit $x = e^{2\pi i\tau}$ durch die Gleichung

$$\eta(\tau) = x^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = \frac{x^{\frac{1}{24}}}{\Phi(x)} \quad (\text{B.5})$$

definiert ist, steht offenbar in enger Beziehung zur erzeugenden Funktion (B.3). Die Dedekindsche Funktion, die eine holomorphe Funktion in der Halbebene $\text{Im}\tau > 0$ ist, genügt der Transformationsformel

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau). \quad (\text{B.6})$$

Einen Beweis dieser Formel werden wir am Ende dieses Anhangs skizzieren.

Indem man diese Transformationsformel mittels (B.5) auf die erzeugende Funktion umschreibt, gelangt man zu deren Transformationsformel

$$\Phi(x) = \frac{x^{\frac{1}{24}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\ln 1/x} \cdot e^{\frac{\pi^2}{6 \ln^2 1/x}} \cdot \Phi\left(e^{-\frac{4\pi^2}{\ln^2 1/x}}\right). \quad (\text{B.7})$$

Der letzte Faktor in dieser Gleichung verhält sich für $x \rightarrow 1$ wie

$$\Phi(e^{-\frac{4\pi^2}{\ln 1/x}}) \sim 1 + e^{-\frac{4\pi^2}{1-x}} + \dots,$$

sodass die anderen Faktoren bis zu beliebigen Potenzen von $1 - x$ das Verhalten beschreiben. In der folgenden Rechnung spielt deshalb der letzte Faktor keine Rolle.

Zur Bestimmung des Sattelpunktes betrachten wir den Logarithmus $f_n(q)$ des Integranden in (B.4) als Funktion der Variablen $q = \ln(1/x)$,

$$f_n(q) = \frac{\pi^2}{6q} + \frac{1}{2} \ln \frac{q}{2\pi} + (n + 1 - \frac{1}{24})q + O(e^{-4\pi^2/q}) \quad (q \rightarrow 0). \quad (\text{B.8})$$

Das Minimum dieser Funktion bestimmt man leicht durch Lösung der quadratischen Gleichung (mit $n' = n + 23/24$)

$$f'_n(q) = -\frac{\pi^2}{6q^2} + \frac{1}{2q} + n' = 0 \quad (\text{B.9})$$

zu

$$q = q_0 = \frac{\sqrt{8\pi^2 n'/3 + 1} - 1}{4n'} \quad (\text{B.10})$$

und findet damit

$$f_n(q_0) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{8\pi^2 n'/3 + 1} + \ln \frac{\sqrt{8\pi^2 n'/3 + 1} - 1}{8\pi n'} \right]. \quad (\text{B.11})$$

Für die Berechnung des Sattelpunktintegrals über die Variable ξ mit $x = x_0 + i\xi$ würde man in Gaußscher Näherung das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} e^{f_n(q_0) - \frac{1}{2} f''_n(q_0) \xi^2} = \frac{e^{f_n(q_0)}}{\sqrt{2\pi f''_n(q_0)}} \quad (\text{B.12})$$

betrachten. Die hierbei auftretende Wurzel aus der zweiten Ableitung ist durch den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{f''_n(q_0)}} = \frac{2\pi^2}{3(\sqrt{8\pi^2 n'/3 + 1} + 1)} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{8\pi^2 n'/3 + 1}}} \quad (\text{B.13})$$

gegeben. Indem man $f_n(q_0)$ und $\sqrt{2\pi f''_n(q_0)}$ für große n entwickelt mit dem Ergebnis

$$f_n(q_0) = \pi\sqrt{2n/3} - \frac{1}{4} \ln(24n) + \dots, \quad \sqrt{2\pi f''_n(q_0)} = 2(6n^3)^{1/4} + \dots, \quad (\text{B.14})$$

erhält man durch Einsetzen in (B.12) die **Hardy–Ramanujan–Formel**

$$\boxed{p(n) \sim p_{\text{HR}}(n) = \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}.} \quad (\text{B.15})$$

Das volle Sattelpunktintegral

$$p(n) \sim p_B(n) = \int_{-K}^K \frac{d\xi}{2\pi} e^{f_n(\ln(1/(x_0+i\xi)))} \quad (\text{B.16})$$

ergibt eine deutlich bessere Näherungsformel, die natürlich nicht mit den bekannten exakten Formeln mithalten kann, aber vielleicht durch ihre knappe Ableitung besticht. Im Integral in (B.16) wurde für praktische Zwecke die Abschneidung der Integration durch den Parameter $K = c/\sqrt{f_n''(q_0)}$ eingeführt. Ein Wert von $c = 10$ ergibt gute Resultate. Die folgende Tabelle zeigt einen Vergleich zwischen den exakten Werten und aus ganze Zahlen gerundeten Werten aus den Formeln (B.15) und (B.16) (mit $c = 20$). Die signifikant korrekten Ziffern (nach Rundung) in den Näherungswerten sind unterstrichen.

Tabelle B.1: Näherungsformeln für $p(n)$

n	10	20	30	50	100	200
$p(n)$	42	627	5604	204226	190569292	3972999029388
$p_{\text{HR}}(n)$	<u>48</u>	<u>692</u>	<u>6080</u>	<u>217590</u>	<u>199280893</u>	<u>4100251432188</u>
$p_B(n)$	<u>42</u>	<u>626</u>	<u>5600</u>	<u>204211</u>	<u>190568945</u>	<u>3972998991925</u>

Beweis der Transformationsformel (B.6)

Der **Beweis der Transformationsformel (B.6)** der Dedekindschen η -Funktion gelingt nach Auskunft gängiger Lehrbücher nur auf Umwegen. Wir referieren im folgenden einen Beweis, den man aus ‘‘Elliptische Funktionen und Modulformen’’ von M. Koecher und A. Krieg zusammenstellen kann.

