

Theoretische Physik I:

Mechanik

E. Müller-Hartmann

WS 2001

Hinweise auf Tippfehler und andere Unzulänglichkeiten sind willkommen. (per email an: mh@thp.uni-koeln.de)

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung	3
I. Mechanik des Massenpunktes	6
1. Kinematik eines Massenpunktes	6
2. Die Newtonschen Axiome	13
3. Energie und verwandte Begriffe	19
4. Drehimpuls und verwandte Begriffe	27
5. Eingeschränkte Bewegungen	34
II. Mechanik der Massenpunktsysteme	46
6. Einführung	46
7. Erhaltungssätze	48
8. Zweikörperproblem und -streuung	59
9. Eingeschränkte Bewegungen	71
10. Das Hamiltonsche Prinzip	84
11. Lagrangeformalismus und Noethertheorem	91
12. Hamiltonformalismus und Phasenraum	98
13. Kanonische Transformationen	109
III. Mechanik starrer Körper	127
14. Kinematik starrer Körper und Drehgruppe	127
15. Beschleunigte Bezugssysteme	140
16. Dynamik starrer Körper	144
IV. Mechanik deformierbarer Medien	164
17. Einführung	164
18. Grundbegriffe der Kontinuumsmechanik	165
19. Elastische Festkörper	176
20. Mechanik der Flüssigkeiten und Gase	186
V. Anhänge	i
A. Zentralpotentiale mit geschlossenen Bahnen	i
B. Keplerbahnen kleiner Exzentrizität	v
C. Wirkungs- und Winkelvariable beim Keplerproblem	vi
D. Kleine Schwingungen	xi
E. An Wand gelehnte Hantel	xxi
F. Der Kowalewskische Kreisel	xxv
G. Raumflug mit vorgegebener Dauer	xxviii
H. Das Wasserstoffmolekülion H_2^+	xxxii
I. Die Toda-Kette	xxxvii
Stichwortverzeichnis	xliv

0. Einleitung

Für die meisten Hörer beginnt mit dieser Vorlesung ein zweijähriger Kursus in theoretischer Physik. Daher sind zu Beginn eine allgemeine Bemerkungen angebracht.

Ziel des Kurses in theoretischer Physik wird sein, Sie mit den **Grundlagen unserer heutigen Naturbeschreibung** soweit vertraut zu machen, daß Sie in der Lage sein werden, die fundamentalen physikalischen Erscheinungen gründlich zu verstehen und quantitativ zu beschreiben. Gleichzeitig sollen Sie sich mittels dieses Kurses eine solide Grundlage für ein tieferes Eindringen in Spezialgebiete der theoretischen Physik verschaffen. Um dieses Ziel zu erreichen, sollte ein typischer Studierender die folgenden vier Dinge ernsthaft tun:

1. Die betreffende **Vorlesung** hören, in der er systematisch mit dem zu erlernenden Stoff bekannt gemacht wird.
2. Parallel dazu empfohlene **Bücher** lesen, um den Vorlesungsstoff zu vertiefen.
3. Die **Hausaufgaben** lösen, um den zu erlernenden Stoff gründlich zu reflektieren und anwenden zu lernen.
4. An den **Übungen** teilnehmen, um die richtigen Lösungen der Hausaufgaben zu diskutieren und eventuelle Unklarheiten über den Vorlesungsstoff zu eliminieren.

Diese triviale Aufzählung von für ein effizientes Studium an sich **selbstverständlichen Tätigkeiten** wird erfahrungsgemäß leider von vielen Studierenden nicht beachtet. Keine dieser vier Aktivitäten sollte vernachlässigt werden. Insbesondere kann der Nutzen einer **selbständigen Beschäftigung** mit den Hausaufgaben gar nicht hoch genug eingeschätzt werden.

Der Kursus in theoretischer Physik umfaßt die vier Teile:

1. **Mechanik** (Bewegung massiver Körper)
2. **Elektrodynamik** (Theorie elektrischer und magnetischer Felder)
3. **Quantenmechanik** (Theorie atomarer Erscheinungen)
4. **Statistische Physik** (Statistische Theorie von Systemen mit vielen Freiheitsgraden und Thermodynamik)

Die Bedeutung der klassischen Mechanik (im Gegensatz zur Quantenmechanik) besteht darin:

1. Sie war die **historisch erste** physikalische Disziplin. Das erklärt sich leicht daraus, daß sie sich mit Erscheinungen befaßt, die uns am direktesten zugänglich sind, der Bewegung von Körpern. Jeder Mensch macht auch ohne Hilfsmittel Erfahrungen, die in der Bereich der Mechanik gehören. Die klassische Mechanik ist daher in gewissem Sinne die elementarste physikalische Theorie.
2. Ihre Kenntnis ist von großer praktischer Wichtigkeit für vielerlei Anwendungen in Technik, Bauwesen und vielen anderen Lebensbereichen.

3. Sie stellt eine notwendige Grundlage zum Aufbau moderner physikalischer Theorien, wie etwa der Quantenmechanik, dar. Die vier Teile des Theoriekurses sind also nicht voneinander unabhängig.

Die grundlegenden Begriffe zum Aufbau der Mechanik sind vor etwa 300 Jahren konzipiert worden. Mit diesen Begriffen ist es dann gelungen, eine umfassende erfolgreiche Beschreibung der Bewegung von Materie und deren Ursachen zu formulieren. Man mag sich fragen, warum die Aufstellung der klassischen Mechanik gerade dann gelang. Sicher sind in diesem Zusammenhang geniale Persönlichkeiten wie **Issac Newton** (1643-1727) von großer Bedeutung gewesen. Aber es darf nicht übersehen werden, daß nach einer langen Dominanz des Aristotelischen Weltbildes schließlich die Zeit reif wurde für unsere heutige Art der Naturbetrachtung. Wichtige Wegbereiter für diese Entwicklung waren bekanntlich unter anderem **Galileo Galilei** (1564-1642) und **Johannes Kepler** (1571-1630). **Aristoteles** (384-322) und seine Schule hatten vor mehr als 2000 Jahren das gesamte "Wissen" ihrer Zeit über die Natur zusammengefaßt und geordnet. Diese Schriften wurden später für mehr als 1000 Jahre als einzig legitime Quelle von Wahrheiten über Naturerscheinungen betrachtet. Anstelle, wie heute selbstverständlich, die Natur zu beobachten durfte man Aussagen über die Natur ausschließlich aus den Schriften des Aristoteles entnehmen. Der abendländische Mensch mußte sich aus dieser unmündigen Situation befreien, die ihm durch den Dogmatismus der römischen Kirche aufgezwungen wurde (Der Philosoph **Giordano Bruno** (1548-1600) wurde im Jahre 1600 wegen abweichender Lehrmeinungen über die Natur des Universums verbrannt). Im Gegensatz zu unserem heutigen **kausalen Naturverständnis**, nach dem jeder Naturvorgang durch eine ihm vorausgehende Ursache bewirkt wird, war das aristotelische Naturverständnis **teleologisch** geprägt, d.h. ein Naturvorgang entwickelt sich in bestimmter Weise, damit ein natürlicher Endzustand erreicht wird (Ein Stein fällt zu Boden, weil er dort hingehört; ein sich selbst überlassener Körper kommt zur Ruhe, weil dies sein natürlicher Zustand ist). Die Entwicklung der modernen Physik wurde also nur dadurch möglich, daß man sich von alten Denkgewohnheiten befreien konnte: es war ein **Paradigmenwechsel** erforderlich. Außer dem Wechsel vom dogmatischen zum autarken Denken und vom teleologischen zum kausalen Naturverständnis waren auch andere Einsichten von Bedeutung, zum Beispiel die, daß die irdischen und die himmlischen Naturvorgänge von gleicher Art sind. Schließlich war die Entwicklung geeigneter mathematischer Methoden zur Naturbeschreibung unverzichtbar.

Es kann hier nicht unser Ziel sein, die langwierige historische Entwicklung bis zur klassischen Mechanik nachzuzeichnen, insbesondere weil wir heute von ganz anderen Voraussetzungen ausgehen können als die Protagonisten. Wir leben in einer technisierten Welt, die uns täglich ein kausales Naturverständnis nahelegt und uns einen riesigen Erfahrungsschatz an Bewegungsvorgängen vermittelt - man denke heutzutage insbesondere an die Raumfahrt. Wir betrachten die Natur als manipulierbar. Wir verfügen über mathematische Kenntnisse, die selbst denjenigen Newtons weit überlegen sind. Interessenten an Details der historischen Entwicklung der Mechanik seien auf das Buch "Die Mechanik" von Ernst Mach, 9. Auflage

(1933, Nachdruck 1963) verwiesen.

Es fällt uns daher heute sehr leicht, die Grundgesetze der Mechanik zu akzeptieren. Man neigt daher oft dazu, diese als selbstverständlich oder als absolut wahr anzunehmen. Ich möchte daher nicht versäumen, darauf hinzuweisen, daß die klassische Mechanik wie alle physikalischen Theorien subjektive, historisch bedingte Aspekte hat. Dies ist im 20. Jahrhundert ja durch die Aufdeckung von Grenzen ihrer Gültigkeit, die zur Entwicklung der relativistischen Mechanik und der Quantenmechanik führten, explizit deutlich geworden. Unsere Beschreibung der Natur ist immer wesentlich durch unsere Denkkategorien und durch die derzeitigen Grenzen unserer Naturkenntnis mitbestimmt und sollte niemals als allumfassend und endgültig angesehen werden. In diesem Sinne beschreibt Physik ein Abbild der Natur, nicht die Natur an sich; sie formt ein Modell von der Natur. Wir werden später ein Beispiel dafür kennenlernen, daß man auch im Rahmen unserer kausalen Naturbeschreibung zu einer Formulierung der Mechanik kommen kann, die sich teleologisch deuten läßt (siehe Hamiltonsches Prinzip). Wegen der Möglichkeit solcher Mehrdeutigkeiten läßt sich eine logische Herleitung eines mechanistischen oder materialistischen Weltbildes aus der “Gültigkeit” oder “Richtigkeit” der Newtonschen Mechanik nicht rechtfertigen.

Nach diesen historischen Vorbemerkungen wollen wir uns dem konkreten Thema dieser Vorlesung zuwenden. Unser naiver naturphilosophischer Standpunkt ist der folgende: Es gibt eine objektive materielle Welt, der wir als Physiker beobachtend gegenüberstehen. Wir nennen die Teile dieser Welt **Körper**. Die Körper befinden sich in einem **dreidimensionalen Euklidischen Raum**, den wir als gegeben hinnehmen und nicht weiter axiomatisieren wollen. Unter Benutzung von **Maßstäben** können wir die Lage der Körper im Raum unter Bezugnahme auf ein **Bezugssystem**, das ebenfalls aus materiellen Körpern gebildet wird, angeben. Im Laufe der **Zeit**, die wir ebenfalls als eine absolute gegebene Kategorie hinnehmen, kann sich die Lage eines Körpers (relativ zum Bezugssystem) verändern. Indem wir die Zeit mittels **Uhren** messen, können wir die sich daraus ergebenden **Bewegungen** quantitativ beschreiben. Die Mechanik handelt von den Bewegungen der Körper in Raum und Zeit und den Ursachen der Bewegung. Nach der Art der betrachteten Körper wird die Vorlesung in 4 Abschnitte unterteilt werden: **Massenpunkte, Punktsysteme, starre Körper** und **deformierbare Medien**.

Als Textbücher zum Lesen und Nachschlagen neben der Vorlesung empfehle ich:

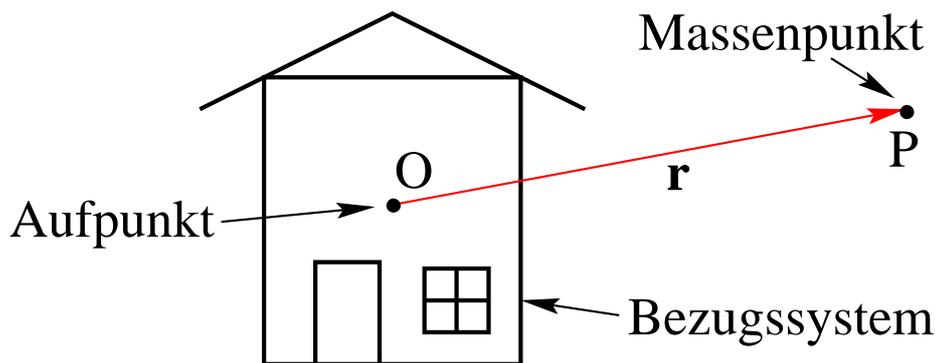
1. H. Goldstein: “Klassische Mechanik”, Akademische Verlagsgesellschaft (1989)
2. A. Budó: “Theoretische Mechanik”, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (1971)
3. F. Scheck: “Mechanik”, Springer-Verlag (1994)
4. V. I. Arnold: “Mathematical Methods of Classical Mechanics”, Springer-Verlag (1978)
5. N. Straumann: “Klassische Mechanik”, Lecture Notes in Physics 289, Springer-Verlag (1987)

I. Mechanik des Massenpunktes

1. Kinematik eines Massenpunktes

Wir beginnen mit einer Idealisierung: **Massenpunkte** oder punktförmige Körper sind fiktive Körper ohne räumliche Ausdehnung (d.h. auch, ohne innere Struktur), aber mit endlicher Masse. Ihre Lage kann vollständig durch einen Vektor im dreidimensionalen Raum spezifiziert werden, der in einem vereinbarten Anfangspunkt oder **Aufpunkt** O eines **Bezugssystems** S angelegt wird:

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}. \quad (1.1)$$



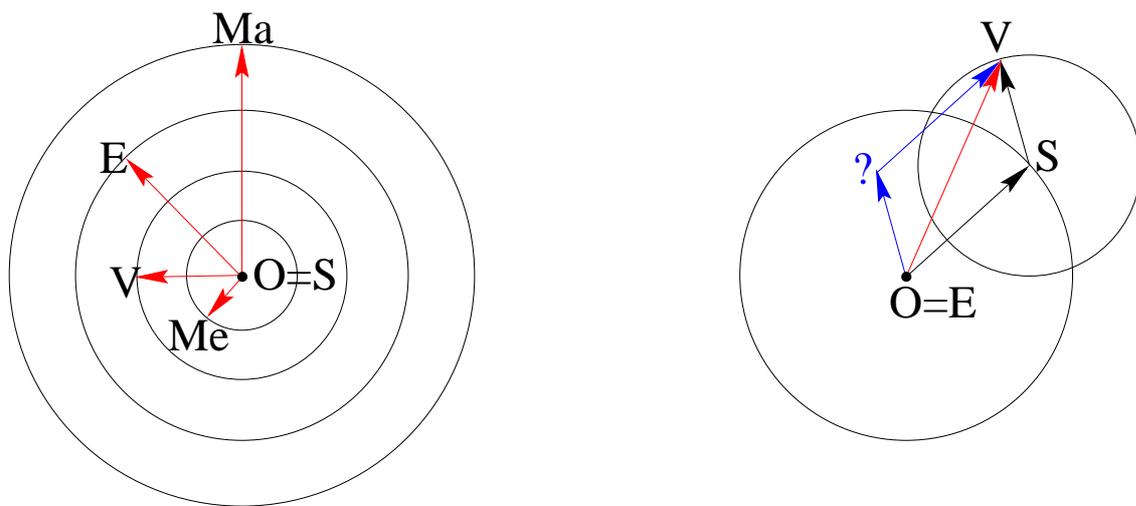
Der Begriff des Massenpunktes wird immer dann als näherungsweise Beschreibung eines Körpers brauchbar sein, wenn dieser genügend klein ist. Dabei hängt es von den Umständen ab, was klein bedeutet; denn von weitem betrachtet erscheint natürlich jeder Körper klein. So können in der Himmelsmechanik die Planeten oft als Massenpunkte angesehen werden; die Lage der Erde ist dann durch einen Punkt im Raum gegeben. Dagegen verlangt die Post aus verständlichen Gründen detailliertere Angaben, wenn sie auf der Erde einen Brief zustellen soll. Damit ist klar, daß ein und dasselbe Objekt je nach Fragestellung oder Blickwinkel einmal als Massenpunkt angesehen werden kann, ein andermal nicht.

Der Massenpunkt, von dem dieses Kapitel handelt, ist aber nicht nur als **Näherungskonzept** für reale Körper gedacht, sondern auch als eine **Arbeitshypothese** zur Einführung der Grundbegriffe der Mechanik. Wir werden später auf dieser Grundlage lernen, auch die Mechanik ausgedehnter Körper angemessen zu beschreiben, und können dann in jedem Fall entscheiden, ob die Massenpunktnäherung gut ist und wie gut sie ist. Die Mechanik der Massenpunkte ist die denkbar einfachste Mechanik.

Wir werden zunächst kurz an die Kinematik eines Massenpunktes erinnern, d.h. an die wichtigsten Begriffe zur Beschreibung seiner Bewegung. Danach werden wir uns der Dynamik eines Massenpunktes zuwenden, indem wir nach den Ursachen dieser Bewegung fragen.

Die **Bewegung** eines Massenpunktes, gegeben durch die zeitliche Veränderung seiner Lage im Bezugssystem, kann durch den Ortsvektor $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ als Funktion

der Zeit charakterisiert werden: $\mathbf{r}(t)$. Die Kurve (gerichtete Punktmenge), die er dabei durchläuft, nennt man seine **Bahn**. Die Vektorfunktion $\mathbf{r}(t)$ ist eine Parameterdarstellung der Bahn. Daß die Beschreibung der Bewegung vom Bezugssystem abhängt, sei kurz am Beispiel der Planetenbewegung diskutiert. In einem in der Sonne fixierten Bezugssystem beschreiben alle Planeten (näherungsweise) Kreisbahnen. Ein gleichfalls am Fixsternhimmel orientiertes, aber mit der Erde bewegtes Bezugssystem (das also nicht die tägliche Eigenrotation der Erde mitmacht) läßt die Sonne auf einer Kreisbahn erscheinen und die übrigen Planeten auf Kreisen um die Sonne, also auf Epizyklen um die Erde. Beide Beschreibungen sind vom kinematischen Standpunkt völlig gleichwertig, die erste ist ein wenig einfacher.



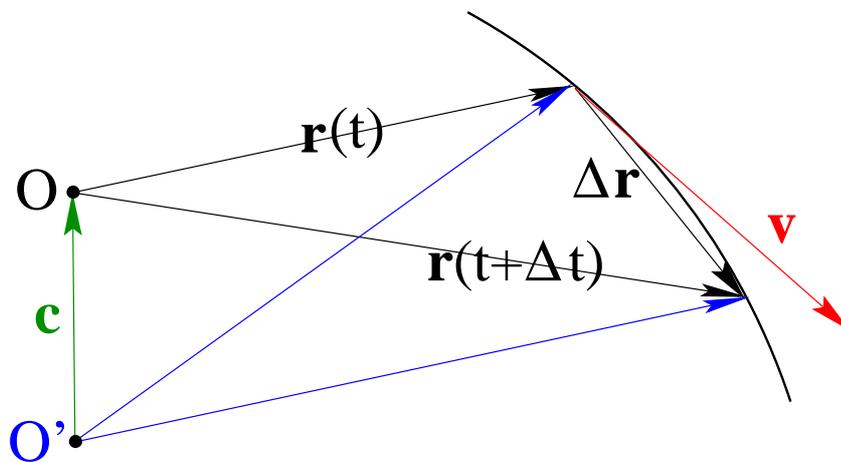
Als Kuriosität sei bemerkt, daß die Konstruktion einer Zykloidenbahn als Vektorsumme zweier Kreisbahnen nicht eindeutig ist. Wegen des Vektorparallelogramms (Kommutativität der Vektoraddition) sind zwei Konstruktionen derselben Zykloide möglich. Während die erste als Hilfspunkt die Position der Sonne verwendet und daher nahelegt, daß die anderen Planeten um die Sonne kreisen, stellt sich der Hilfspunkt (?) der zweiten Konstruktion als ein von Planet zu Planet verschiedener willkürlicher Punkt im interplanetaren Raum heraus. Tatsächlich wurde für die inneren Planeten im Altertum die erste Konstruktion verwendet und Merkur und Venus wurden als Monde der Sonne betrachtet. Für die äußeren Planeten wurde jedoch die zweite Konstruktion bevorzugt, die die Kreisbewegung dieser Planeten um die Sonne verschleiert. Vom kinematischen Standpunkt sind auch diese beiden Konstruktionen völlig gleichwertig, aber nicht vom dynamischen Standpunkt aus, weil nur die erste einen Hinweis auf die möglichen Hintergründe der Planetenbewegung geben kann. Dieses Beispiel zeigt auch, daß man aus einer quantitativ sehr befriedigenden Beschreibung eines Naturvorgangs (zweite Konstruktion) keineswegs immer schließen kann, daß man dem Phänomen auf den Grund gegangen ist; eine noch so erfolgreiche Theorie mag so unglücklich formuliert sein, daß sie die Hintergründe des Geschehens völlig verschleiert.

Ein wichtiger kinematischer Begriff ist die **Geschwindigkeit** eines Massenpunk-

tes, gegeben durch

$$\mathbf{v}(t) \doteq \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$, genauer **Momentangeschwindigkeit** zur Zeit t genannt, ist ebenfalls ein Vektor und wird durch die Messung des Ortes \mathbf{r} zu zwei genügend benachbarten Zeiten t und $t + \Delta t$ bestimmt. Die Richtung der Geschwindigkeit ist tangential zur Bahn des Massenpunktes und ihr Betrag gibt den pro Zeitintervall zurückgelegten Weg auf der Bahn an. Die Geschwindigkeit hängt im Gegensatz zum Ort \mathbf{r} nicht von der Wahl des Aufpunktes O im Bezugssystem ab, denn mit einem zeitunabhängigen Verschiebungsvektor $\mathbf{c} = \overline{O'O}$ gilt natürlich $d[\mathbf{r}(t) + \mathbf{c}]/dt = d\mathbf{r}(t)/dt$.



Die **Beschleunigung** eines Massenpunktes ist die zeitliche Ableitung seiner Geschwindigkeit:

$$\mathbf{a}(t) \doteq \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.3)$$

Man kann die Beschleunigung im Prinzip in Analogie zu (1.2) durch die Messung zweier benachbarter Geschwindigkeiten bestimmen. Sie ergibt sich aber auch aus der Messung des Ortes \mathbf{r} zu drei benachbarten Zeiten, z.B. den Zeiten $t - \Delta t$, t und $t + \Delta t$. Um dies einzusehen, entwickelt man den Ortsvektor in eine Taylorreihe:

$$\mathbf{r}(t + \delta) = \mathbf{r}(t) + \delta \cdot \mathbf{v}(t) + \frac{\delta^2}{2} \cdot \mathbf{a}(t) + O(\delta^3)$$

und berechnet

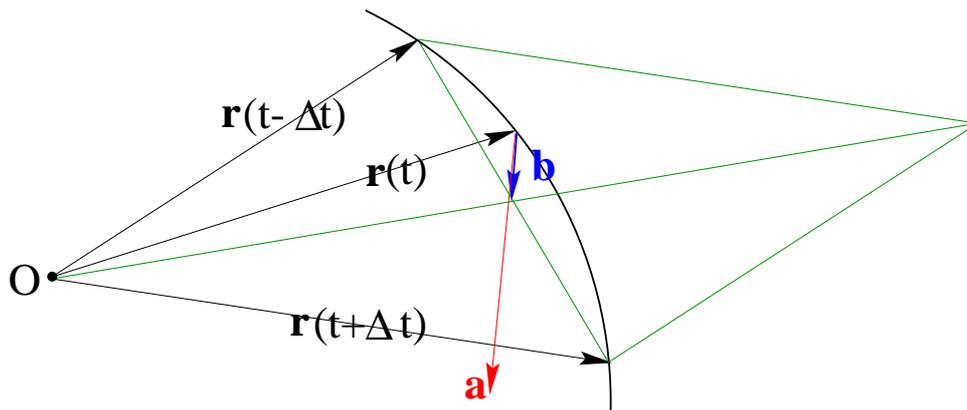
$$\mathbf{r}(t + \Delta t) + \mathbf{r}(t - \Delta t) - 2\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}(t) \cdot (\Delta t)^2 + O((\Delta t)^3).$$

Daher gilt offenbar

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) + \mathbf{r}(t - \Delta t) - 2\mathbf{r}(t)}{(\Delta t)^2}. \quad (1.4)$$

Die drei Endpunkte der Vektoren $\mathbf{r}(t + \Delta t)$, $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{r}(t - \Delta t)$ bestimmen eine Ebene (wenn sie nicht zufällig auf einer Geraden liegen), die für $\Delta t \rightarrow 0$ in die **Schmiegungebene** der Bahn übergeht. Die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ liegt folglich in der Schmiegungebene der Bahn und zeigt in Richtung der konkaven Seite der Bahn. Die in der Figur gezeigte Konstruktion mittels der Diagonalen des von den beiden Vektoren $\mathbf{r}(t \pm \Delta t)$ aufgespannten Parallelogramms ergibt den Vektor

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}(t + \Delta t) + \mathbf{r}(t - \Delta t)) - \mathbf{r}(t) \sim \frac{(\Delta t)^2}{2} \mathbf{a}(t).$$



Wir halten noch fest, daß die Beschleunigung nicht nur invariant gegen eine zeitlich konstante Verschiebung des Aufpunktes ist wie die Geschwindigkeit, sondern gegen eine Verschiebung von O mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 . Sei nämlich $\overrightarrow{O'O} = \mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot t$, dann gilt mit $\overrightarrow{O'P} = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{c}(t)$ offenbar $\mathbf{a}'(t) \doteq d^2\mathbf{r}'(t)/dt^2 = \mathbf{a}(t)$.

Bei der Behandlung konkreter kinematischer Probleme werden bevorzugt analytische Methoden anstelle von geometrischen verwendet, man rechnet mit Zahlen anstelle von Vektoren. Dazu müssen die Vektoren durch ihre Komponenten in einem geeigneten **Koordinatensystem** dargestellt werden. Die wichtigsten Koordinatensysteme sind die **kartesischen**, die auf einer **rechtshändigen orthonormierten Basis** $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ mit den Eigenschaften

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) = +1 \quad (1.5)$$

füßen und auf die Koordinatendarstellung

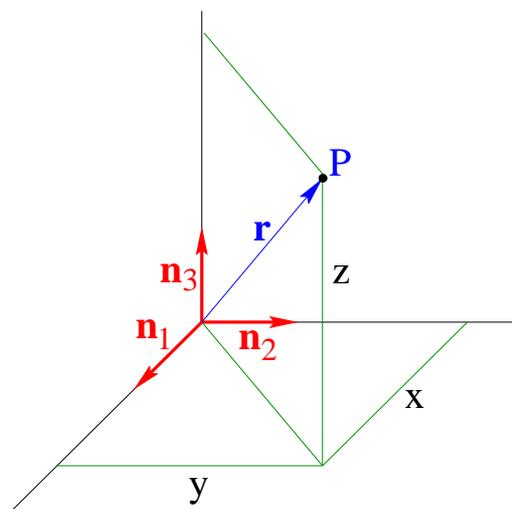
$$\mathbf{r} = x\mathbf{n}_1 + y\mathbf{n}_2 + z\mathbf{n}_3 \quad (1.6)$$

führen. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren entspricht jede Vektorgleichung drei Zahlengleichungen für die Komponenten. Zum Beispiel entsprechen der Vektorgleichung (1.2) mit $\mathbf{v} = v_x\mathbf{n}_1 + v_y\mathbf{n}_2 + v_z\mathbf{n}_3$, da die \mathbf{n}_i zeitunabhängig sind, die drei Komponentengleichungen

$$v_x(t) = \dot{x}(t), \quad v_y(t) = \dot{y}(t), \quad v_z(t) = \dot{z}(t). \quad (1.7)$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ergibt sich aus den Komponenten als

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.8)$$

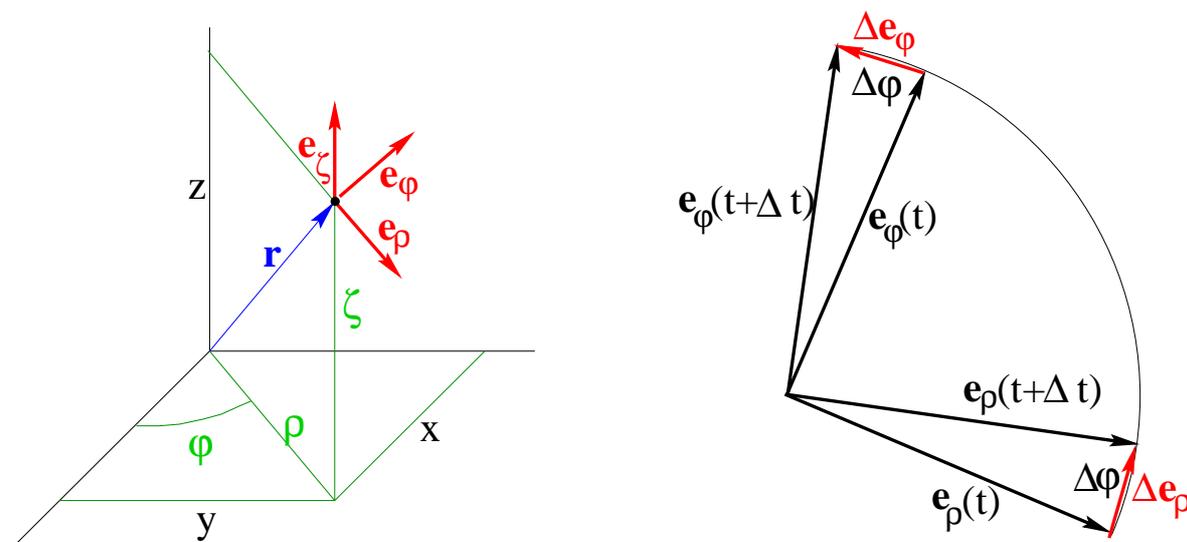


Eine besondere Eigenschaft **geradliniger Koordinatensysteme** wie den kartesischen ist, daß sich die Vektoraddition auf die Komponenten überträgt, weil der Vektor eine lineare Funktion seiner Koordinaten ist: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} \rightarrow a_x + b_x = c_x, \dots$ Dies gilt nicht für andere Koordinatensysteme, wie die gebräuchlichen Polar-, Zylinder- oder Kugelkoordinaten, in denen nicht alle Koordinatenlinien Geraden sind. Wir erinnern hier kurz an diese wichtigen krummlinigen Koordinaten.

Zylinderkoordinaten: $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, \zeta)$ ($0 < \rho, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < \zeta < \infty$)

Die Transformation von Zylinder- auf kartesische Koordinaten lautet

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= \zeta. \end{aligned} \quad (1.9)$$



Die ρ -Koordinatenlinien (φ und ζ konstant) und die ζ -Koordinatenlinien (ρ und φ konstant) sind hier Geraden, während die φ -Koordinatenlinien Kreise um die ζ -Achse sind. Die Einheitsvektoren \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ und \mathbf{e}_ζ in Richtung der Koordinatenlinien bilden ein orthonormiertes rechtshändiges Dreibein. Es kann nützlich sein, die Bewegung eines Massenpunktes nach diesen Basisvektoren zu zerlegen statt nach (1.6). Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß \mathbf{e}_ρ und \mathbf{e}_φ vom Punkt P abhängen und sich daher bei einer Bewegung mit der Zeit ändern. Aus dem rechten Teil der letzten Figur liest man ab: $\Delta \mathbf{e}_\rho \approx \Delta \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi$ und $\Delta \mathbf{e}_\varphi \approx \Delta \varphi \cdot (-\mathbf{e}_\rho)$. Also gilt

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho(t) = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi(t), \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi(t) = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho(t), \quad \dot{\mathbf{e}}_\zeta(t) = 0. \quad (1.10)$$

Die Zerlegung des Ortsvektors nach dem Dreibein lautet

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t) \cdot \mathbf{e}_\rho(t) + \zeta(t) \cdot \mathbf{e}_\zeta. \quad (1.11)$$

Daher ist die Geschwindigkeit durch

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\rho}(t) \cdot \mathbf{e}_\rho(t) + \rho(t) \dot{\varphi}(t) \cdot \mathbf{e}_\varphi(t) + \dot{\zeta}(t) \cdot \mathbf{e}_\zeta \quad (1.12)$$

gegeben mit der Radialkomponente $v_\rho = \dot{\rho}(t)$ und der Transversalkomponente $v_\varphi = \rho(t) \dot{\varphi}(t)$. Für die Beschleunigung ergibt sich schließlich

$$\mathbf{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{\zeta} \mathbf{e}_\zeta. \quad (1.13)$$

In analoger Weise behandelt man

sphärische Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten): $(x, y, z) \rightarrow (r, \vartheta, \varphi)$
 $(0 < r, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi)$

Die Transformation von diesen auf kartesische Koordinaten lautet

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Hier sind die r -Koordinatenlinien vom Aufpunkt ausgehende radiale Strahlen und die ϑ - und φ -Koordinatenlinien Längen- und Breitenkreise von Kugeln. Das rechtshändige orthonormierte Dreibein \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϑ , \mathbf{e}_φ enthält hier keinen festen Vektor mehr. Die zeitlichen Ableitungen der Basisvektoren sind durch folgende Gleichungen gegeben (eine Figur zur Veranschaulichung findet sich bei Budó auf Seite 13):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\vartheta &= \dot{\varphi} \cos \vartheta \mathbf{e}_\varphi - \dot{\vartheta} \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi} (\sin \vartheta \mathbf{e}_r + \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Mit