Ausgangspunkt ist die **Eisenstein-Reihe**

$$\begin{aligned} G_2(\tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau + n)^2} \quad (\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6) \\ &= \frac{\pi^2}{3} \left(1 + \frac{1}{\tau^2}\right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}, \quad A_{mn} = \frac{1}{(m\tau + n)^2} + \frac{1}{(m\tau - n)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

die der Transformationsformel

$$\tau^2 G_2(\tau) - G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = 2\pi i \tau \quad (\text{B.18})$$

genügt. Zum **Beweis der Transformationsformel (B.18)** benutzen wir

$$G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\pi^2}{3} (1 + \tau^2) + 2\tau^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}, \quad (\text{B.19})$$

um für die Funktion

$$F(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \left(\tau^2 G_2(\tau) - G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) \right) \quad (\text{B.20})$$

die Formel

$$F(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} - A_{nm}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \quad (\text{B.21})$$

zu erhalten. Die beiden Doppelsummen in dieser Formel haben nicht den gleichen Wert, weil sie nicht absolut konvergieren. Zur Berechnung ihrer Differenz verwenden wir die A_{mn} ähnlichen Ausdrücke

$$\begin{aligned} B_{mn} &= \frac{1}{(m\tau + n)(m\tau + n - 1)} + \frac{1}{(m\tau - n)(m\tau - n + 1)} \\ &= \frac{1}{m\tau + n - 1} - \frac{1}{m\tau + n} + \frac{1}{m\tau - n} - \frac{1}{m\tau - n + 1}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Für die Differenz $A_{mn} - B_{mn}$ sind die beiden Doppelsummen angesichts ihrer absoluten Konvergenz gleich und heben sich auf, sodass man in (B.21) A_{mn} durch B_{mn} ersetzen kann. Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} = 0$ trägt damit nur der zweite Term in (B.21) bei. Über die Partialbruchzerlegung des Kotangens

$$\varphi(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m - (n-1)/\tau} - \frac{1}{m - n/\tau} \right) = \begin{cases} \pi \operatorname{ctg}(\pi n/\tau) - \frac{\tau}{n} & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

erhält man mit $\pi n/\tau = x_n - iy_n$ ($y_n > 0$)

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi n}{\tau} = \frac{\cos x_n \cosh y_n + i \sin x_n \sinh y_n}{\sin x_n \cosh y_n - i \cos x_n \sinh y_n} \sim \frac{e^{ix_n + y_n}}{(-i)e^{ix_n + y_n}} = i \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{B.24})$$

das Ergebnis

$$\tau \cdot F(\tau) = -\tau \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} = -\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(n-1) - \varphi(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) - \varphi(0) = i\pi, \quad (\text{B.25})$$

womit über (B.20) der Beweis von (B.18) abgeschlossen ist.

Um die 1-periodische Eisenstein-Reihe mit der Dedekindschen η -Funktion in Verbindung zu bringen, braucht man ihre **Fourierentwicklung**. Sie lautet

$$G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3} \left(1 - 24 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) \cdot e^{2\pi i n \tau} \right) \quad (\text{B.26})$$

mit der Funktion

$$\sigma_1(n) = \sum_{d=1(d|n)}^{\infty} d. \quad (\text{B.27})$$

Zum Beweis von Gleichung (B.26) benutzt man die leicht zu berechnende Fourierreihe der 1-periodischen Funktion

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi \tau}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+n)^2} = -(2\pi)^2 \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i r \tau}. \quad (\text{B.28})$$

Aus der ersten Zeile von (B.17) erhält man damit

$$G_2(\tau) = 2\zeta(2) - 2(2\pi)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i m r \tau}, \quad (\text{B.29})$$

woraus sich mit $mr = n$ durch Ersetzen der r -Summe durch eine n -Summe (B.26) mit (B.27) ergibt.

Nach diesen Vorbetrachtungen gehen wir den Beweis von (B.6) an, indem wir die Funktion $f(\tau) = \eta'(\tau)/\eta(\tau)$ betrachten. Mit (B.5) erhalten wir für sie

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{i\pi}{12} \left(1 - 24 \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{e^{2\pi i m \tau}}{1 - e^{2\pi i m \tau}}\right) = \frac{i\pi}{12} \left(1 - 24 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} m \cdot e^{2\pi i m r \tau}\right) \\ &= \frac{i\pi}{12} \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) \cdot e^{2\pi i n \tau}\right) = \frac{i}{4\pi} G_2(\tau). \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Die Funktion $f(\tau)$ ist also proportional zur Eisenstein-Reihe $G_2(\tau)$ und erfüllt daher angesichts (B.18) die Transformationsformel

$$f\left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{1}{\tau^2} - f(\tau) - \frac{1}{2\tau} = 0. \quad (\text{B.31})$$

Nun betrachten wir schließlich die Funktion $g(y) = \eta(i/y)/(\eta(iy)\sqrt{y})$ für $y > 0$. Für ihre logarithmische Ableitung erhalten wir mit (B.31)

$$\frac{g'(y)}{g(y)} = f\left(\frac{i}{y}\right) \cdot \frac{-i}{y^2} - i \cdot f(iy) - \frac{1}{2y} = 0. \quad (\text{B.32})$$

Folglich gibt es eine Konstante γ , sodass $g(y) \equiv \gamma$ oder $\eta(i/y) = \gamma\sqrt{y}\eta(iy)$. Mit $y = 1$ erhalten wir für die Konstante den Wert $\gamma = 1$, da $\eta(i) \neq 0$ und damit anhand des Identitätssatzes den Beweis der Transformationsformel (B.6) in der oberen Halbebene $\text{Im}\tau > 0$.