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(t) \quad (1.16)$$

erhält man daraus für die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(t) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \quad (1.17)$$

und für die Beschleunigung

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) = & (\ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) \mathbf{e}_r \\ & + (r \ddot{\vartheta} + 2 \dot{r} \dot{\vartheta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) \mathbf{e}_\vartheta \\ & + (r \ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2 \dot{\varphi} (\dot{r} \sin \vartheta + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta)) \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Nützlich kann auch das sogenannte **natürliche Koordinatensystem** einer Bewegung $\mathbf{r}(t)$ sein. Es wird in jedem Bahnpunkt durch das rechtshändige orthormierte Dreibein aus dem Tangentialvektor $\mathbf{t}(t)$, dem Normalenvektor $\mathbf{n}(t)$ und dem Binormalenvektor $\mathbf{b}(t)$ aufgespannt. Da der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} in tangentiale Richtung zeigt, ist der Tangentialeinheitsvektor durch die Gleichung

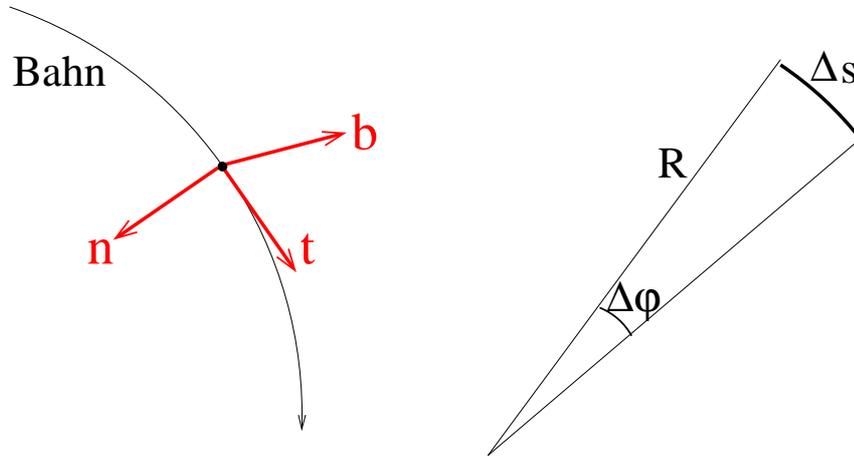
$$\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{t}(t) \quad (1.19)$$

gegeben. Wenn s die Weglänge längs der Bahn mißt, kann man den Tangentialvektor auch durch

$$\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds \quad (1.20)$$

definieren. Indem man die Bahn um den Punkt $\mathbf{r}(t)$ durch einen Kreis mit Krümmungsradius R in der Schmiegeebene approximiert, erhält man den Normalenvektor $\mathbf{n}(t)$ als Einheitsvektor in Richtung auf den Kreismittelpunkt. In Analogie zu (1.10) gilt dann wegen $R \cdot \dot{\varphi} = v$

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{v}{R} \mathbf{n}. \quad (1.21)$$



Damit berechnet sich die Beschleunigung zu

$$\mathbf{a}(t) = \dot{v} \mathbf{t} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n}. \quad (1.22)$$

Die Komponente $a_t = \dot{v}$ heißt Tangential- oder Bahnbeschleunigung, die Komponente $a_n = v^2/R$ Normal- oder Zentripetalbeschleunigung. Der Binormalenvektor ist schließlich durch

$$\mathbf{b}(t) \doteq \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) \quad (1.23)$$

gegeben.

2. Die Newtonschen Axiome

Die Newtonschen Axiome bilden die Grundlage der Dynamik des Massenpunktes und damit der gesamten klassischen Mechanik. Sie beruhen auf Erfahrungen. Sie sind entstanden durch geeignete Idealisierung empirischer Fakten. Sie stellen den kondensierten Inhalt einer umfangreichen Anzahl von idealisierten Beobachtungen dar. Die entscheidenden dabei auftretenden Begriffsbildungen sind die des **Inertialsystems**, der **Masse** und der **Kraft**.

Das **erste Axiom** handelt von der (idealisierten) Beobachtung, daß Körper (Massenpunkte) sich unter bestimmten Umständen mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Bahn bewegen. Die entscheidende Aussage des Axioms besteht dabei nicht in der Feststellung der Art der Bewegung (geradlinig gleichförmig), sondern in der Spezifizierung der Umstände. Die Umstände sind durch zweierlei gegeben:

1. durch äußere Einflüsse auf den Körper,
2. durch das Bezugssystem, in dem die Bewegung des Körpers beschrieben wird.

Was **äußere Einflüsse** betrifft, wissen wir, daß man die Bewegung eines Körpers von außen auf vielfältige Weise so verändern kann, daß sie nicht geradlinig oder gleichförmig ist. Der gesuchte Umstand muß daher das Fehlen jeglicher äußerer Einflüsse sein. Wir wollen uns fragen, ob und wie man das Vorhandensein äußerer Einflüsse objektiv wahrnehmen kann. Nur wenn das gelingt, kann man sicher sein, ihre Abwesenheit zweifelsfrei nachweisen zu können. Wenn andere Körper den betrachteten Körper durch Stoßen beeinflussen, ist die Situation klar. Wir wissen aber, daß ein Körper auch bei Abwesenheit anderer Körper in seiner Nachbarschaft durch **Felder** beeinflusst werden kann. Wir müssen uns daher fragen, wie wir die Abwesenheit oder Anwesenheit von Feldern objektiv feststellen können. Elektrische Felder beeinflussen (beschleunigen) Körper in Abhängigkeit von deren elektrischer Ladung. Dadurch daß verschieden geladene Körper verschieden beschleunigt werden, kann man die Anwesenheit solcher Felder zweifelsfrei feststellen. Alle uns bekannten äußeren Einflüsse erweisen sich solchermaßen als eindeutig identifizierbar, bis auf eine bedeutende Ausnahme: die **Gravitationsfelder**. Es ist bekannt, daß Gravitationsfelder auf alle Körper mit sehr großer Genauigkeit in gleicher Weise wirken (sie gleich beschleunigen). Daher verschwindet ihre Wirkung exakt in einem in gleicher Weise beschleunigten Bezugssystem. Gravitationsfelder sind daher lokal mittels mechanischer Experimente nicht von beschleunigten Bezugssystemen zu unterscheiden. Daß diese Aussage sich auf alle Naturerscheinungen erweitern läßt (zum Beispiel auch auf Experimente mit Licht), hat eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der **Allgemeinen Relativitätstheorie** gespielt.

Indem wir das spezifische Problem der Gravitationsfelder beiseite schieben, können wir das Problem der objektiven Identifizierung äußerer Einflüsse als gelöst betrachten und können uns den Bezugssystemen zuwenden, in denen das erste Axiom gelten soll. Wir formulieren nunmehr prägnanter als oben:

1. Newtonsches Axiom (Trägheitsgesetz):

Es existiert ein Bezugssystem, in dem sich jeder Körper, der frei von äußeren Einflüssen ist, geradlinig gleichförmig bewegt.

Ein solches Bezugssystem heißt **Inertialsystem**. Aus unseren kinematischen Kenntnissen aus dem vorigen Kapitel über die Invarianz der Beschleunigung unter Aufpunkttransformationen der Gestalt $\overrightarrow{O'O} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot t$ schließen wir sofort, daß jedes sich relativ zu einem Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 bewegendes Bezugssystem ebenfalls ein Inertialsystem ist. Konkretisiert wird ein Bezugssystem nicht nur durch den Aufpunkt, sondern auch durch seine räumliche Richtungsorientierung. Diese wird am einfachsten durch ein Tripel von Basisvektoren (1.5) spezifiziert, relativ zu dem alle Massenpunkte sich bewegen. Verschiedene Basistriple charakterisieren dasselbe Bezugssystem, solange sie sich nicht gegeneinander bewegen.

Der Begriff des Inertialsystems beruht natürlich auch auf einer Idealisierung. Für viele Zwecke kann ein fest mit der Erde verbundenes Bezugssystem (Laborsystem) als Inertialsystem betrachtet werden. Erst durch Präzisionsexperimente (Foucaultsches Pendel) stellt man fest, daß solche Systeme wegen der täglichen Rotation der Erde um ihre Achse doch nicht inertial sind. Eine bessere Annäherung an ein Inertialsystem, die die Erdrotation eliminiert, erzielt man daher durch eine Orientierung am Fixsternhimmel. Wenn man den Aufpunkt dieses Bezugssystems mit dem Erdmittelpunkt identifiziert, beschreibt er eine beschleunigte Kreisbewegung um die Sonne (direkt nachgewiesen durch die Entdeckung der Fixsternparallaxe durch Bessel im Jahre 1838). Daher sollte man bei noch höheren Präzisionsansprüchen den Aufpunkt besser an der Sonne festmachen. Da aber die Sonne wie auch der Fixsternhimmel um das Zentrum der Milchstraße rotieren, wird man gegebenenfalls selbst mit dieser Definition eines Inertialsystems nicht zufrieden sein. Man sieht, wie man so durch eine Folge von Verfeinerungen dem Ideal des Inertialsystems immer näher kommen kann.

Die Bewegung eines Körpers unter den einfachsten Bedingungen, nämlich denen der Einflußfreiheit und im Inertialsystem, ist damit verstanden. Der Übergang von Inertialsystemen zu anderen (beschleunigten) Bezugssystemen ist eine rein kinematische Aufgabe, der wir uns später (in Kapitel 13) zuwenden werden. Unter der Wirkung von äußeren Einflüssen wird ein Körper im allgemeinen beschleunigt. Wie dies geschieht, wird durch das zweite Newtonsche Axiom beschrieben. Dieses Axiom enthält neben der kinematischen Größe Beschleunigung, $\mathbf{a}(t)$, den Begriff der **Masse** m des Massenpunktes sowie den der **Kraft** \mathbf{F} , die auf den Massenpunkt einwirkt, und lautet:

2. Newtonsches Axiom:

In Inertialsystemen gilt die **Newtonsche Bewegungsgleichung**

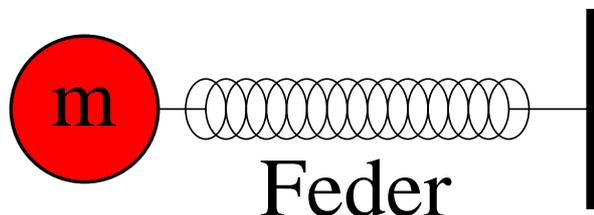
$$m \mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t). \quad (2.1)$$

Sie gibt die Beschleunigung an, die ein Körper der Masse m unter der Wirkung der Kraft \mathbf{F} erfährt. Die Beschleunigung, die ein Körper erfährt, hängt erfahrungsgemäß

1. von Eigenschaften des Körpers und
2. von den äußeren Bedingungen (etwas förmlicher: der geometrischen und physikalischen Beschaffenheit der näheren oder weiteren Umgebung des Körpers)

ab. Wenn man nun die äußeren Bedingungen einmal fest vorgibt, kann die Beschleunigung von vielerlei Körpereigenschaften wie Masse, elektrischer Ladung (bei Anwesenheit elektrischer Felder), magnetischem Moment (bei Anwesenheit inhomogener magnetischer Felder), Oberflächenbeschaffenheit (zum Beispiel, wenn der Körper dem Wind ausgesetzt ist) abhängen. Von all diesen Körpereigenschaften taucht nur die Masse auf der linken Seite des 2. Newtonschen Axioms auf. Man muß sich fragen, was die Masse vor allen anderen Körpereigenschaften auszeichnet. Die Antwort ist, daß alle anderen Körpereigenschaften nur unter bestimmten äußeren Bedingungen die Beschleunigung beeinflussen, die Masse aber unter allen Bedingungen. Dies erklärt, warum die Masse m in (2.1) explizit vorkommt, während andere Körpereigenschaften bei Bedarf in die Kraft \mathbf{F} integriert werden.

Wie kann man die Masse eines Körpers messen? Eine Möglichkeit, die sich anbietet, besteht darin, eine Art der äußeren Einwirkung zu wählen, von der man weiß, daß die Beschleunigungswirkung von keiner anderen Körpereigenschaft außer der Masse abhängt. Als einfaches Beispiel könnte man an eine Feder denken, an der die Masse m befestigt ist.



Damit haben wir die rechte Seite der Gleichung (2.1) fest vorgegeben und können die Massen verschiedenster Körper aufgrund der Beziehung $m_i \mathbf{a}_i = m_j \mathbf{a}_j$ durch Messung der Beschleunigungen zueinander ins Verhältnis setzen. (Aus praktischen Gründen wird man die Masse vielleicht eher eine Schwingung um ihre Ruhelage durchführen lassen und das Massenverhältnis über die Frequenzen ν dieser Schwingungen bestimmen: $m_i/m_j = (\nu_j/\nu_i)^2$; man erinnere sich dazu an die Behandlung von Schwingungen in der Physik I).

Diese ziemlich gebräuchliche **dynamische Massendefinition** befriedigt deshalb nicht völlig, weil die Unabhängigkeit der Wirkung der Feder von allen anderen Körpereigenschaften vorauszusetzen ist. Wir haben eben den Begriff der Kraft noch nicht definiert und können daher nicht überzeugend von einer konstanten Kraft sprechen, auf der die obige Diskussion versteckt fußte. Für eine alternative Massendefinition benutzt man deshalb lieber Stoßprozesse zwischen Körpern.

Diese **kinematische Massendefinition** fußt wesentlich auf der Gültigkeit des 3. Newtonschen Axioms und wir werden sie daher erst später diskutieren.

Nachdem die Masse durch Vereinbarung einer Einheitsmasse wie oben diskutiert festgelegt ist, wird die Kraft mittels des 2. Newtonschen Axioms (2.1) bestimmt. Diese Gleichung stellt tatsächlich die einzige Möglichkeit dar, die Kraft zu messen. Der Physiker wird durch Messung der Beschleunigung feststellen, in welchen Situationen welche Kräfte wirken. Basierend auf der damit gewonnenen Erfahrung kann er dann die Kräfte für die verschiedensten Situationen voraussagen. Dieser Vorgang gehört aber nicht eigentlich in den Bereich der Mechanik. Die eigentliche Aufgabe der Mechanik besteht darin, aus irgendwie gewonnenen Kraftgesetzen auf die Bewegung zu schließen.

Die Gleichung (2.1) ist dann folgendermaßen zu verstehen: Das gegebene Kraftgesetz sagt, daß der Massenpunkt die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ verspürt, wenn er zur Zeit t am Ort \mathbf{r} liegt und die Geschwindigkeit \mathbf{v} hat. Die eigentliche Aussage des 2. Newtonschen Axioms besteht darin, daß immer eine Kraft existiert, die nur (höchstens) von Ort, Geschwindigkeit und Zeit abhängt. Die **Bewegungsgleichung** (2.1) dient dann bei Kenntnis von **Anfangsbedingungen** \mathbf{r} und \mathbf{v} zur Zeit t zur Bestimmung des Bewegungsablaufs zu allen Zeiten (insbesondere zu späteren Zeiten). In mathematischer Terminologie stellt sie ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung von 3 Differentialgleichungen (den 3 Komponenten des Ortsvektors \mathbf{r}) dar. Die Lösungstheorie sagt, daß (unter physikalisch vernünftigen Annahmen über die Glattheit der Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$) bei Vorgabe von 6 Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ und $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$ die Lösung $\mathbf{r}(t)$ eindeutig bestimmt ist. Durch diese Aussage ist präzisiert, was man unter der **Determiniertheit** mechanischer Naturerscheinungen zu verstehen hat: Durch den Zustand des Massenpunktes zu einer Zeit t_0 , definiert durch die beiden Vektoren \mathbf{r}_0 und \mathbf{v}_0 , ist seine zukünftige Bewegung eindeutig festgelegt.

Wie schon oben erwähnt, bewirken **Gravitationsfelder** Beschleunigungen, die nicht von der Masse des beschleunigten Körpers abhängen. Um diesen Sachverhalt zu vertiefen, ordnet man jedem Körper gerne zwei begrifflich verschiedene Massen zu, eine **träge Masse** m_t und eine **schwere Masse** m_s . Die für das Gravitationsfeld verantwortlichen Quellen erzeugen ein Beschleunigungsfeld $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$, mittels dessen sich die auf einen Körper der schweren Masse m_s wirkende Gravitationskraft als $\mathbf{F} = m_s \mathbf{g}$ schreibt. Die Newtonsche Bewegungsgleichung für diesen Körper lautet dann $m_t \mathbf{a} = \mathbf{F} = m_s \mathbf{g}$, wenn m_t seine träge Masse ist. Durch Präzisionsexperimente hat man nachweisen können, daß das Massenverhältnis m_t/m_s für alle Körper mit sehr hoher Präzision dasselbe ist. Aus diesem Grunde identifiziert man diese beiden Massen miteinander, so daß sie sich aus der Bewegungsgleichung exakt herauskürzen.

Das 3. Newtonsche Axiom betrachtet die gegenseitige Wirkung von Körpern aufeinander. Alle Kräfte auf einen Körper rühren letztlich von anderen Körpern her. Nehmen wir an, der Körper 2 übe auf den Körper 1 die Kraft $\mathbf{F}_{1\leftarrow 2}$ und der Körper 1 auf den Körper 2 die Kraft $\mathbf{F}_{2\leftarrow 1}$ aus. Dann besagt das

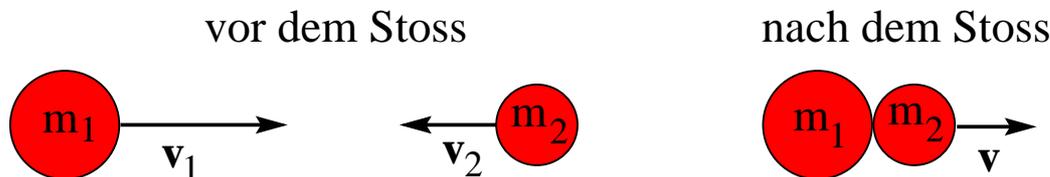
3. Newtonsche Axiom (Reaktionsprinzip):

Kraft und Reaktionskraft sind entgegengesetzt gleich,

$$\mathbf{F}_{2\leftarrow 1} = -\mathbf{F}_{1\leftarrow 2}. \quad (2.2)$$

Dieses wichtige Axiom, dessen Konsequenzen wir später genauer würdigen werden, ist tatsächlich von grundlegender Bedeutung für die innere Konsistenz der Grundbegriffe der Newtonschen Mechanik. Alle Körper außer den Elementarteilchen sind ja aus Teilkörpern zusammengesetzt, die aufeinander Kraftwirkungen ausüben. Betrachten wir daher einen Körper K der Masse m , der keinen äußeren Kräften ausgesetzt ist und aus den beiden fest miteinander verbundenen Teilkörpern K_1 und K_2 der Massen m_1 und m_2 besteht ($\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$, $m = m_1 + m_2$). Wenn diese beiden Teilkörper Kräfte aufeinander ausüben, folgt durch Addition der beiden Bewegungsgleichungen $m_1 \mathbf{a} = \mathbf{F}_{1\leftarrow 2}$ und $m_2 \mathbf{a} = \mathbf{F}_{2\leftarrow 1}$ für den Körper K die Bewegungsgleichung $m \mathbf{a} = \mathbf{F}_{1\leftarrow 2} + \mathbf{F}_{2\leftarrow 1}$. Daß diese mit dem Trägheitsgesetz $m \mathbf{a} = 0$ verträglich ist, wird genau durch das Reaktionsprinzip garantiert.

Unter Benutzung des Reaktionsprinzips können wir jetzt auf die **kinematische Massendefinition** mittels Stoßprozessen eingehen. Während eines Stoßes üben die stoßenden Körper Kräfte aufeinander aus, über die wir aber gar nichts wissen müssen außer, daß sie dem Reaktionsprinzip genügen. Der Einfachheit halber betrachten wir den **total inelastischen Stoß** zwischen zwei Körpern K_1 und K_2 . Wie in der Figur gezeigt, habe der Körper K_i vor dem Stoß die Geschwindigkeit \mathbf{v}_i . Nach dem inelastischen Stoß bewegen sich beide Körper mit der gemeinsamen Geschwindigkeit \mathbf{v} .



Durch Addition der Bewegungsgleichungen für die beiden Körper $m_1 \mathbf{a}_1(t) = \mathbf{F}_{1\leftarrow 2}$ und $m_2 \mathbf{a}_2(t) = \mathbf{F}_{2\leftarrow 1}$ und Benutzung des Reaktionsprinzips erhalten wir die Differentialgleichung $m_1 \mathbf{a}_1(t) + m_2 \mathbf{a}_2(t) = 0$, aus der man durch Integration nach der Zeit auf die zeitliche Konstanz des Vektors $m_1 \mathbf{v}_1(t) + m_2 \mathbf{v}_2(t)$ schließt. (Dies ist ein Beispiel für die Impulserhaltung des Gesamtsystems.) Der Vergleich dieses Vektors vor und nach dem Stoß liefert nunmehr die Beziehung $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}$ oder $m_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) = m_2 (\mathbf{v} - \mathbf{v}_2)$, aus der man bei Kenntnis der Geschwindigkeiten \mathbf{v}_i und \mathbf{v} unschwer das Massenverhältnis m_1/m_2 bestimmen kann.

In der Praxis bestimmt man Massen bekanntlich durch **Wiegen**, weil man mit diesem Verfahren mit Abstand die größte Empfindlichkeit erzielt. Nach der obigen Diskussion der beiden verschiedenen Massenbegriffe sollte klar sein, daß man durch Wiegen die schweren Massen, nicht die trägen Massen, von Körpern vergleicht.

Wenn ein Körper unter dem Einfluß mehrerer Kräfte steht, kann man im allgemeinen davon ausgehen, daß sich die einzelnen Kräfte ungestört überlagern. Dieser Sachverhalt wird oft formuliert als

4. Newtonsches Axiom (Superpositionsprinzip der Kräfte):

Wenn zwei Kräfte \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 auf einen Körper wirken, so ist die Gesamtkraft

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \quad (2.3)$$

Dieses Prinzip setzt stillschweigend voraus, daß die beiden Quellen K_1 und K_2 der Kräfte sich nicht gegenseitig hinsichtlich der Entfaltung ihrer Kraftwirkung beeinflussen. Diese Annahme ist plausibel, wenn K_1 und K_2 punktförmig sind (keine innere Struktur haben). Für ausgedehnte Körper kann man sich leicht Gegenbeispiele ausdenken (zum Beispiel polarisierbare geladene Körper).

3. Energie und verwandte Begriffe

Man kann aus den Bewegungsgleichungen (2.1) gewisse Schlüsse ziehen, ohne sie komplett gelöst zu haben. In diesem Kapitel diskutieren wir ein wichtiges Beispiel für diesen Sachverhalt.

Indem wir die Bewegungsgleichung (2.1) skalar mit der Momentangeschwindigkeit des Körpers K multiplizieren, $m \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$, erhalten wir eine Beziehung zwischen zwei skalaren Größen. Die linke Seite ist dabei die zeitliche Ableitung der Größe

$$T \doteq \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2(t) = \frac{m}{2} v^2(t), \quad (3.1)$$

die man die **kinetische Energie** des Körpers K nennt. Die auf der rechten Seite stehende Größe

$$Q(t) \doteq \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \mathbf{v}(t) \quad (3.2)$$

nennt man auch die **Leistung** der Kraft \mathbf{F} an dem Körper K . Wir können mit diesen Definitionen den Satz aussprechen:

Die Leistung der äußeren Kräfte an einem Körper ist gleich der zeitlichen Ableitung seiner kinetischen Energie,

$$\frac{dT}{dt} = Q. \quad (3.3)$$

Integriert man diese Gleichung über ein Zeitintervall (t_1, t_2) , dann erhält man

$$T_2 - T_1 \equiv \frac{m}{2} v_2^2 - \frac{m}{2} v_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \mathbf{v}(t) dt \equiv A. \quad (3.4)$$

Das Integral auf der rechten Seite nennt man die bei der betreffenden Bewegung von der Kraft \mathbf{F} an dem Körper K geleistete **Arbeit** A . Es gilt also, daß diese Arbeit gleich der Änderung der kinetischen Energie ist.

Ein einfaches Anwendungsbeispiel: Eine Kraft, die immer senkrecht zur Bahn (d.h. zur Momentangeschwindigkeit) ist, leistet keinerlei Arbeit und ändert daher die kinetische Energie und damit den Betrag der Geschwindigkeit des Körpers nicht. Ein Beispiel für eine solche Kraft wäre die **Lorentzkraft** $\mathbf{F} = (q/c) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, die ein Magnetfeld \mathbf{B} auf einen Körper mit der elektrischen Ladung q ausübt.

In dem Fall, daß die Kraft \mathbf{F} nicht von der Geschwindigkeit abhängt, spricht man von einem **Kraftfeld** $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$. Wenn ein Kraftfeld zudem auch noch zeitunabhängig ist, vereinfacht sich die Bedeutung des Begriffs Arbeit beträchtlich. Zunächst einmal stellen wir fest, daß die Arbeit

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \quad (3.5)$$

dann nur von der Bahn des Körpers abhängt, nicht vom zeitlichen Ablauf seiner Bewegung. Tatsächlich ist das Integral (3.5) ja nur eine spezielle Parameterdarstellung des Kurvenintegrals

$$A = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.6)$$

das als Limes von Zwischensummen der Form

$$A = \lim_{\{|\Delta\mathbf{r}_i| \rightarrow 0\}} \sum_i \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i \quad (3.7)$$

definiert ist. Ein Kurvenintegral kann über eine beliebige Parametrisierung der Bahn, $\mathbf{r}(s)$ ($s_1 \leq s \leq s_2$), berechnet werden. Mit $\Delta\mathbf{r}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \Delta s$ folgt aus (3.7) die Parameterdarstellung

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds, \quad (3.8)$$

die uns im Spezialfall $s = t$ auf (3.5) zurückführt. Ein anderer nützlicher Spezialfall ist der, in dem der Parameter s den zurückgelegten Weg mißt. Dann ist $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{t}$ der in (1.20) eingeführte Tangenteneinheitsvektor an die Bahn und die Arbeit schreibt sich als

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{t}(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}_t(s) ds. \quad (3.9)$$

Die Gleichungen (3.6) bzw. (3.9) erlauben die rein geometrische Formulierung des

Arbeitsbegriffes für zeitunabhängige Kraftfelder:

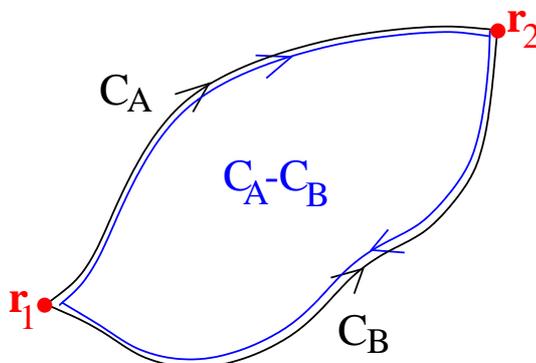
Die von einer Kraft an einem Körper geleistete Arbeit ist gleich dem Wegintegral der Kraftkomponente in Richtung des Weges.

Viele Kraftfelder haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß die von ihnen geleistete Arbeit längs jedes geschlossenen Weges C verschwindet:

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (3.10)$$

Solche Kraftfelder heißen **konservativ**. Eine äquivalente Charakterisierung konservativer Kraftfelder lautet, daß die von ihnen verrichtete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges, nicht aber vom Verlauf des Weges zwischen diesen Punkten abhängt. Es gilt nämlich

$$\int_{C_A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \iff \oint_{C_A - C_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (3.11)$$



Bei festem Anfangspunkt \mathbf{r}_1 ordnet das Arbeitsintegral (3.6) daher jedem Endpunkt \mathbf{r}_2 eindeutig (d.h. unabhängig vom Verlauf des Weges zwischen den beiden Punkten) eine Arbeit $A(\mathbf{r}_2)$ zu. Dies gestattet die Definition einer dem Kraftfeld zugeordneten **potentiellen Energie** $V(\mathbf{r}_2)$. Man wählt $V(\mathbf{r}_1)$ beliebig und definiert $V(\mathbf{r}_2)$ durch die Beziehung

$$V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -A. \quad (3.12)$$

Legt man durch den Punkt \mathbf{r}_2 einen Weg $\mathbf{r}(s)$ mit dem Tangenteneinheitsvektor \mathbf{t} im Punkt $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_2$, so kann man die **Richtungsableitung** der Gleichung (3.12) nach s bei $s = 0$ bilden und erhält nach der Kettenregel

$$\frac{d}{ds} V(\mathbf{r}(s))|_{s=0} = \text{grad } V(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{t}. \quad (3.13)$$

Da dies für jeden Tangentenvektor \mathbf{t} gilt, folgt

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad } V(\mathbf{r}). \quad (3.14)$$

Konservative Kraftfelder sind also als Gradienten eines **Skalarfeldes** darstellbar. Dieses Skalarfeld, das wir auch **Potentialfeld** nennen werden, ist bis auf eine additive Konstante durch das Kraftfeld eindeutig bestimmt. Die Vorzeichenkonvention in (3.12), die für das Minuszeichen in (3.14) verantwortlich ist, wird durch die Deutung des Skalarfeldes $V(\mathbf{r})$ als potentielle Energie motiviert.

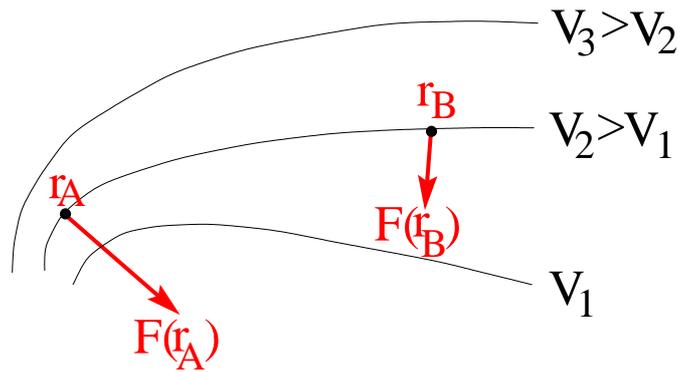
Die Umkehrung des obigen Satzes – **Jedes Gradientenfeld ist konservativ** – gilt auch, weil (3.12) aus (3.14) durch Integration folgt.

Die folgenden Überlegungen dienen der Veranschaulichung von Potentialfeldern und zugehörigen Kraftfeldern. Die Raumpunkte, in denen ein Potential einen vorgegebenen Wert annimmt,

$$V(\mathbf{r}) = V(x, y, z) = V_0, \quad (3.15)$$

bilden Flächen, sogenannte **Äquipotentialflächen** (oder Niveauflächen). Durch graphische Darstellung solcher Niveauflächen, etwa zu äquidistanten Potentialwerten, $V_n = V_0 + n\Delta V$, verschafft man sich einen Überblick über das Potentialfeld. Ein wohlbekanntes zweidimensionales Beispiel sind die Höhenlinien in der Kartographie.

Legt man einen Weg $\mathbf{r}(s)$ in eine Niveaufläche, so gilt $V(\mathbf{r}(s)) = V_0$ und aus dem Verschwinden der linken Seite von (3.13) folgt in diesem Falle $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t} = 0$. Da \mathbf{t} jeder Tangentialvektor in der Niveaufläche sein kann, folgt daraus: **Die Kraft steht immer senkrecht zu den Äquipotentialflächen.**

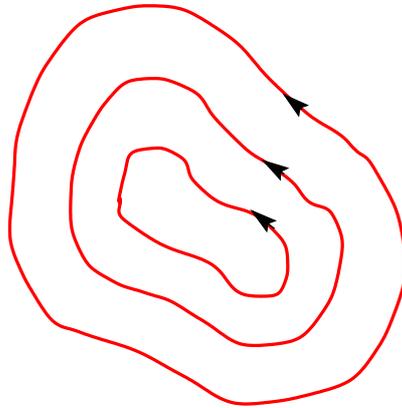


Betrachtet man in (3.13) verschiedene Wege $\mathbf{r}(s)$ durch denselben Punkt \mathbf{r}_2 , so erhält man verschiedene Tangentialvektoren \mathbf{t} , aber die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}_2)$ ist immer dieselbe. Daher folgert man aus (3.13), daß genau dann, wenn der Tangentialvektor \mathbf{t} in die Richtung der Kraft \mathbf{F} zeigt, die Ableitung des Potentials den größten negativen Wert annimmt. Daher gilt: **Die Kraft zeigt in Richtung maximalen Potentialgefälles**. Ihr Betrag ist umgekehrt proportional zum Abstand benachbarter Äquipotentialflächen.

Folgt man der Richtung größten Potentialgefälles, so bewegt man sich auf einer **Kraftlinie**. Die Kraftlinien sind Kurven, die durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{|\mathbf{F}(\mathbf{r})|} \quad (3.16)$$

charakterisiert sind.



Für Kraftfelder mit geschlossenen Kraftlinien ist offensichtlich das Wegintegral (3.10) längs einer solchen Kraftlinie nicht gleich 0, weil überall längs des Weges $\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} \geq 0$ gilt. Solche Felder sind daher sicher nicht konservativ.