Exakte Formel für $p(n)$

Zum Abschluss dieses Anhangs geben wir eine **exakte Formel** für die Zahl der Partitionen $p(n)$ nach **D.M. Jackson** an. Dazu führen wir zunächst einige Abkürzungen ein. Die **Dedekindsumme** ist für ganze Zahlen h und k durch

$$s(h, k) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} \left(\frac{hj}{k} - \left[\frac{hj}{k}\right] - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{B.33})$$

gegeben. (Der Ausdruck $[x]$ bezeichnet die größte ganze Zahl $\leq x$.) Weiterhin brauchen wir die Funktion

$$A_k(n) = \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0 < h \leq k}} e^{i\pi s(h,k)} e^{-2\pi i h n / k}, \quad (\text{B.34})$$

deren h -Summe auf mit k teilerfremde Werte $((h, k) = 1)$ eingeschränkt ist. Schließlich definieren wir die Funktion

$$t(n, r) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{r \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor} \sqrt{k} A_k(n) \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}\left(n - \frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right), \quad (\text{B.35})$$

wo r eine natürliche Zahl ist, die zur Konstolle der Genauigkeit der Rechnung gebraucht wird. Die Zahl der Partitionen ist damit durch die Formel

$$\boxed{p(n) = [t(n)]} \quad (\text{B.36})$$

bestimmt.

Die Benutzung dieser Formel muss mit Vorsicht erfolgen, weil im Falle, dass $t(n)$ sich als knapp unterhalb einer natürlichen Zahl ergibt, die **Genauigkeit der Rechnung** kontrolliert werden muss. Wenn wir davon ausgehen, dass die Dedekindsummen (B.33) als rationale Zahlen exakt berechnet werden, betrifft dies die Funktionen (B.34) und (B.35). Gegebenenfalls muss zum einen die obere Grenze der k -Summe in (B.35) und zum anderen die Zahl der berechneten Dezimalstellen in (B.34) und (B.35) erhöht werden. Man rechnet mit einer Genauigkeit von $r \cdot \sqrt{2n}$ Dezimalstellen und beginnt die Rechnung mit $r = 1$. Erhöhung von r lässt $t(n, r)$ immer anwachsen. Falls $t(n, r)$ weniger als 0,1 unterhalb einer natürlichen Zahl liegt, erhöht man deshalb r um 1 und fährt damit so lange fort, bis $t(n, r)$ größer als diese natürliche Zahl ist. Wenn man so verfährt, liefert (B.36) die exakte Zahl der Partitionen.

C. Charaktertafeln der symmetrischen Gruppen S_n

In diesem Anhang geben wir die Charaktertafeln der symmetrischen Gruppen S_n für $n = 2, 3, 4, 5, 8$ wieder.

Die Klassen sind durch die Partitionen ihrer Zyklenstruktur und die irreduziblen Darstellungen durch die Partitionen ihrer Young-Diagramme gekennzeichnet. Unter jeder Klasse steht die Zahl ihrer Elemente. Die Dimensionen der Darstellungen finden sich in der Spalte des Einselements $[1^n]$.

Tabelle C.1: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von S_2

Darstellungen	Klassen	
	$[1^2]$	$[2]$
	1	1
$[2]$	1	1
$[1^2]$	1	-1

Tabelle C.2: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von S_3

Darstellungen	Klassen		
	$[1^3]$	$[2, 1]$	$[3]$
	1	3	2
$[3]$	1	1	1
$[2, 1]$	2	0	-1
$[1^3]$	1	-1	1

Tabelle C.3: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von S_4

Darstellungen	Klassen				
	$[1^4]$	$[2, 1^2]$	$[2^2]$	$[3, 1]$	$[4]$
	1	6	3	8	6
$[4]$	1	1	1	1	1
$[3, 1]$	3	1	-1	0	-1
$[2^2]$	2	0	2	-1	0
$[2, 1^2]$	3	-1	-1	0	1
$[1^4]$	1	-1	1	1	-1

Tabelle C.4: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von S_5

Darstellungen	Klassen						
	$[1^5]$	$[2, 1^3]$	$[2^2, 1]$	$[3, 1^2]$	$[3, 2]$	$[4, 1]$	$[5]$
	1	10	15	20	20	30	24
$[5]$	1	1	1	1	1	1	1
$[4, 1]$	4	2	0	1	-1	0	-1
$[3, 2]$	5	1	1	-1	1	-1	0
$[3, 1^2]$	6	0	-2	0	0	0	1
$[2^2, 1]$	5	-1	1	-1	-1	1	0
$[2, 1^3]$	4	-2	0	1	1	0	-1
$[1^5]$	1	-1	1	1	-1	-1	1

Tabelle C.5: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von S_6

Darst.	Klassen										
	$[1^6]$	$[2, 1^4]$	$[2^2, 1^2]$	$[2^3]$	$[3, 1^3]$	$[3, 2, 1]$	$[3^2]$	$[4, 1^2]$	$[4, 2]$	$[5, 1]$	$[6]$
	1	10	15	20	20	20	20	20	20	30	24
$[6]$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$[5, 1]$	5	3	1	-1	2	0	-1	1	-1	0	-1
$[4, 2]$	9	3	1	3	0	0	0	-1	1	-1	0
$[4, 1^2]$	10	2	-2	-2	1	-1	1	0	0	0	1
$[3^2]$	5	1	1	-3	-1	1	2	-1	-1	0	0
$[3, 2, 1]$	16	0	0	0	-2	0	-2	0	0	1	0
$[3, 1^3]$	10	-2	-2	2	1	1	1	0	0	0	-1
$[2^3]$	5	-1	1	3	-1	-1	2	1	-1	0	0
$[2^2, 1^2]$	9	-3	1	-3	0	0	0	1	1	-1	0
$[2, 1^4]$	5	-3	1	1	2	0	-1	-1	-1	0	1
$[1^6]$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1

Da für $n > 6$ die Charaktertafeln zu groß werden, zeigen wir zunächst in einer Tabelle a die Partitionen von n und die zugehörigen Klassen K mit ihren Klassengrößen n_K sowie die irreduziblen Darstellungen Γ und danach in einer Tabelle b die Charaktere.