Im allgemeinen ist die Berechnung der Wegintegrale (3.10) über alle erdenklichen Wege allerdings kein praktikables Mittel, um zu entscheiden, ob ein Kraftfeld konservativ ist oder nicht. Wir suchen daher ein geeignetes Kriterium zur Identifikation konservativer Kraftfelder. Tatsächlich ergibt sich, daß konservative Kräfte wegen (3.14) die **notwendige Bedingung**

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.17)$$

erfüllen müssen. Dabei ist $\text{rot } \mathbf{F}$ das Vektorfeld mit den kartesischen Komponenten

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right). \quad (3.18)$$

Dieses Vektorfeld kann man unter Einführung des vektoriellen Differentialoperators **Nabla**,

$$\nabla \doteq \mathbf{n}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{n}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{n}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.19)$$

auch als das vektorielle Kreuzprodukt

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (3.20)$$

schreiben. Eine andere symbolische Schreibweise mittels der Determinante

$$\text{rot } \mathbf{F} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{n}_x & \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

ist ebenfalls einprägsam. Die Identität (3.17) folgt aus (3.14) (zum Beispiel $(\text{rot grad } V)_z = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} = 0$) wegen der Vertauschbarkeit der Differentiationen (genügende Differenzierbarkeit vorausgesetzt). Die Identität $\text{rot grad } V = 0$ wird sinnfällig bei Benutzung von Nabla-Operatoren wegen $\text{rot grad } V = \nabla \times \nabla V$, da das Vektorprodukt jedes Vektors mit sich selbst verschwindet (Vertauschbarkeit der Vektorkomponenten vorausgesetzt!).

Um ein **hinreichendes Kriterium** für die Identifikation konservativer Kraftfelder zu finden, müssen wir den **Stokesschen Integralsatz** aus der Vektoranalysis heranziehen. Wir betrachten ein orientierbares Flächenstück F mit der Randkurve C und dem Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ in jedem Punkt \mathbf{r} des Flächenstücks. Die Orientierungen der Randkurve C und der Normalenvektoren sollen der **Rechte-Hand-Regel** genügen. Unter geeigneten Glattheitsbedingungen für das Feld \mathbf{F} und die Fläche F gilt der Stokessche Satz

$$\iint_F \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, df = \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.22)$$

Das Wegintegral der Kraft \mathbf{F} längs der geschlossenen Kurve C ist gleich dem Flächenintegral der Normalkomponente des Feldes $\text{rot } \mathbf{F}$ über das Flächenstück F . Man nennt das Wegintegral auch die **Zirkulation von \mathbf{F} längs C** , das Vektorfeld $\text{rot } \mathbf{F}$ die **Wirbelstärke von \mathbf{F}** und das Flächenintegral den **Fluß der Wirbelstärke von \mathbf{F} durch F** . Unter Benutzung dieser Begriffe lautet der Stokessche Satz:

Die Zirkulation von \mathbf{F} längs C ist gleich dem Fluß der Wirbelstärke von \mathbf{F} durch F .

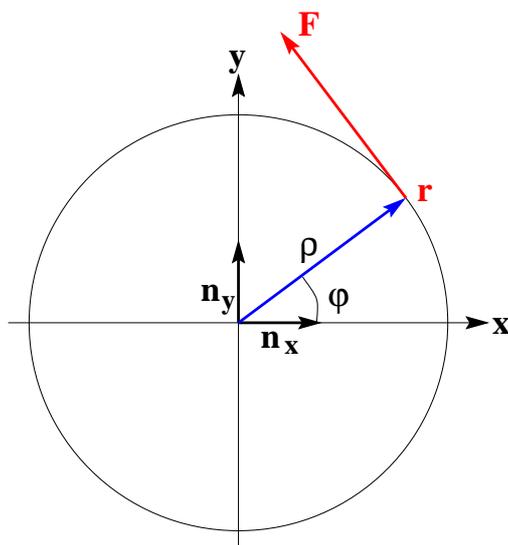
Verschwundet nun die Wirbelstärke $\text{rot } \mathbf{F}$ eines Kraftfeldes \mathbf{F} auf der gesamten Fläche F , so folgt (3.10).

Damit die oben vorausgesetzten topologischen Verhältnisse vorliegen, nimmt man an, die Wirbelstärke verschwinde in einem **einfach zusammenhängenden** Raumbereich R . (Ein Gebiet heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve in R stetig in einen Punkt zusammenziehen läßt.) Diese topologische Voraussetzung garantiert, daß es zu jeder geschlossenen Kurve C in R ein Flächenstück F in R gibt, dessen Randkurve C ist. Wir können damit ein hinreichendes Kriterium für konservative Kraftfelder formulieren:

In einem einfach zusammenhängenden Gebiet wirbelfreie Kraftfelder sind konservativ.

Das folgende Beispiel hilft, die topologischen Voraussetzungen in diesem Kriterium zu würdigen. Wir betrachten das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{c}{x^2 + y^2} (y\mathbf{n}_x - x\mathbf{n}_y). \quad (3.23)$$



Es hängt nicht von der kartesischen Koordinate z ab und seine z -Komponente verschwindet. In Zylinderkoordinaten (1.9) schreibt es sich als $\mathbf{F} = \frac{c}{\rho} \mathbf{e}_\varphi$ und seine Kraftlinien sind folglich Kreise, die die z -Achse entgegen dem Uhrzeigersinn umschließen. Die Zirkulation längs jeden solchen Kreises berechnet sich leicht in Zylinderkoordinaten und ergibt sich zu

$$\oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \frac{c}{\rho} \rho d\varphi = 2\pi c. \quad (3.24)$$

Trotz der nicht verschwindenden Zirkulation ist dieses Kraftfeld wirbelfrei, $\text{rot } \mathbf{F} = 0$, wie man leicht anhand der Formeln

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad (3.25)$$

nachrechnet. Der scheinbare Widerspruch zu unserem obigen Kriterium löst sich dadurch auf, daß die z -Achse $\rho = 0$ eine singuläre Linie des Kraftfeldes ist, auf der \mathbf{F} nicht differenzierbar ist. Damit sind die topologischen Voraussetzungen unseres Kriteriums nicht erfüllt. Physikalisch kann man die singuläre Linie als eine Linie mit unendlicher Wirbelstärke interpretieren.

Wir fassen noch einmal die wichtigsten **Eigenschaften konservativer Kraftfelder** (definiert durch (3.10)) zusammen:

- Ihre Arbeit hängt nicht vom Wege ab.
- Sie sind Gradientenfelder eines Potentialfeldes.
- Sie sind wirbelfrei.

Nach gründlicher Diskussion des Begriffs der konservativen Kraftfelder knüpfen wir jetzt an die obigen Gleichungen (3.4) und (3.12) an. Wir folgern aus diesen beiden Gleichungen sofort, daß für konservative Kraftfelder die Beziehung $T_2 - T_1 = A = V_1 - V_2$ oder

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (3.26)$$

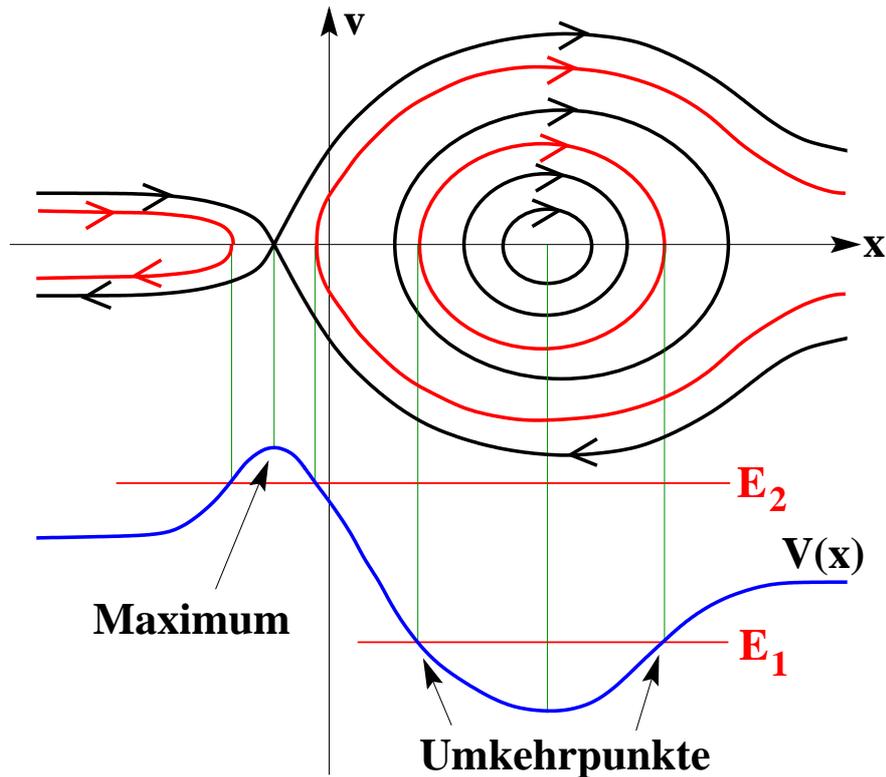
gilt. Man nennt die Summe aus kinetischer und potentieller Energie $E \doteq T + V$ die (mechanische Gesamt-) **Energie** des Körpers. Mit (3.26) haben wir den folgenden **Energieerhaltungssatz** (kurz: Energiesatz) gefunden:

Bei Bewegungen eines Massenpunktes in einem konservativen Kraftfeld bleibt seine Gesamtenergie erhalten,

$$E(\mathbf{v}(t), \mathbf{r}(t)) \equiv T(\mathbf{v}(t)) + V(\mathbf{r}(t)) = E_0. \quad (3.27)$$

Der Energiesatz stellt eine teilweise Lösung der Bewegungsgleichungen dar. Man spricht von einem **ersten Integral** der Bewegungsgleichungen. Ohne die Bewegung im einzelnen zu berechnen, kann man oft nützliche Schlüsse allein aus dem Energiesatz ziehen. Ein einfaches Beispiel: Wegen $T \geq 0$ muß immer $V(\mathbf{r}) \leq E$ gelten, woraus auf räumliche Beschränkungen der Bewegung geschlossen werden kann.

Bei eindimensionalen Bewegungen kann man aus dem Energiesatz weitreichende Folgerungen ziehen. Zunächst einmal ist im eindimensionalen Fall jedes zeitunabhängige Kraftfeld $F(x)$ konservativ, weil seine Stammfunktion $V(x) = \int F(y) dy$ ein Potential ist. Kennt man die potentielle Energie $V(x)$, so kann man in einem $(x, v = v_x)$ -Diagramm Linien konstanter Energie ziehen. Hieraus liest man nicht nur die schon erwähnten Bewegungsbeschränkungen ab, sondern bei vorgegebener Energie auch zu jedem Punkt x den Betrag der Geschwindigkeit v . Das folgende Bild läßt die Nützlichkeit einer solchen graphischen Darstellung erkennen. Für die Energie E_1 ist die Bewegung auf ein endliches x -Intervall eingeschränkt. Der Massenpunkt bewegt sich periodisch zwischen den beiden Umkehrpunkten hin und her, an denen die potentielle Energie gleich der Gesamtenergie ist. Im (x, v) -Diagramm wird diese Bewegung durch geschlossene Kurven repräsentiert, die im Uhrzeigersinn durchlaufen werden.



Für die höhere Energie E_2 haben die Bewegungen nur einen Umkehrpunkt. Sie sind dann nicht periodisch und verlaufen in einer Richtung unbegrenzt. Ein Sonderfall liegt vor, wenn die Gesamtenergie exakt auf einem Maximum der potentiellen Energie liegt, $E = V_m = V(x_m)$. Indem wir die potentielle Energie um dieses Maximum herum entwickeln, erhalten wir asymptotisch das Verhalten $V(x) = V_m - \frac{c}{2}(x - x_m)^2$ und der Energiesatz ergibt $\frac{m}{2}v^2 = \frac{c}{2}(x - x_m)^2$. Wenn der Massenpunkt sich dem Maximum x_m nähert, verringert sich die Geschwindigkeit linear mit dem Abstand, $\dot{x} = -\sqrt{c/m}(x - x_m)$. Man macht sich leicht klar, daß man das Maximum angesichts dieser Gesetzmäßigkeit niemals erreichen wird. Die folgende kleine Rechnung bestätigt das: durch Integration von $\dot{x}/(x - x_m) = -\sqrt{c/m}$ nach der Zeit erhalten wir $\ln|(x - x_m)/(x_0 - x_m)| = -\sqrt{c/m}(t - t_0)$, womit für $x \rightarrow x_m$ die Zeit t gegen unendlich gehen muß.

Die vollständige Lösung eindimensionaler Bewegungen kann tatsächlich mit Hilfe des Energiesatzes immer auf eine Integration zurückgeführt werden. Nach Auflösen des Energiesatzes $\frac{m}{2}v^2 + V(x) = E$ nach der Geschwindigkeit, $\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$, Division durch die rechte Seite und Integration nach der Zeit erhält man nämlich

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(y))}} = t - t_0. \quad (3.28)$$

Energieerhaltungssätze spielen in der Physik eine fundamentale Rolle weit über den hier gesteckten Rahmen hinaus. Im Falle nicht-konservativer Kräfte kann durch Hinzunahme nicht-mechanischer Energiearten immer ein Energieerhaltungssatz gefunden werden.

4. Drehimpuls und verwandte Begriffe

Wir gehen auch in diesem Kapitel von der Bewegungsgleichung (2.1) aus, die unter Benutzung des Begriffes des **Impulses** (Newton: Bewegungsgröße, englisch: **linear momentum**)

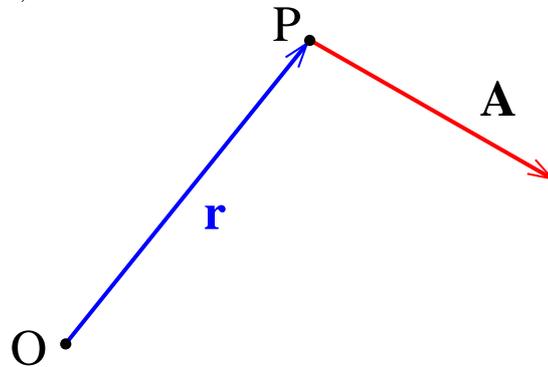
$$\mathbf{p} \doteq m\mathbf{v} \quad (4.1)$$

eines Massenpunktes auch in der Form

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \quad (4.2)$$

geschrieben werden kann: **Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der Kraft.**

Als das **Moment** eines im Punkte P angelegten Vektors \mathbf{A} bezüglich eines Aufpunktes O ($\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$) bezeichnet man das Vektorprodukt $\mathbf{r} \times \mathbf{A}$.



Speziell heißt das Moment einer Kraft

$$\mathbf{N} \doteq \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (4.3)$$

auch **Drehmoment** (englisch: **torque**) und das Moment des Impulses eines Massenpunktes

$$\mathbf{L} \doteq \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (4.4)$$

auch **Drehimpuls** (englisch: **angular momentum**). Weil Geschwindigkeit und Impuls eines Körpers nach (4.1) parallel stehen, gilt für die Zeitableitung des Drehimpulses dieses Körpers $\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$. Bildet man daher die Momente auf beiden Seiten der Bewegungsgleichung (4.2), so erhält man die Gleichung

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \quad (4.5)$$

in Worten: **Die zeitliche Ableitung des Drehimpulses eines Massenpunktes ist durch das Drehmoment der auf ihn wirkenden Kraft gegeben.** (Beide Momente sind natürlich bezüglich desselben Aufpunktes zu verstehen.)

Einen Erhaltungssatz gewinnt man aus dieser Beziehung für sogenannte **Zentralkräfte**. Darunter versteht man Kraftfelder, für die bei Wahl eines geeigneten

Aufpunktes O (des **Kraftzentrums**) die Kraft in jedem Raumpunkt \mathbf{r} in die Richtung des Vektors \mathbf{r} zeigt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = |\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)| \mathbf{n}_r, \quad (4.6)$$

wenn $\mathbf{n}_r = \mathbf{r}/r$ der Einheitsvektor in Richtung \mathbf{r} ist. Für solche Kraftfelder verschwindet das Drehmoment $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ bezüglich des Kraftzentrums und es gilt

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = \mathbf{L}_0 : \quad (4.7)$$

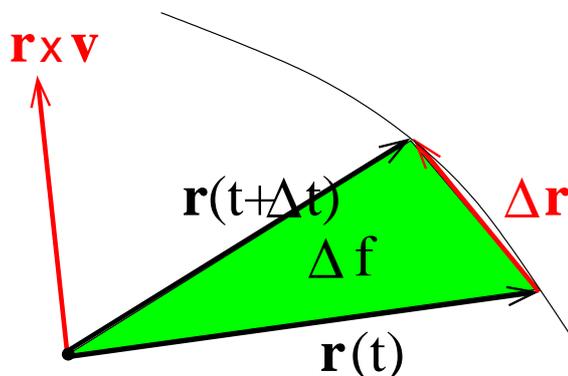
Bei der Bewegung eines Massenpunktes in einem Zentralkraftfeld ist sein Drehimpuls bezüglich des Kraftzentrums erhalten.