Tabelle C.6a: Irreduzible Darstellungen von S_7

Partition	$[1^7]$	$[2, 1^5]$	$[2^2, 1^3]$	$[2^3, 1]$	$[3, 1^4]$	$[3, 2, 1^2]$	$[3, 2^2]$	$[3^2, 1]$
$K_{\#}$	1	2	3	4	5	6	7	8
n_K	1	21	105	105	70	420	210	280
$\Gamma_{\#}$	15	14	13	12	11	10	9	8
Partition	$[4, 1^3]$	$[4, 2, 1]$	$[4, 3]$	$[5, 1^2]$	$[5, 2]$	$[6, 1]$	$[7]$	
$K_{\#}$	9	10	11	12	13	14	15	
n_K	210	630	420	504	504	840	720	
$\Gamma_{\#}$	7	6	5	4	3	2	1	

Tabelle C.6b: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von S_7

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}
Γ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Γ_2	6	4	2	0	3	1	-1	0	2	0	-1	1	-1	0	-1
Γ_3	14	6	2	2	2	0	2	-1	0	0	0	-1	1	-1	0
Γ_4	15	5	-1	-3	3	-1	-1	0	1	-1	1	0	0	0	1
Γ_5	14	4	2	0	-1	1	-1	2	-2	0	1	-1	-1	0	0
Γ_6	35	5	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	0	0	1	0
Γ_7	20	0	-4	0	2	0	2	2	0	0	0	0	0	0	-1
Γ_8	21	1	1	-3	-3	1	1	0	-1	-1	-1	1	1	0	0
Γ_9	21	-1	1	3	-3	-1	1	0	1	-1	1	1	-1	0	0
Γ_{10}	35	-5	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	0	0	-1	0
Γ_{11}	15	-5	-1	3	3	1	-1	0	-1	-1	-1	0	0	0	1
Γ_{12}	14	-4	2	0	-1	-1	-1	2	2	0	-1	-1	1	0	0
Γ_{13}	14	-6	2	-2	2	0	2	-1	0	0	0	-1	-1	1	0
Γ_{14}	6	-4	2	0	3	-1	-1	0	-2	0	1	1	1	0	-1
Γ_{15}	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1

Tabelle C.7a: Irreduzible Darstellungen von S_8

Part.	$[1^8]$	$[2, 1^6]$	$[2^2, 1^4]$	$[2^3, 1^2]$	$[2^4]$	$[3, 1^5]$	$[3, 2, 1^3]$	$[3, 2^2, 1]$	$[3^2, 1^2]$	$[3^2, 2]$	$[4, 1^4]$
$K_{\#}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_K	1	28	210	420	105	112	1120	1680	1120	1120	420
$\Gamma_{\#}$	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
Part.	$[4, 2, 1^2]$	$[4, 2^2]$	$[4, 3, 1]$	$[4, 4]$	$[5, 1^3]$	$[5, 2, 1]$	$[5, 3]$	$[6, 1^2]$	$[6, 2]$	$[7, 1]$	$[8]$
$K_{\#}$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
n_K	2520	1260	3360	1260	1344	4032	2688	3360	3360	5760	5040
$\Gamma_{\#}$	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tabelle C.7b: Charaktertafel der irreduziblen Darstellungen von S_8

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	K_{16}	K_{17}	K_{18}	K_{19}	K_{20}	K_{21}	K_{22}
Γ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Γ_2	7	5	3	1	-1	4	2	0	1	-1	3	1	-1	0	-1	2	0	-1	1	-1	0	-1
Γ_3	20	10	4	2	4	5	1	1	-1	1	2	0	2	-1	0	0	0	0	-1	1	-1	0
Γ_4	21	9	1	-3	-3	6	0	-2	0	0	3	-1	-1	0	1	1	-1	1	0	0	0	1
Γ_5	28	10	4	2	-4	1	1	1	1	1	-2	0	-2	1	0	-2	0	1	-1	-1	0	0
Γ_6	64	16	0	0	0	4	-2	0	-2	-2	0	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	1	0
Γ_7	35	5	-5	-3	3	5	-1	1	2	2	1	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	-1
Γ_8	14	4	2	0	6	-1	1	-1	2	-2	-2	0	2	1	2	-1	-1	-1	0	0	0	0
Γ_9	70	10	2	-2	-2	-5	1	-1	1	1	-4	0	0	-1	-2	0	0	0	1	1	0	0
Γ_{10}	56	4	0	4	8	-4	-2	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	-1	1	1	-1	0	0
Γ_{11}	90	0	-6	0	-6	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0	-1	0
Γ_{12}	35	-5	-5	3	3	5	1	1	2	-2	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1
Γ_{13}	42	0	2	0	-6	-6	0	2	0	0	0	-2	0	0	2	2	0	-1	0	0	0	0
Γ_{14}	56	-4	0	-4	8	-4	2	0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	1	1	-1	-1	0	0
Γ_{15}	70	-10	2	2	-2	-5	-1	-1	1	-1	4	0	0	1	-2	0	0	0	-1	1	0	0
Γ_{16}	64	-16	0	0	0	4	2	0	-2	2	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	1	0
Γ_{17}	21	-9	1	3	-3	6	0	-2	0	0	-3	-1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	-1
Γ_{18}	14	-4	2	0	6	-1	-1	-1	2	2	2	0	-2	-1	2	-1	1	-1	0	0	0	0
Γ_{19}	28	-10	4	-2	-4	1	-1	1	1	-1	2	0	2	-1	0	-2	0	1	1	-1	0	0
Γ_{20}	20	-10	4	-2	4	5	-1	1	-1	-1	-2	0	-2	1	0	0	0	0	1	1	-1	0
Γ_{21}	7	-5	3	-1	-1	4	-2	0	1	1	-3	1	1	0	-1	2	0	-1	-1	-1	0	1
Γ_{22}	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1

D. Zeilensymmetrische Darstellungen von S_n

Da die Dimension $s = n!$ der regulären Darstellung mit n sehr schnell anwächst, stößt die Berechnung von Charaktertafeln mittels der allgemeinen aus Gleichung (3.54) folgenden Methoden und die mittels der Formel (8.46), aber auch die mittels der Formel (8.60) schon für vergleichsweise kleine n an Grenzen. Als ökonomischere Alternative bietet sich eine Berechnung mittels **total zeilensymmetrischer Darstellungen** an, die wir im folgenden vorstellen werden.

Zu einer Partition $\mathbf{l} = [l_1, l_2, \dots, l_r]$ von $n = \sum_{i=1}^r l_i = n$ betrachtet man r verschiedene Objekte x_i und bildet damit eine Basis \mathcal{B}_1 des Darstellungsraums, indem man l_i Kopien von x_i auf alle Arten auf die Komponenten eines n -dimensionalen Vektors verteilt. Der von dieser Basis aufgespannte Raum ist ein Unterraum des \mathcal{R}_n . Die Permutationen von S_n erzeugen auf diesem Raum eine Darstellung D_1 von S_n , indem sie die Basis \mathcal{B}_1 auf sich abbilden. Diese Darstellung muss die zeilensymmetrische irreduzible Darstellung $D^{(1)}$ enthalten, ist aber reduzibel. Sie enthält jedoch nur solche irreduziblen Darstellungen von S_n , die größeren Partitionen von n entsprechen. Diese Eigenschaft eröffnet offensichtliche Möglichkeiten, aus den Charakteren der reduziblen Darstellungen D_1 diejenigen der irreduziblen Darstellungen $D^{(1)}$ zu berechnen.

Die Charaktere von D_1 können leicht rekursiv berechnet werden, indem die Charaktere für r -zeilige Partitionen durch die von $(r-1)$ -zeiligen ausgedrückt werden. Zur Beschreibung des rekursiven Verfahrens benutzen wir die Kennzeichnung der Permutationen P durch ihre Zyklenstruktur in der Notation

$$P = [1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots] \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot m_i = n \right), \quad (\text{D.1})$$

in der wir die Zyklenstruktur nach aufsteigenden Zyklenlängen sortieren und auch alle Zyklen mit verschwindender Vielfachheit $m_i = 0$ einschließen. Der Charakter einer Permutation P der Darstellung D_1 ist gegeben durch die Zahl der unter P invarianten Elemente der Basis \mathcal{B}_1 . Invariante Elemente zeichnen sich dadurch aus, dass die Zyklen der Permutation P jeweils lauter identische Elemente aus einer der Zeilen von \mathbf{l} enthalten. Um die invarianten Elemente abzuzählen, brauchen wir die Liste \mathcal{P}_{l_1} aller Partitionen

$$p_{l_1} = [1^{\kappa_1(p_{l_1})}, 2^{\kappa_2(p_{l_1})}, 3^{\kappa_3(p_{l_1})}, \dots] \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} i \kappa_i(p_{l_1}) = l_1 \right) \quad (\text{D.2})$$

der Länge l_1 der ersten Zeile von \mathbf{l} , für die wir dieselbe Konvention wie in (D.1) verwenden. Von diesen Partitionen tragen nur solche zur Menge der invarianten Elemente bei, die nicht größer als P sind, d.h. für die $\kappa_i(p_{l_1}) \leq m_i$ für alle i gilt. Für solche Partitionen können wir nämlich Zyklen von P mit den Elementen der ersten Zeile von \mathbf{l} füllen. Dies kann auf

$$\prod_{i=1}^{\infty} \binom{m_i}{\kappa_i(p_{l_1})}$$

Arten geschehen. Das formal unendliche Produkt über die Zyklenlänge i wird dadurch endlich, dass die Binomialkoeffizienten für $\kappa_i(p_{l_1}) = 0$ den Wert 1 haben. Außerdem verschwinden Binomialkoeffizienten, wenn die obere Zahl kleiner als die untere ist. Der gesuchte Charakter ist gleich dem Produkt aus dem obigen Ausdruck mit der Zahl der Möglichkeiten, die restlichen Zyklen der Permutation P mit Elementen aus den restlichen Zeilen von D_1 invariant zu füllen. Die restlichen Zyklen der Permutation P entsprechen einer Permutation

$$P'(p_{l_1}) = [1^{m_1 - \kappa_1(p_{l_1})}, 2^{m_2 - \kappa_2(p_{l_1})}, \dots]$$

von $n - l_1$ Elementen und die restlichen Zeilen der Darstellung D_1 einer Darstellung $D_{P'(p_{l_1})}$, wobei $P'(p_{l_1})$ $r - 1$ Zeilen hat. Damit erhalten wir die rekursive Formel

$$\chi_1(P) = \sum_{p_{l_1} \in \mathcal{P}_{l_1}} \prod_{i=1}^{\infty} \binom{m_i}{\kappa_i(p_{l_1})} \cdot \chi_{P'(p_{l_1})}(P'(p_{l_1})), \quad (\text{D.3})$$

die mit den Anfangswerten $\chi_{[n]}(P) = 1$ unser Problem löst. Die Dimensionen der Darstellungen D_1 sind durch die einfache Formel

$$s_1 = \frac{n!}{l_1! l_2! \dots l_{r-1}!} \quad (\text{D.4})$$

gegeben. Diese Dimensionen sind viel kleiner als die Dimension $n!$ der regulären Darstellung von S_n . In Paaren assoziierter Darstellungen hat die mit der kleineren Partition, die mehr Zeilen hat, die größere Dimension. Da man deren Charaktere nach Gleichung (8.54) auf die des kleineren Partners zurückführen kann, braucht man nur die Charaktere dieser Darstellungen und die der selbstassoziierten Darstellungen zu berechnen. Unter allen Darstellungen hat die selbstassoziierte Darstellung

$$D_{\max,1} = \begin{cases} [\frac{n}{2}, 2, 1^{(n-4)/2}] & (\text{n gerade}) \\ [\frac{n+1}{2}, 1^{(n-1)/2}] & (\text{n ungerade}) \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

die größte Dimension, nämlich

$$s_{\max} = \begin{cases} \frac{n!}{2 \cdot (n/2)!} & (\text{n gerade}) \\ \frac{n!}{((n+1)/2)!} & (\text{n ungerade}) \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