Man beachte, daß hier alle drei Komponenten eines Vektors erhalten bleiben.

Zur kinematischen Deutung des **Drehimpulserhaltungssatzes** schreiben wir ihn in der Form $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) = 2 \mathbf{h}$ ($= \mathbf{L}_0/m$). Zunächst folgt daraus, daß \mathbf{r} immer senkrecht zum konstanten Vektor \mathbf{h} steht, die Bewegung sich also in einer festen Ebene abspielt. Der Betrag von \mathbf{h} hängt mit der Fläche zusammen, die in der Zeiteinheit vom Radiusvektor \mathbf{r} überstrichen wird. Denn nach der folgenden Figur gilt $|\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}| = 2 \Delta f$, so daß

$$\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{h} \quad (4.8)$$

und \mathbf{h} die Bedeutung einer **Flächengeschwindigkeit** hat.



Der Drehimpulssatz kann also kinematisch als **Flächensatz** gedeutet werden:

Bei der Bewegung in Zentralkraftfeldern ist die Flächengeschwindigkeit konstant.

Zentralkräfte im engeren Sinne sind solche, deren Betrag nur vom Abstand vom Kraftzentrum abhängt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \mathbf{n}_r. \quad (4.9)$$

Solche Kraftfelder sind immer auch konservativ, weil sie das Potential

$$V(\mathbf{r}) \doteq - \int_{r_0}^{|\mathbf{r}|} F(r) dr \quad (4.10)$$

besitzen, das nur vom Abstand zum Kraftzentrum abhängt. Zur Begründung dieses Potentials finden wir mittels $\text{grad } r(\mathbf{r}) = \text{grad } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \mathbf{n}_r$ unter Anwendung der Kettenregel tatsächlich $\text{grad } V(\mathbf{r}) = -F(r) \text{grad } r = -\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Für Zentralkräfte im engeren Sinne haben wir daher sowohl die Energie- als auch die Drehimpulserhaltung, insgesamt also 4 Erhaltungsgrößen. Es ist am geschicktesten, die Erhaltungssätze mittels **Polarkoordinaten** (Zylinderkoordinaten mit der Einschränkung $\zeta \equiv 0$) zu schreiben. Unter Benutzung von (1.11) und (1.12) erhalten wir so für den Energiesatz (3.27)

$$\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + V(\rho) = E \quad (4.11)$$

und für den Drehimpulssatz

$$m \rho^2 \dot{\varphi} = L. \quad (4.12)$$

Es bleiben also nur 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung zu lösen. Indem wir die Auflösung von Gleichung (4.12) nach $\dot{\varphi}$ ($\dot{\varphi} = L/(m\rho^2)$) in Gleichung (4.11) einsetzen, erhalten wir mit

$$\frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} + V(\rho) = \frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho) = E \quad (4.13)$$

ein eindimensionales Problem mit dem **effektiven Potential**

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2}. \quad (4.14)$$

Die Lösung solcher Probleme durch das Verfahren der **Trennung der Variablen** haben wir in (3.28) festgehalten. Der zweite Term in der Definition des effektiven Potentials ist das **Zentrifugalpotential**. Es rührt von der tangentialen Bewegung her und versucht, den Massenpunkt vom Kraftzentrum fernzuhalten. Nachdem man $\rho(t)$ aus der Lösung von (3.28) gewonnen hat, kann man dies in (4.12) einsetzen und durch eine weitere Integration $\varphi(t)$ bestimmen.

Statt den vollen Bewegungsablauf anhand von $\rho(t)$ und $\varphi(t)$ zu bestimmen, kann man sich alternativ zunächst auf die Bestimmung der Bahnkurve $\rho(\varphi)$ beschränken und danach durch Integration der Gleichung (4.12) nach der Zeit die Zeitentwicklung $\varphi(t)$ berechnen. Die Differentialgleichung für die Bahnkurve gewinnt man aus (4.11) oder (4.13), indem man $\dot{\rho}$ nach der Kettenregel durch $\frac{d\rho}{d\varphi} \dot{\varphi}$ ersetzt und dann $\dot{\varphi}$ wieder mittels (4.12) eliminiert. Dies ergibt

$$\frac{L^2}{2m\rho^4} \left(\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \rho^2 \right) + V(\rho) = E. \quad (4.15)$$

Diese Differentialgleichung kann nach demselben Verfahren wie (4.13) (Trennung der Variablen) durch eine Integration (hier nach φ) gelöst werden. Bei einer Reihe

von Anwendungen ist eine analoge Gleichung für die Variable $u \doteq 1/\rho$ bequemer zu handhaben. Mit $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi}$ gehorcht $u(\varphi)$ der Differentialgleichung

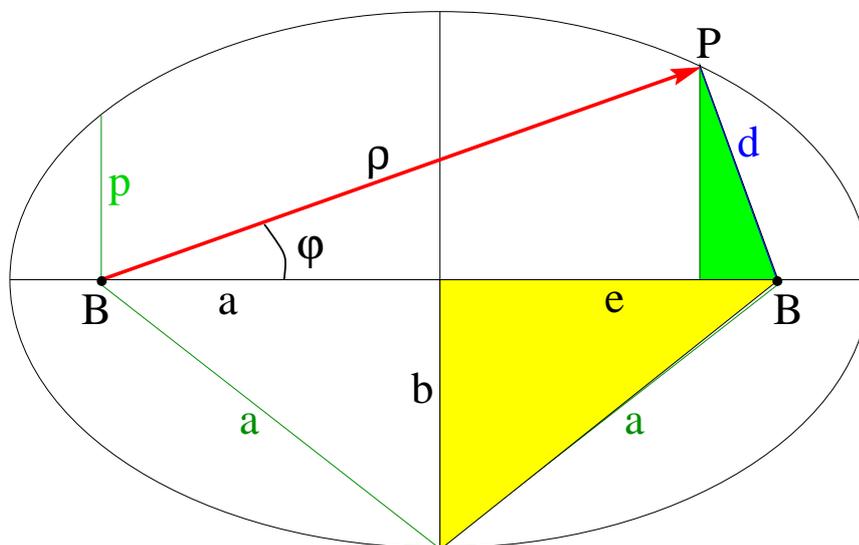
$$\frac{L^2}{2m} \left(\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right) + V\left(\frac{1}{u}\right) = E, \quad (4.16)$$

die wieder mit demselben Verfahren gelöst wird.

Für das **Keplerproblem**, die Bewegung eines Körpers in einem **Gravitationspotential**

$$V(\rho) = -\frac{k}{\rho}, \quad (4.17)$$

erweist sich (4.16) als besonders vorteilhaft. Bekanntlich sind die gebundenen Bewegungen ($E < 0$) in diesem Potential **Ellipsen** mit einem der Brennpunkte als Kraftzentrum (**1. Keplersches Gesetz**). Wir rekapitulieren kurz einige Fakten zur Geometrie der Ellipse, die als die Menge aller Punkte P definiert ist, für die die Summe der Abstände von zwei fest vorgegebenen Brennpunkten B mit Abstand $2e$ gleich der festen Länge l ist ($\rho(\varphi) + d = l$). Die Ellipse hat die große Halbachse a und die kleine Halbachse b . Anhand des Spezialfalls verschwindenden Polarwinkels $\varphi = 0$ erkennt man $2a = l$ und das gelbe rechtwinklige Dreieck, das im Falle $\rho = d = a$ entsteht, liefert die Beziehung $e^2 = a^2 - b^2$. Damit sind die geometrischen Bestimmungsstücke $2e$ und l in Beziehung zu den beiden Halbachsen a und b gesetzt. Das Längenverhältnis $\epsilon \doteq e/a < 1$ nennt man die (numerische) **Exzentrizität**.



Die Bahngleichung der Ellipse in Polarkoordinaten erhält man jetzt leicht, indem man aus den beiden Beziehungen $\rho + d = 2a$ und $d^2 = (\rho \sin \varphi)^2 + (2e - \rho \cos \varphi)^2$ (Pythagoras für das grüne Dreieck) die Länge d eliminiert. Mit der Abkürzung $p \doteq b^2/a$ lautet sie

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi}. \quad (4.18)$$

Die geometrische Bedeutung der Länge p erhellt sich aus der Figur mittels $\rho(\pi/2) = p$.

Die Bestimmung der Bahn aus der Gleichung (4.16) kann nun recht einfach erraten werden. Wegen $V(1/u) = -ku$ kann man nämlich (4.16) auch in die Form

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \left(u - \frac{km}{L^2}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{km}{L^2}\right)^2 \quad (4.19)$$

bringen. Hier läßt sich die konstante rechte Seite offenbar wegen $d \cos \varphi / d\varphi = -\sin \varphi$ mittels

$$u - \frac{km}{L^2} = -\sqrt{\left(\frac{km}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (4.20)$$

erzielen. Damit haben wir die Bahn zu

$$\rho(\varphi) = \frac{L^2/km}{1 - \sqrt{1 + 2EL^2/k^2m} \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (4.21)$$

als Ellipse bestimmt. Durch Vergleich mit (4.18) liefert eine kurze Rechnung unter Benutzung der oben aufgezählten geometrischen Relationen die beiden Beziehungen

$$E = -\frac{k}{2a} \quad (4.22)$$

und

$$L = \sqrt{\frac{kmb^2}{a}} = \sqrt{kma(1 - \epsilon^2)} = \sqrt{-\frac{k^2m}{2E}(1 - \epsilon^2)}, \quad (4.23)$$

die die Erhaltungsgrößen durch die geometrischen Parameter der Ellipse ausdrücken. Danach steht die Energie E in eindeutiger Beziehung zur großen Halbachse a der Ellipse, während der Drehimpuls L (bei vorgegebener Energie) die kleine Halbachse b bzw. die Exzentrizität ϵ bestimmt. Bei vorgegebener Energie ist der Drehimpuls offenbar auf das Intervall zwischen den Grenzwerten $L = 0$ für $\epsilon = 1$ (unendlich flache Ellipse, d.h. lineare Oszillation durch das Kraftzentrum) und $L = \sqrt{kma}$ für $\epsilon = 0$ (Kreisbewegung) eingeschränkt.

Durch zeitliche Integration des Drehimpulssatzes (4.12) über eine ganze Umlaufperiode bestimmt man die **Umlaufzeit** T . Für sie erhält man

$$L \cdot T = m \int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2 d\varphi = m \cdot 2\pi ab, \quad (4.24)$$

wobei für das Integral rechts die doppelte Ellipsenfläche eingesetzt wurde. Wenn wir in diese Gleichung aus (4.23) $L = b\sqrt{km/a}$ einsetzen, hebt sich die kleine Halbachse b offenbar heraus und wir erhalten das **3. Keplersche Gesetz**

$$\frac{T^2}{a^3} = (2\pi)^2 \frac{m}{k}. \quad (4.25)$$

Für die Anwendung auf das Sonnensystem muß man sich daran erinnern, daß $k = GmM$ proportional zur Planetenmasse m ist und damit m/k für alle Planeten denselben Wert hat.

Die Beziehung zwischen dem Polarwinkel φ und der Zeit t kann durch Integration von (4.12) nach der Zeit mittels elementarer Funktionen dargestellt werden. Man erhält (für $\varphi_0 = 0$ und $\varphi(t = 0) = 0$)

$$\frac{m p^2}{L} \left[\frac{2 \arctan \frac{(1+\epsilon) \tan(\varphi/2)}{\sqrt{1-\epsilon^2}}}{(1-\epsilon^2)^{3/2}} + \frac{\epsilon \sin \varphi}{(1-\epsilon^2)(1-\epsilon \cos \varphi)} \right] = t. \quad (4.26)$$

Diese Beziehung kann allerdings nicht elementar nach dem Polarwinkel φ aufgelöst werden, d.h. die Umkehrfunktion $\varphi(t)$ zu (4.26) ist nicht elementar.

Die Lösung (4.21) gilt auch für **ungebundene Bewegungen** ($E \geq 0$) im Potential (4.17). Für positive Energien ($E > 0$) beschreibt (4.21) **Hyperbelbahnen**. Weil der Nenner in (4.21) positiv bleiben muß, unterliegt der Polarwinkel φ hier der Einschränkung

$$|\tan(\varphi - \varphi_0)| > \frac{L}{k} \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (4.27)$$

Im Grenzfall $E = 0$ schließlich beschreibt (4.21) **Parabelbahnen**.

Als zweites leicht lösbares Zentralkraftproblem sei die **elastische Federkraft**

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k \mathbf{r} \quad (4.28)$$

mit der Federkonstanten $k = m\omega^2$ genannt, deren Potential das **harmonische Potential**

$$V(r) = \frac{k}{2} r^2 \quad (4.29)$$

ist. Alle Bahnen in diesem Potential sind **Ellipsenbahnen**, wobei das Kraftzentrum jedoch im Gegensatz zum Keplerproblem mit dem Mittelpunkt der Ellipse zusammenfällt. Dieses Problem kann ebenfalls in Polarkoordinaten ohne große Mühe gelöst werden. Noch viel einfacher gestaltet sich die Lösung allerdings in kartesischen Koordinaten (x, y) in der Bahnebene des **harmonischen Oszillators**. Wegen $V(\mathbf{r}) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$ und $T(\mathbf{v}) = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2)$ zerfällt die Gesamtenergie $T + V$ in die beiden Anteile $E_x = T_x + V_x$ und $E_y = T_y + V_y$, die beide erhalten sind. Damit ist das Problem auf zwei unabhängige eindimensionale harmonische Oszillatoren zurückgeführt mit der allgemeinen Lösung $x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi_x)$, $y(t) = y_0 \cos(\omega t - \varphi_y)$. Durch eine geeignete Drehung des Koordinatensystems kann man diese Lösung schließlich in die Form

$$x(t) = a \cos \omega (t - t_0), \quad y(t) = b \sin \omega (t - t_0) \quad (4.30)$$

bringen, die die oben behauptete Ellipsenbewegung ($(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$) quantifiziert. Aus der Lösung (4.30) berechnet man leicht die Werte für die beiden Erhaltungsgrößen E (siehe (3.27)) und \mathbf{L} (siehe (4.4)). Man erhält

$$E = \frac{k}{2}(a^2 + b^2) \quad (4.31)$$

und

$$L = \sqrt{km} ab. \quad (4.32)$$

Die beiden oben diskutierten Fälle, das Newtonsche und das harmonische Potential, sind die einzigen Zentralpotentiale, für die alle gebundenen Bewegungen geschlossene Bahnen haben.

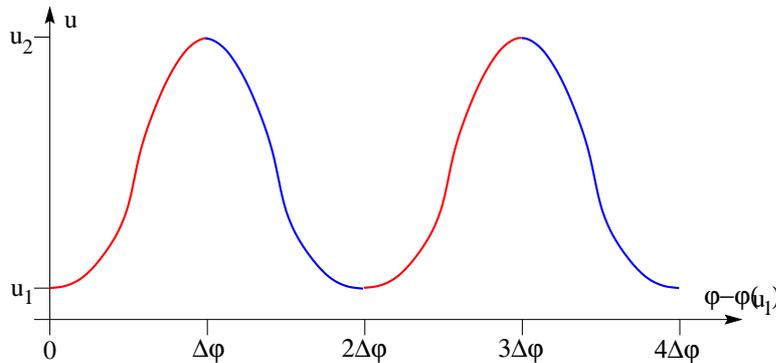
Um gebundene Bewegungen für beliebige Zentralpotentiale zu bestimmen, betrachten wir die Auflösung von (4.16) nach u' ,

$$\frac{du}{d\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2m}{L^2} \left(E - V\left(\frac{1}{u}\right) \right) - u^2}. \quad (4.33)$$

Wir nehmen an, der Radikant in (4.33) habe die beiden Nullstellen $u_1 < u_2$, zwischen denen er positiv sei. Dann berechnet sich ein Bahnabschnitt für $du/d\varphi > 0$ zwischen diesen beiden u -Werten aus

$$\int_{u_1}^u \frac{ds}{\sqrt{\frac{2m}{L^2} \left(E - V\left(\frac{1}{s}\right) \right) - s^2}} = \varphi(u) - \varphi(u_1) \quad (u_1 \leq u \leq u_2). \quad (4.34)$$

Auf diesem Bahnabschnitt wächst der Polarwinkel um den Wert $\Delta\varphi \doteq \varphi(u_2) - \varphi(u_1)$ an, während u vom Minimalwert u_1 zum Maximalwert u_2 ansteigt. Die Fortsetzung der Bahn wird jetzt sehr einfach aus dem ersten Bahnabschnitt konstruiert. Es schließt sich ein zweiter Bahnabschnitt an, der sich durch Spiegelung des ersten am Polarwinkel $\varphi(u_2)$ ergibt und auf dem u vom Maximalwert u_2 wieder auf den Minimalwert u_1 abfällt. Danach wiederholt sich die Bahn periodisch in φ , wie in der folgenden Figur gezeigt.