Weil die reduziblen Darstellungen D_1 nur irreduzible Darstellungen $D^{(\mathbf{k})}$ mit $\mathbf{k} \geq \mathbf{1}$ enthalten, kann man die Charaktere von $D^{(\mathbf{1})}$ aus denen von D_1 rekursiv durch Orthogonalisierung zu den schon bekannten Charakteren aller $D^{(\mathbf{k})}$ mit $\mathbf{k} \geq \mathbf{1}$ nach den Formeln (3.34,35) berechnen, sodass

$$\chi^{(\mathbf{1})}(P) = \chi_1(P) - \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{1}} (\chi_1, \chi^{(\mathbf{k})}) \chi^{(\mathbf{k})}(P) \quad (\text{D.7})$$

gilt. Dabei ist es vorteilhaft, die Charaktere der assoziierten Darstellungen $D^{(\vec{k})}$ zu schon bekannten $D^{(\mathbf{k})}$ mittels (8.54) zu berechnen, weil der Aufwand für die Berechnung der Charaktere nach Gleichung (D.3) mit steigender Spaltenzahl anwächst. Nach diesem Verfahren erhält man die Charaktertafeln von S_n bis z.B. $n = 15$ mit vernachlässigbarer CPU-Zeit. Auch die Berechnung über die Frobeniusfunktion (8.60) ist ohne die Nutzung von (8.54) sehr ineffizient.

Die Struktur der Darstellungen D_1 mit r Zeilen kann man besser verstehen mithilfe der Lie-Gruppe $SU(r)$. Man spezifiziert dazu die r Objekte x_i als die r Basiszustände einer fundamentalen Darstellung von $SU(n)$. Dadurch wird die Darstellung D_1 von S_n mit Darstellungen von $SU(r)$ verbunden, über die man Einblicke in die Struktur von D_1 erhalten kann.

Wir exemplifizieren das Vorgehen hier anhand des einfachsten Falles von Darstellungen mit binären Partitionen $[k, l]$, in dem man die Lie-Gruppe $SU(2)$ verwendet. Die Basiszustände der fundamentalen Darstellung sind die beiden Spinzustände $|s_z\rangle$ mit $s_z = \pm\frac{1}{2}$. Man betrachtet dann den Raum der Zustände mit $n = k + l$ Spins $\frac{1}{2}$, deren z -Komponente des Gesamtspins den Wert $S_z = (k-l)/2$ hat. Dieser Raum ist der durch S_z gekennzeichnete Unterraum des Tensorproduktraumes vom Spinraum eines Spins $S_1 = k/2$ mit dem eines Spins $S_2 = l/2$. Man weiß, dass dieser unter $SU(2)$ reduzible Darstellungsraum sich aus den irreduziblen Darstellungsräumen des Gesamtspins $S = |S_1 - S_2|, \dots, S_1 + S_2$ zusammensetzt, wobei jeder davon einfach auftritt. Damit ist klar, dass die Darstellung $D_{[k+1, l-1]}$ sich aus denselben irreduziblen Darstellungen wie $D_{[k, l]}$ zusammensetzt bis auf die Darstellung mit $S = |S_1 - S_2|$, d.h. es gilt

$$\boxed{D_{[k, l]} = D_{[k+1, l-1]} \oplus D^{([k, l])}.} \quad (\text{D.8})$$

Damit folgt sofort die einfache Formel für die Charaktere

$$\boxed{\chi^{[k, l]}(P) = \chi_{[k, l]}(P) - \chi_{[k+1, l-1]}(P).} \quad (\text{D.9})$$

Speziell für die Dimension $s^{[k, l]} = \chi^{[k, l]}(P_e)$ erhalten wir somit

$$\boxed{s^{([k, l])} = \binom{k+l}{l} - \binom{k+l}{l-1}.} \quad (\text{D.10})$$

Die analoge Behandlung von Partitionen mit höherer Zeilenzahl r erfordert detaillierte Kenntnisse über die irreduziblen Darstellungen der Lie-Gruppe $SU(r)$ und deren Multiplikationsregeln.

Literaturhinweise

Monographien zur Gruppentheorie mit Blick auf Anwendungen in der Physik.

1. G.J. Ljubarski, Anwendungen der Gruppentheorie in der Physik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.
2. J.S. Lomont, Applications of finite groups, Academic Press, New York 1959.
3. S. Sternberg, Group theory and physics,
4. G.F. Koster et al., Properties of the Thirty-Two Point Groups, M.I.T. Press, Cambridge 1963
5. A.R. Edmonds, Drehimpulse in der Quantenmechanik, Bibliographisches Institut, Mannheim 1964
6. H. Boerner, Darstellungen von Gruppen, Springer-Verlag, Berlin 1955.
7. W. Maak, Fastperiodische Funktionen, Springer-Verlag, Berlin 1967.
8. H. Georgi, Lie Algebras in Particle Physics, Perseus Books, Reading 1999.
9. N. Jacobson, Lie Algebras, Interscience Publishers, John Wiley, New York 1962.
10. R. Hermann, Lie Groups for Physicists, Benjamin, New York 1966.
11. E.P. Wigner, Group Theory, Academic Press, New York 1959 (Original in deutsch 1931).
12. D. Gorenstein, Finite Simple Groups, Plenum Press, New York 1982
13. B. Huppert, Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, Berlin 1967

Hinweise zur mathematischen Notation (Quantoren und andere Symbole):

- \forall für alle
- \exists existiert
- $\exists!$ existiert genau ein
- \Rightarrow daraus folgt
- \cdot/\cdot sodass
- \longrightarrow Abbildungspfeil
- \in Element von
- \longleftarrow umkehrbar eindeutiger Abbildungspfeil
- \iff dann und nur dann
- \sim Äquivalenz
- \subset Untermenge von
- \cap Mengendurchschnitt
- \cong isomorph

(Vorläufiges) Stichwortverzeichnis

A bbildungen	5,6,7,10,13,14,22,26,37,42,107,111,120
abelsch	6,12,13
Abgeschlossenheit, algebraische	5,37,39,119,122
Absteigeoperatoren	81
Achse	
äquivalente -	19
einseitige -	19
- einer Punktgruppe	19
- n -ter Ordnung	19
n -zählige -	19
zweiseitige -	19
additiv	95,109
-e Gruppe	26,43
additive Gruppe	43
adjungiert	52
-e Abbildung	7
-e Darstellung	50,103,105
-er Zeilenvektor	100
-es Element	5,7,10
affine Transformation	28
algebraisch abgeschlossen	5,37,39,119,122
alternierende Gruppe	108
ambivalent	8,10,19
antisymmetrisch	59,101,102,103,105,112,114,120
Anwendung, physikalische	41
äquivalent	7,8,14,20,25,27,28,29,33,34,37,38,40,41,43-48,50,51,53,57,58
Äquivalenzklasse	14,42,101
Äquivalenzrelation	8
Assoziativität	5
assoziiert	
-e Partition	111
-e Gruppenalgebra	120
-e irreduzible Darstellung	120
Auerbach	43
Aufsteigeoperatoren	81
Automorphismus	10
innerer -	10
B asis	55,103
primitive -	27-29,31,32
basiszentriert	34
beliebige Gruppen	37
Berechnung von Charaktertafeln	54
Bewegungsgruppe	13,16

Bild	15,114
-element	108
-gruppe	10,11
homomorphes -	10,40
-menge	10
-raum	38,116,117
Blockdiagonalgestalt	38,46,55
Bravaisklassen	33,34,35
Burnside, Satz von	46,50,54,63,65,66
C artan–Algebra	101
Casimiroperator	81
Charakter	46,48
- der konjugierten Darstellung	
- des Einselements	50
- einer Darstellung	
primitiver -	47,54
Charaktertafel	49,54,55,63-70,73-76,87,89-91,131-134
D arstellung	
adjungierte -	50,103
alte irreduzible -	87
äquivalente -n	41,47
-en der Doppelpunktgruppen	86
-en der Punktgruppen	63
-en der symmetrischen Gruppen	110
- dritter Art	51,66
- erster Art	51,66
- zweiter Art	51
eindimensionale -	53
irreduzible -	44,118
lineare -	7,10,40
konjugierte -	50,51
Kroneckerprodukt von -en	39,47
neue irreduzible -	87
reguläre -	6,45,110
Spinor-	86
subduzierte -	62
totalantisymmetrische -	120
totalsymmetrische -	120
transponierte -	50
Darstellungstheorie	7
- endlicher Gruppen	37,46
- von Gruppen	40
Diagonale der Gruppentafel	52
Diagonalmatrix	84,100,101

Diedergruppe	20,63,92
Dimension	
- einer Darstellung	41
- einer irreduziblen Darstellung	54
ungerade -	13
Diracschreibweise	82
direktes Produkt	11,16,57
diskrete Translationsgruppe	26
diskriminierende Zeile	111
Doppelpunktgruppen	86
Dieder-	88
nichtabelsche -	88
Oktaeder-	90
Tetraeder-	90
Ikosaeder-	91
zyklische -	88
Drehachse	13
Drehgruppe	14,81
eigentliche -	77
Drehmatrix	78
Drehspiegelung	16,18
Drehung	13-16,18-23,25,29,30,35,65,68-73,75-80,63,84,87,95
eigentliche -	17
uneigentliche -	15-17,19
e indimensional	
-e Darstellung	53
Eindeutigkeit	
- der Zerlegung einer Darstellung	47
- des Einselements	5
- des Inversen	5
Einheitswurzel	49
einseitig	19,20
Einselement	5,50
Elementarzelle	27
Elementordnung	8
Epimorphismus	10
Erzeugende	100
infinitesimale -	80
Eulersche Winkel	77
Existenz	
- eines Einselements	5
- der Inversen	5
F aktorgruppe	9,12
Familie	

äquivalente -n	37
-n linearer Abbildungen	37
flächenzentriert	34
Frobeniustheorem	62
Frobeniussche erzeugende Funktion	121
Funktion	
komplexwertige -	44
g anz-algebraisch	29,55,123
Ganzheitspolynom	
Generatoren	100
-system	6
minimales -	6
geometrische Objekte	13
Gitter	27
Gittertypen	33
einfache -	33
zentrierte -	33
Gleitspiegelung	17,18
Gell-Mann	105
Grad	121,122
- einer Darstellung	41
Gruppe	
additive - der ganzen Zahlen	43
alternierende -	108
beliebige -	37
endliche -	6,42,44
Lie-	100
- linearer Abbildungen	10
nichtisomorphe -	31
Ordnung der -	6
Rang einer -	6,20,21,88,101
unendliche -	6
zyklische -	6,20,63,91
Gruppenalgebra	6,7
Gruppentafel	6,52
h ermitsch	7,80
hexagonal	32,35
Hilbertraum	100
Holoedrie	31
homogen	
-es Maß	42,73,74,75,76,79
homomorphes Bild	10
Homomorphismus	10
I kosaedergruppe	21,66

Index	9
infinitesimale Erzeugende	80
invariant	
innerer Automorphismus	10
-e Linie	
-er Unterraum	37
-es Mittelwertfunktional	42
-e Untergruppe	8,108
Invarianzgruppe	41
Inversion	14,30
invers	
involutorisch	16
-e Klasse	8
irreduzibel	37,44,55
Isomorphieargument	22
Isomorphismus	11
J acobi-Identität	101
K ern	11,38
- eines Epimorphismus	11
Klasse	15,18,48
ambivalente -	19
- der Transpositionen	110
- des Einselements	101
inverse -	8
kommutatives Produkt von -n	9
-n äquivalenter Darstellungen	41
Ordnung einer -	8
- konjugierter Elemente	8
negative -	86
positive -	86
verdoppelte -	86
Klasseneigenschaft	8
Klassenfamilie	101
Klassenfunktion	46,48
Klassenmatrix	54
Klassenmultiplikationskoeffizient	9,12,54
Klassenpaar	86
kommutativ	6
-es Produkt	9
Kommutator	11
Kommutatorgruppe	12,53,81,109
Kommutatorklasse	12
kompakt	
-e Lie-Gruppe	106