Diese Bahnen sind nur dann periodisch im Ortsraum, wenn der Winkel $\Delta\varphi$ ein rationales Vielfaches von π ist. Aus unseren obigen Lösungen ergibt sich für das Newtonsche Potential $\Delta\varphi = \pi$ und für das harmonische Potential $\Delta\varphi = \pi/2$. Relativistische Korrekturen zum Newtonpotential bewirken kleine Abweichungen vom Wert π in $\Delta\varphi$, die sich geometrisch als **Periheldrehung** beschreiben lassen. Die Analyse der Periheldrehung des Planeten Merkur konnte die Existenz dieser Korrekturen quantitativ bestätigen.

5. Eingeschränkte Bewegungen

Bis hierher hatten wir angenommen, daß die auf einen Körper wirkenden Kräfte vorgegeben seien. Es gibt jedoch viele Situationen, in denen nicht alle Kräfte unmittelbar bekannt sind. Gemeint sind Bewegungsbeschränkungen mechanischer Art, die einen Körper auf eine Fläche, eine Linie oder einen Punkt zwingen. Beispiele dafür wären eine Kugel, die in einer Fläche laufen muß, eine Perle, die auf einem Draht gleitet, ein Pendel, das auf einen festen Abstand von einem Aufhängepunkt festgelegt ist, oder ein Körper, dessen Lage vollständig durch mechanische Einflüsse vorgegeben ist. Die genannten Beispiele gehören alle zu der großen Klasse **holonomer Zwangsbedingungen**, die sich mathematisch durch einen Satz von Bedingungsgleichungen

$$f_\mu(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\mu = 1, \dots, k) \quad (5.1)$$

für $\mathbf{r}(t)$ ausdrücken lassen (Einschränkung auf eine Fläche für $k = 1$, auf eine Linie für $k = 2$ und auf einen Punkt für $k = 3$). Um sicherzustellen, daß die Bedingungen (5.1) die gewünschte Mannigfaltigkeit definieren, fordern wir die **lineare Unabhängigkeit der k Normalenvektoren** $\text{grad} f_\mu$ an jedem Punkt \mathbf{r} der Mannigfaltigkeit und zu jeder Zeit t . Wir schließen in (5.1) ausdrücklich die Möglichkeit zeitabhängiger Zwangsbedingungen ein, die man auch **rheonom** nennt, und betrachten zeitunabhängige (**skleronome**) Zwangsbedingungen als Spezialfall.

Es entsteht nunmehr die Frage, wie ein Körper sich bewegt, der einerseits einer bekannten Kraft \mathbf{F} unterworfen ist, aber andererseits zusätzliche Zwangsbedingungen der Form (5.1) erfüllen muß. Natürlich muß sich der Einfluß der Zwangsbedingungen auf die Bewegung des Körpers ebenfalls auf Kräfte zurückführen lassen. Diese Kräfte \mathbf{F}' nennt man **Zwangskräfte** und man kann die Newtonsche Bewegungsgleichung mit ihnen als

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}' \quad (5.2)$$

schreiben. Zwecks Kontrastierung nennt man die Kraft \mathbf{F} auch die **eingeprägte Kraft**.

Von der Zwangskraft \mathbf{F}' wissen wir zunächst nur, daß sie die eingeprägte Kraft \mathbf{F} derart ergänzen muß, daß die Bewegung in der durch (5.1) vorgegebenen Mannigfaltigkeit erfolgt. Diese Bedingung allein kann die Zwangskräfte allerdings nicht eindeutig festlegen, weil die Zwangsbedingungen einen Mechanismus enthalten könnten, der den Körper zusätzlich innerhalb der Zwangsmannigfaltigkeit beschleunigt. Dies schließen wir aus, indem wir fordern, daß die Zwangskräfte zu jeder Zeit senkrecht auf der Zwangsmannigfaltigkeit stehen. Da die oben schon erwähnten Normalenvektoren $\text{grad} f_\mu$ den zur Zwangsmannigfaltigkeit senkrechten Unterraum aufspannen, ist es möglich, k skalare Parameter λ_μ zu finden, mit denen sich die Zwangskraft als

$$\mathbf{F}' = \sum_{\mu=1}^k \lambda_\mu \text{grad} f_\mu(\mathbf{r}, t) \quad (5.3)$$

schreiben läßt. Die Gleichungen (5.1-5.3) für die Bewegung eines Massenpunktes unter Zwangsbedingungen heißen **Lagrangesche Bewegungsgleichungen erster Art**. Die Parameter λ_μ heißen **Lagrangesche Multiplikatoren** (**Joseph Louis Lagrange, 1736-1813**).

Wir wollen jetzt die Lösung dieser Gleichungen diskutieren. Gesucht ist die Bewegung $\mathbf{r}(t)$, die die Newtonsche Bewegungsgleichung (5.2) löst. Leider ist jedoch die Kraft $\mathbf{F} + \mathbf{F}'$ nicht vollständig bekannt. Es gibt k unbekannte Lagrangesche Multiplikatoren. Gleichzeitig stehen k Zwangsbedingungen (5.1) zur Verfügung, die zur Bestimmung der k Multiplikatoren genutzt werden sollten.

Die Lösungsstrategie besteht darin, die Zwangsbedingungen (5.1) in einem ersten Schritt so in Kombination mit der Bewegungsgleichung (5.2) zu nutzen, daß die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ eliminiert werden kann. Man differenziert dazu die Zwangsbedingungen zweimal nach der Zeit. Dabei erhält man zunächst

$$\frac{d}{dt}f_\nu(\mathbf{r}(t), t) = (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)f_\nu + \frac{\partial f_\nu}{\partial t} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, k) \quad (5.4)$$

und schließlich

$$\frac{d^2}{dt^2}f_\nu(\mathbf{r}(t), t) = (\ddot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)f_\nu + R_\nu(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) = 0 \quad (\nu = 1, \dots, k), \quad (5.5)$$

wobei

$$R_\nu(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) = (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)f_\nu + 2(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial t^2} \quad (5.6)$$

alle Terme aus der zweiten Ableitung zusammenfaßt, die die Beschleunigung nicht enthalten. Jetzt kann man durch Einsetzen der Bewegungsgleichung (5.2) mit dem Zwangskraftansatz (5.3) in die Gleichungen (5.5) die Beschleunigung eliminieren und erhält mit

$$\sum_{\mu=1}^k (\nabla f_\nu \cdot \nabla f_\mu)\lambda_\mu = -\nabla f_\nu \cdot \mathbf{F} - mR_\nu \quad (\nu = 1, \dots, k) \quad (5.7)$$

ein lineares Gleichungssystem für die Lagrangeschen Multiplikatoren. Die Matrix dieses Gleichungssystems mit den Elementen $G_{\nu\mu} = \nabla f_\nu \cdot \nabla f_\mu$ ist die **Gramsche Matrix** der Normalenvektoren ∇f_ν . Sie ist positiv definit, weil die Normalenvektoren linear unabhängig sind, und ihre Invertierung liefert immer eine eindeutige Lösung $\lambda_\nu(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ für die Multiplikatoren. Damit ist die Zwangskraft (5.3) explizit bestimmt. Sie hängt im allgemeinen von Ort und Geschwindigkeit des Massenpunktes und der Zeit ab.

In einem zweiten Schritt muß die Bewegungsgleichung (5.2) mit nunmehr vollständig bekannten Kräften gelöst werden. Dabei sind geeignete Anfangsbedingungen zu wählen. Natürlich muß der Massenpunkt zur Anfangszeit t_0 die Zwangsbedingungen (5.1) erfüllen:

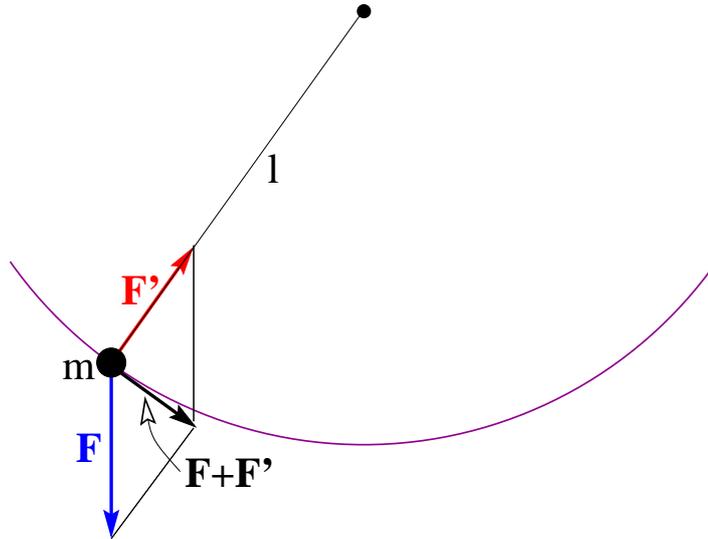
$$f_\nu(\mathbf{r}(t_0), t_0) = 0 \quad (\nu = 1, \dots, k). \quad (5.8)$$

Außerdem muß offenbar die Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 so gewählt werden, daß sie die Gleichungen (5.4) erfüllt:

$$\left. \frac{d}{dt} f_\nu(\mathbf{r}(t), t) \right|_{t=t_0} = \nabla f_\nu(\mathbf{r}_0, t_0) \cdot \mathbf{v}_0 + \left. \frac{\partial}{\partial t} f_\nu(\mathbf{r}(t), t) \right|_{t=t_0} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, k). \quad (5.9)$$

Dies bedeutet, daß die Komponenten von \mathbf{v}_0 senkrecht zur Zwangsmannigfaltigkeit nicht beliebig wählbar sind, sondern einer eventuellen Bewegung der Mannigfaltigkeit anzupassen sind. Es ergibt sich jetzt die Frage, ob unter solchen Anfangsbedingungen die Lösung tatsächlich für alle Zeiten den Zwangsbedingungen (5.1) genügen wird. Diese Frage kann positiv beantwortet werden, weil die Gleichungen (5.7) identisch in den Variablen \mathbf{r} , $\dot{\mathbf{r}}$ und t gelten. Sie gelten damit insbesondere, wenn wir die Lösung $\mathbf{r}(t)$ der Bewegungsgleichung (5.2) einsetzen, und damit gelten auch die Gleichungen (5.5) für alle Zeiten: $\frac{d^2}{dt^2} f_\nu(\mathbf{r}(t), t) \equiv 0$. Aus diesen Gleichungen folgt aber angesichts der Anfangsbedingungen (5.8) und (5.9) das gewünschte Ergebnis $f_\nu(\mathbf{r}(t), t) \equiv 0$.

Als einfaches Beispiel ist in der folgenden Figur eine Masse m gezeigt, die an einem **Pendel** der Länge l schwingt. Die Schwerkraft $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, die auf diese Masse wirkt, zeigt nach unten. Die Zwangskraft \mathbf{F}' zeigt in Richtung der Aufhängung des Pendels und ist, wie wir gleich sehen werden, für den Umkehrpunkt des Pendels ($\mathbf{v} = 0$) gerade so groß, daß die Gesamtkraft in der Schwingungsebene des Pendels liegt.



Wir wählen als Aufpunkt den Aufhängepunkt des Pendels. Dann lautet die Zwangsbedingung $|\mathbf{r}| = l$, wir schreiben sie in der Form $f(\mathbf{r}) \doteq \frac{m}{2}(r^2 - l^2) = 0$. Dann ist $\text{grad} f = m \mathbf{r}$ und die Bewegungsgleichung (5.2) lautet $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} + \lambda \mathbf{r}$ (die Masse ließ sich herauskürzen). Durch Differenzieren der Zwangsbedingung nach der Zeit erhalten wir $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ und $\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}}^2 = 0$. Elimination von $\ddot{\mathbf{r}}$ ergibt schließlich $\lambda = -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{g} + \dot{\mathbf{r}}^2)/r^2$ und die Bewegungsgleichung ist mit dem Einheitsvektor \mathbf{n}_r in Richtung \mathbf{r} durch

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - (\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{g}) \mathbf{n}_r - \frac{v^2}{r} \mathbf{n}_r \quad (5.10)$$

gegeben. Hier kompensiert der zweite Term auf der rechten Seite die Komponente der Erdbeschleunigung in Richtung des Pendelfadens, wie in der Figur gezeigt, während der dritte Term eine geschwindigkeitsabhängige **Zentripetalbeschleunigung** darstellt, die bei endlicher Geschwindigkeit notwendig ist, um den Massenpunkt auf der Zwangsfläche zu halten. Am Faden zieht nach dem Reaktionsprinzip die Kraft $-\mathbf{F}' = m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_r + v^2/l)\mathbf{n}_r$, solange der Ausdruck in der Klammer positiv ist. Für ein überschlagendes Pendel bleibt daher der Faden nur dann gespannt, wenn die Bedingung $v^2 > -\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ erfüllt ist.

Die oben geschilderte Methode zur Behandlung eingeschränkter Bewegungen liefert nicht nur die Bewegung selbst, sondern auch die Zwangskräfte. Dies ist insbesondere für viele technische Anwendungen von Bedeutung, weil der Massenpunkt nach dem Reaktionsprinzip (2.2) auf die ihn einschränkenden Medien die Kraft $-\mathbf{F}'$ ausübt. Falls man nicht an den Zwangskräften interessiert ist, kann man eine andere Methode verwenden, die eine direktere Berechnung der Bewegung erlaubt und die wir im folgenden beschreiben werden.

Die k Zwangsbedingungen (5.1) schränken die Bewegung des Massenpunktes auf eine Mannigfaltigkeit der Dimension $f \doteq 3 - k$ ein. Die Zahl f nennt man die Zahl der **Freiheitsgrade** der Bewegung. Indem man diese Mannigfaltigkeit (zu jedem Zeitpunkt) mit einem Koordinatennetz von f Koordinaten q_1, \dots, q_f überzieht, gelangt man zu einer Parameterdarstellung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, \dots, q_f, t) \quad (5.11)$$

der Mannigfaltigkeit. Um die Unabhängigkeit der Koordinaten q_i zu garantieren, werden wir annehmen, daß die f **Tangentenvektoren** an die Koordinatenlinien $\partial\mathbf{r}/\partial q_i$ linear unabhängig sind. Wir werden die Liste q_1, \dots, q_f im folgenden durch das Fettschriftsymbol \mathbf{q} abkürzen. Die Parameter \mathbf{q} heißen **generalisierte Koordinaten**. Die Funktion (5.11) erfüllt die Zwangsbedingungen (5.1) zu allen Zeiten identisch in \mathbf{q} .

Um die Bewegung des Massenpunktes mittels generalisierter Koordinaten zu beschreiben, bedarf es nur der Angabe der Zeitabhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$. Diese Zeitabhängigkeit sollte sich aus der Bewegungsgleichung (5.2) ableiten lassen, wobei die Zwangskraft \mathbf{F}' keine Rolle spielen sollte. Denn sie hatte ja nur den Zweck, die Zwangsbedingungen einhalten zu helfen, die bei Benutzung der generalisierten Koordinaten aber sowieso erfüllt sind. Tatsächlich steht \mathbf{F}' zu jedem Zeitpunkt senkrecht zur Mannigfaltigkeit (5.11) und damit zu den Tangentenvektoren $\partial\mathbf{r}/\partial q_i$ an die Koordinatenlinien:

$$\mathbf{F}' \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, f). \quad (5.12)$$

Daher enthalten die Bewegungsgleichungen für die Komponenten der Bewegung in Richtung der Koordinatenlinien

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, f) \quad (5.13)$$

die Zwangskraft nicht mehr. Wir werden im folgenden zeigen, daß die Gleichungen (5.13) die gesuchten Bewegungsgleichungen für die Koordinatenfunktionen $q_i(t)$ beinhalten.

Zwischenbemerkung zur Notation: In der Physik werden oft im mathematischen Sinne verschiedene Funktionen mit dem gleichen Symbol bezeichnet. Zum Beispiel bezeichnet das Symbol $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ auf der rechten Seite von (5.11) den Ortsvektor \mathbf{r} als Funktion der $f + 1$ Variablen \mathbf{q} und t . Gleichzeitig wird die Bewegung des Massenpunktes mit $\mathbf{r}(t)$ bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen beiden Bezeichnungen ist $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\mathbf{q}(t), t)$. Diese Art der Bezeichnungsweise ist nicht verträglich mit den Gepflogenheiten in der Mathematik, ist aber in der Physik sehr üblich. Der Unterschied rührt daher, daß das Funktionssymbol in der Mathematik für den funktionellen Zusammenhang steht, während es in der Physik die betreffende physikalische Größe kennzeichnet. Die durch diese gleichartige Benennung verschiedener funktioneller Abhängigkeiten zu befürchtende Verwirrung läßt sich meistens durch geeignete Notationskonventionen vermeiden. Insbesondere bezeichnen die Symbole $\dot{\mathbf{r}}$ und $d\mathbf{r}/dt$ die (totale) Ableitung der Funktion $\mathbf{r}(t)$, während mit dem Symbol $\partial\mathbf{r}/\partial t$ die (partielle) Ableitung der Funktion $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ gemeint ist. Die sorgfältige Handhabung dieser beiden Arten von Zeitableitung wird im folgenden Mehrdeutigkeiten verhindern.