-te Punktgruppe	25
Kompatibilität	95
-sbeziehungen	62
-stafeln	62
Komplement	
orthogonales -	42
komplex	
-e Zahlen	37
komplexwertig	
-e Funktion	44
Konjugation	8
-sklassen	108
konjugiert	
-e Darstellung	50,51
-e Elemente	8
-e Paare	91
Koordinatensystem	28
nichtorthogonales -	28
Körper	
- der komplexen Zahlen	
Knotenlinie	77
kristallographische Punktgruppen	30
Kristallsysteme	32
Kroneckerpotenz	57,59
Kroneckerprodukt	39,57
kubisch	32,35
L agrangebeziehung	9
Lie-Algebra	80,101
Lie-Gruppen	100
Rang der -	101
Ordnung der -	101
linear	
-e Abbildungen	10,37,39,40,45,111
-e Darstellung	10,41
-es Mittelwertfunktional	42
-er Vektorraum	37,40
- unabhängig	103
linksäquivalent	8
Linksinverses	5
M ächtigkeit	8
Maß, homogenes -	42,73,74,75,76,79
Matrix	
hermitesche -	80
nichtsinguläre -	41

transponierte -	13
Matrixgruppe	41
äquivalente -n	41
Matrizenfamilie	37
Mittelwertfunktional	42
monoklin	32,34
Multiplikation	5
-sfunktion	102
stafel	58,91
-n für Darstellungen	70
n egative Elemente einr Doppelgruppe	86
nicht selbstkonjugiert	51,52
nichtreell selbstkonjugiert	51,91
Normalisator	9
Normaltableau	111
Normalteiler	8,9,11,12,32,108
abelscher -	18
normiert	
-es Mittelwertfunktional	42
O ktaedergrupe	21,65
Ordnung	
- einer Gruppe	6,101
- einer Klasse	8
- eines Elements	7
gerade -	8
-srelation	111
orthogonal	32,34
-e Gruppe	14,16,18,28
-e Matrizen	13,14
-es Komplement	42
orthorhombisch	32
Orthonormierungseigenschaft	47
P arität	59
Partition	109
assozierte -	111
Perioden der Kompatibilität	95
Permutation	107
gerade -	108
Signatur einer -	108
-sgruppen	107
ungerade -	108
positiv	
- definites Skalarprodukt	7
-e Elemente einer Doppelgruppe	86

-es Mittelwertfunktional	42
physikalische Anwendungen	7,41
primitiv	
- e Basis	27-29,31,32
- er Charakter	47,54
- e Translation	34,35
Produkt	
direktes -	11,16,57
kommutatives -	9
-rechenregeln	102
Punktgruppe	18
Achse einer -	
Darstellungen der -n	63
eigentliche -n	18,22,63
- erster Art	18,22
kristallographische -	30
uneigentliche -n	22,23,30,66,67,72
- zweiter Art	18,22,66
unendliche -	25,73
zyklische -	91
q uadratisch	32
R ang einer Gruppe	6,20,21,88,101
raumzentriert	34
rechtsäquivalent	8
Rechtsinverses	5
reell	
- selbstkonjugiert	51
reduzibel	37,55
Reduzibilität	
Reduzibilität	
Kriterium für -	47
reflexiv	8
regulär	32
-e Darstellung	6,45,50,110
Restklasse	8
linksseitige -	8
rechtsseitige -	8
Restklassengruppe	9
rhomboedrisch	32
S chraubung	17
Schur	
-sches Lemma	38
Satz von –Auerbach	43
Skalarprodukt	100

hermitesches -	7,44
positiv definites -	7
selbstkonjugiert	
-e Darstellung	51,52
nicht -	51,52
nichtreell -	51
reell -	51
Spalte	
-nvektor	100
-ninvarianzgruppe	112
spezielle unitäre Gruppe	100
Spiegelung	15
Spiegelungsebene	19
Spinorfelder	86
Standarddarstellung	83
Strukturkonstanten	102
subduziert	
-e Darstellung	62,94
Symmetrieeigenschaft	28
Symmetriegruppe	20,21,23,24,28,30,31,32
symmetrische Gruppe	107
maximale -	31
symmetrisch	8,58
T eiler der Gruppenordnung	9,10,53,55
Tetraedergruppe	20,65
tetragonal	32,35
transitiv	8
Translation	16
reine -	17
Translationsgruppe	16,26-29,31,33
Transposition	108
diskrete -	26
transponiert	
-e Darstellung	50
-e Matrix	13
treu	10,11,103
trigonal	32,35
triklin	32,33
trivial	
-e Darstellung	53
Tschebyscheff–Polynom	84
Ü berdeckung	27
Überlagerungsgruppe, universelle	27,83
umkehrbar eindeutige Abbildung	6,11,41,120

unitär	7,44
spezielle -e Gruppe	100
Untergruppe	7
Auffinden von -n	107
invariante -	8,108
unabhängige -	11
zyklische -	7
Unterraum	48
echter invarianter -	37
Urbild	86,87
Vektordarstellung	14,65,78
Vektormodul	37
Vektorraum	44
linearer -	37
Vertauschung	58
Vielfachheit	
- irreduzibler Darstellungen	47
vollreduzibel	37
vollständig	
-e orthogonale Gruppe	14
-es System irreduzibler Darstellungen	44
Wellenfunktion	
quantenmechanische -	41
Wigner-Seitz-Zelle	28
Young-Diagramme	111
Young-Tableau	111
Zahl	
ganzalgebraische -	29,55,119,122,123
ganze -	26,34,43,62,82,122,123,127,129,130
komplexe -	37
Zeile	
diskriminierende -	111
-ninvarianzgruppe	112
-vektor	100
Zerlegung	44,47,50,55,60-63,72,109
- der regulären Darstellung	50
- reduzierbarer Darstellungen	55
zweiseitig	19,21
zyklisch	20,63
Zyklusstruktur	108
Zykluszerlegung	108
Zyklus	108