Indem wir (5.11) nach der Zeit differenzieren, drücken wir zunächst die Geschwindigkeit \mathbf{v} des Massenpunktes durch die generalisierten Koordinaten aus:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}. \quad (5.14)$$

Diese Gleichung definiert im Sinne der obigen Bemerkungen zweierlei: zum einen eine Funktion von $2f + 1$ Variablen $\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, deren partielle Ableitungen im folgenden auftreten werden, und zum anderen die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$, die daraus durch Einsetzen von $\mathbf{q}(t)$ und $\dot{\mathbf{q}}(t)$ entsteht und deren totale Ableitung $\dot{\mathbf{v}}$ die Beschleunigung des Massenpunktes ist. Die Ableitungen \dot{q}_j heißen **generalisierte Geschwindigkeiten**. Wir merken uns, daß die Geschwindigkeit \mathbf{v} immer eine lineare Funktion der generalisierten Geschwindigkeiten ist.

Die Kraftkomponente auf der rechten Seite von (5.13) wird durch Einsetzen von (5.11) und (5.14) eine Funktion der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten und der Zeit. Die so definierte Größe

$$Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \doteq \mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \mathbf{r}(\mathbf{q}, t) \quad (5.15)$$

nennt man eine **generalisierte Kraft**.

Ähnlich wie bei Gleichung (5.5) enthält die aus (5.14) durch abermalige Differentiation nach der Zeit gewonnene Gleichung für die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ nur an einer Stelle die **generalisierten Beschleunigungen** \ddot{q}_i in der Gestalt

$$\ddot{\mathbf{r}} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \dots \quad (5.16)$$

Wir merken uns auch hier: die Beschleunigung ist eine lineare Funktion der generalisierten Beschleunigungen. Indem wir die letzte Gleichung in (5.13) einsetzen, erhalten wir

$$\sum_{j=1}^f m \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right) \ddot{q}_j = Q_i + P_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (5.17)$$

wobei P_i alle Terme zusammenfaßt, die sich aus den in (5.16) durch die Punkte angedeuteten Summanden ergeben. Wegen der angenommenen linearen Unabhängigkeit der Tangentenvektoren $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$ ist dieses System von f linearen Gleichungen für die f generalisierten Beschleunigungen \ddot{q}_i eindeutig lösbar und ergibt nach Auflösung ein System von Bewegungsgleichungen der Form

$$m \ddot{q}_i = K_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (i = 1, \dots, f), \quad (5.18)$$

in dem die ursprünglichen Beschränkungen der Bewegung nicht mehr zu erkennen sind und das dieselbe Form wie die Bewegungsgleichungen des zweiten Newtonschen Axioms (2.1) hat.

Wir wollen hier auch eine interessante Schreibweise der Bewegungsgleichung (5.13) festhalten, die uns später bei der Behandlung der Mechanik mehrerer Massenpunkte wiederbegegnen wird. Durch eine Anwendung der Produktregel formen wir die linke Seite von (5.13) zunächst um in

$$m \ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(m \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - m \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right). \quad (5.19)$$

Für die weitere Umformung brauchen wir die folgenden zwei suggestiven Identitäten. Aus (5.14) lesen wir

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \quad (5.20)$$

ab und eine kleine Rechnung ergibt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i}. \quad (5.21)$$

Mittels (5.20) und (5.21) formen wir schließlich (5.19) weiter um in

$$m \ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(m \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - m \dot{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right). \quad (5.22)$$

Unter Verwendung der kinetischen Energie $T \doteq \frac{m}{2} v^2$ und der Definition der generalisierten Kräfte (5.15) erhält (5.13) damit die Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T - \frac{\partial}{\partial q_i} T = Q_i. \quad (5.23)$$

An dieser Stelle halten wir fest, daß die kinetische Energie als Funktion der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, die aus (3.1) durch Einsetzen von (5.14) erhalten wird, immer ein quadratisches Polynom in den generalisierten Geschwindigkeiten ist.

Falls die eingeprägte Kraft \mathbf{F} konservativ ist, gelingt folgende weitere Umformung. Mit $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$ (siehe (3.14)) ergibt sich aus (5.15) sofort

$$Q_i = -\nabla V(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = -\frac{\partial}{\partial q_i} V. \quad (5.24)$$

Man definiert die **Lagrangefunktion** als Differenz aus kinetischer und potentieller Energie,

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \doteq T - V. \quad (5.25)$$

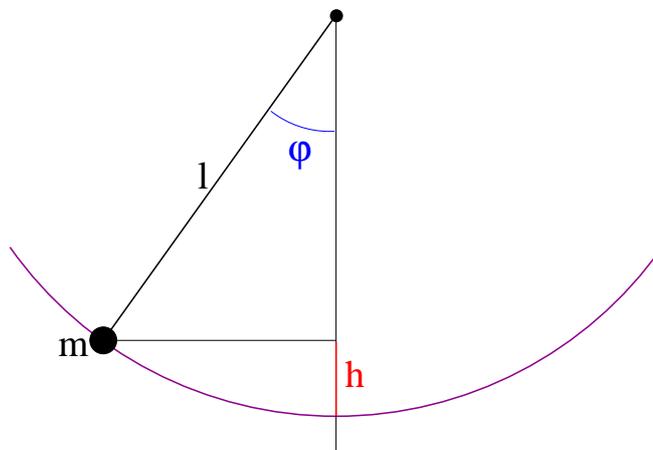
Da die potentielle Energie V nicht von der Geschwindigkeit abhängt ($\partial V/\partial \dot{q}_i = 0$), kann man (5.23) für konservative eingeprägte Kräfte in die Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L - \frac{\partial}{\partial q_i} L = 0 \quad (i = 1, \dots, f) \quad (5.26)$$

bringen.

Die Gleichungen (5.26) heißen **Lagrangesche Bewegungsgleichungen zweiter Art**. Diese Gleichungen stellen ein besonders bequemes, schematisches Verfahren bereit, Bewegungsgleichungen für generalisierte Koordinaten aufzustellen. Man muß nur die kinetische und die potentielle Energie durch Einsetzen von (5.11) und (5.14) durch die generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten ausdrücken und die damit gebildete Lagrangefunktion in (5.26) einsetzen.

Für ein Anwendungsbeispiel greifen wir auf das schon früher benutzte Pendel zurück. Wir nehmen jetzt an, das Pendel schwinde in einer fest vorgegebenen Ebene. Als generalisierte Koordinate können wir dann den Winkel φ zwischen der Vertikalen durch den Aufhängepunkt und dem Pendelfaden wählen. Die potentielle Energie ist durch $V = mgh = mgl(1 - \cos \varphi)$ und die kinetische Energie durch $T = \frac{m}{2} v^2 = ml^2 \dot{\varphi}^2/2$ gegeben. Mit $\partial L/\partial \dot{\varphi} = ml^2 \dot{\varphi}$ und $\partial L/\partial \varphi = -mgl \sin \varphi$ erhalten wir sofort die Bewegungsgleichung $l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$.

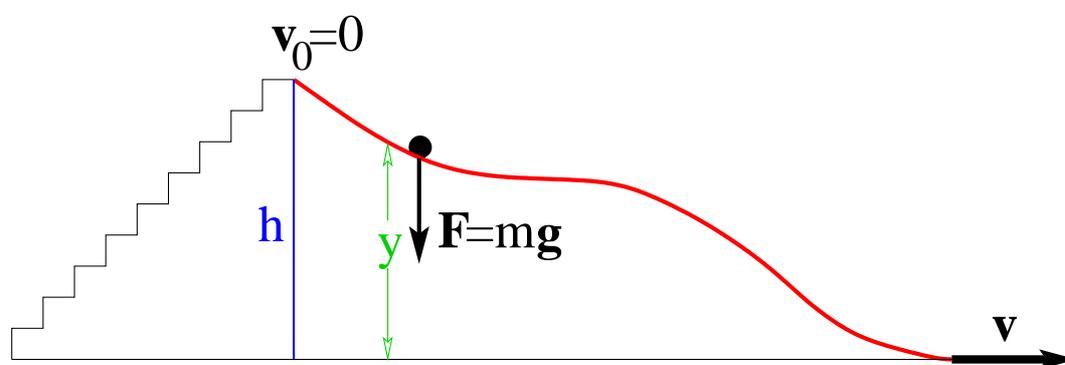


Im Falle skleronomer Zwangsbedingungen kann man den Energiesatz in der früher diskutierten Form benutzen. Es gilt nämlich die Aussage:

Für skleronome Zwangsbedingungen leisten die Zwangskräfte keine Arbeit.

Man kann dies sowohl aus den Gleichungen (5.4) und (5.3) – $\partial f_\nu / \partial t = 0 \implies \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f_\nu = 0 \implies \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}' = 0$ – als auch aus den Gleichungen (5.14) und (5.12) – $\partial \mathbf{r} / \partial t = 0 \implies \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}' = \sum \dot{q}_j \partial \mathbf{r} / \partial q_j \cdot \mathbf{F}' = 0$ – herleiten. Im Energiesatz sind in diesem Falle die Zwangskräfte nicht zu berücksichtigen.

Als Beispiel betrachten wir eine Rutschbahn, auf der ein Kind reibungsfrei aus der Höhe h mit der Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = 0$ rutscht. Aus der Gültigkeit des Energiesatzes $E = \frac{m}{2}v^2 + mgy$ folgt eine Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$, die sich nicht von der beim freien Fall unterscheidet. Die Wirkung der Rutschbahn besteht nur darin, die Richtung der Endgeschwindigkeit in die Horizontale umzulenken und die Dauer des Vergnügens zu verlängern.



Daß bei rheonomen Zwangsbedingungen die Zwangskräfte im allgemeinen sehr wohl (positive oder negative) Arbeit leisten, verdeutlicht man sich leicht am Beispiel eines Fahrstuhls. Die Zwangskraft auf einen im Fahrstuhl gehobenen oder gesenkten Körper wirkt der Schwerkraft entgegen und leistet bei Aufwärtsbewegung (Abwärtsbewegung) am Körper positive (negative) Arbeit.

Als weitere Anwendung des Energiesatzes für skleronome Zwangsbedingungen kommen wir auf das **ebene Pendel** zurück, für das wir oben die Bewegungsgleichung $l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$ für die generalisierte Koordinate φ abgeleitet haben. In der Absicht, diese Differentialgleichung zu lösen, wird man mit mathematischem Scharfblick auf die Idee kommen, sie mit $\dot{\varphi}$ zu multiplizieren, weil eine Zeitintegration dann den Weg zur vollständigen Lösung eröffnet. Eine physikalische Betrachtungsweise dieses Problems wird den soeben diskutierten Energiesatz nutzen, um letztlich denselben Lösungsweg zu beschreiten. Der Energieerhaltungssatz für das ebene Pendel lautet

$$E = T + V = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi). \quad (5.27)$$

Wir nehmen an, das Pendel habe einen maximalen Ausschlag φ_0 , und werden mittels der Gleichung $E = mgl(1 - \cos \varphi_0)$ die Energie durch φ_0 ausdrücken.

Unter Verwendung der Halbwinkelformel $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2)$ erhalten wir so $l\dot{\varphi}^2 = 4g(\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2))$. Nach Trennung der Variablen wird diese Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\varphi(t=0) = 0$ durch

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \frac{1}{2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi'/2)}} \quad (5.28)$$

gelöst. Das verbleibende Integral ist ein **elliptisches Integral**, das man durch eine geeignete Substitution auf Normalform bringen kann. Wir definieren den Parameter $k \doteq \sin(\varphi_0/2)$ und führen die neue Integrationsvariable s mittels der Substitution $\sin(\varphi/2) = k \sin s$ ein, durch die das Intervall $0 < \varphi < \varphi_0$ auf das Intervall $0 < s < \pi/2$ abgebildet wird. Die obige Lösung schreibt sich dann als

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \int_0^{s(\varphi)} \frac{ds'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s'}} \equiv F(k, s). \quad (5.29)$$

Das durch $F(k, s)$ definierte Integral ist die Legendresche Normalform des (unvollständigen) elliptischen Integrals erster Art. Die Schwingungsdauer des Pendels ergibt sich damit als

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k), \quad (5.30)$$

wobei $K(k)$ das vollständige elliptische Integral erster Art ist. Im Grenzfall kleiner Schwingungsamplituden $k \rightarrow 0$ erhalten wir natürlich das bekannte Ergebnis für den harmonischen Oszillator

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\varphi_0 \ll \pi) \quad (5.31)$$

zurück, für steigende Amplituden wächst die Schwingungsdauer an und für $\varphi_0 \rightarrow \pi$ ($k \rightarrow 1$) geht sie gegen unendlich. Korrekturen zum harmonischen Grenzfall können durch eine Reihenentwicklung der obigen Formel nach Potenzen von k berechnet werden. Die binomische Reihe ergibt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-k^2 \sin^2 \varphi)^n \quad (5.32)$$

gleichmäßig im Integrationsintervall für $k < 1$. Nach Vertauschung von Summe und Integration berechnet man die Integrale der einzelnen Summanden zu

$$\int_0^{\pi/2} (-1)^n \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \binom{-1/2}{n} \quad (5.33)$$

und erhält die Reihenentwicklung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n}^2 k^{2n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right]. \quad (5.34)$$

Damit schließen wir dieses Beispiel ab, mit dem wir auch ein Beispiel für die Entwicklung eines nicht elementaren Integrals nach einem kleinen Parameter geben wollten. Als weiteres Beispiel skizzieren wir noch kurz das **sphärische Pendel**, für das sich als generalisierte Koordinaten die Winkelvariablen der Kugelkoordinaten (1.14) anbieten. Wir wählen den Aufhängepunkt als Aufpunkt und lassen die Polarachse $\vartheta = 0$ in Richtung der Ruhelage des Pendels nach unten zeigen. Die generalisierten Geschwindigkeiten lesen wir aus (1.17) ab und erhalten die Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) - mgl(1 - \cos \vartheta). \quad (5.35)$$

Nach (5.26) leiten wir daraus die Lagrangegleichungen

$$\begin{aligned} ml^2 (\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) + mgl \sin \vartheta &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &\equiv \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta) = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

ab. Für die erste Gleichung kann man durch Multiplikation mit $\dot{\vartheta}$ und Integration auch hier ein erstes Integral gewinnen, das wieder die Bedeutung des Energieerhaltungssatzes hat. Die zweite Gleichung ist besonders einfach, weil die Lagrangefunktion von der Variablen φ gar nicht abhängt, und drückt die Erhaltung der vertikalen Komponente des Drehimpulses L_z aus. Man macht sich leicht klar, daß die Komponente des Drehmoments (4.3) sowohl der eingepprägten Schwerkraft $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ als auch der Zwangskräfte $\mathbf{r} \times \mathbf{F}'$ in dieser Richtung verschwindet und deshalb L_z nach (4.5) erhalten sein muß. Diese beiden Erhaltungssätze

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + mgl(1 - \cos \vartheta) &= E \\ ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta &= L_z, \end{aligned} \quad (5.37)$$

ebenen den Weg zu einer vollständigen Lösung dieses Problems, die wir hier aber nicht weiter verfolgen wollen.

Im Zusammenhang mit der Bedingung (5.12) für die Zwangskräfte und mit der Form (5.13) der Bewegungsgleichungen kann man den wichtigen Begriff der **virtuellen Arbeit** diskutieren. Wir führen dazu zunächst den Begriff der **virtuellen Verrückung** $\delta \mathbf{r}$ mittels der Formel

$$\delta \mathbf{r} \doteq \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i \quad (5.38)$$

ein. Unter virtuellen Verrückungen eines Massenpunktes in einem Punkt der Zwangsmannigfaltigkeit versteht man alle Verrückungen, die bei festgehaltener Zeit tangential zur Mannigfaltigkeit stehen. Wenn wir die Verrückungen δq_i als infinitesimal klein betrachten, kann man die virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{r}$ auch als beliebige infinitesimale Verrückungen in der Zwangsmannigfaltigkeit bei festgehaltener Zeit auffassen. Mit Hilfe dieses Begriffes kann man die f Bedingungen (5.12) auch in die eine Bedingung

$$\delta A' \doteq \mathbf{F}' \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (5.39)$$

zusammenfassen, die man in Worten folgendermaßen ausdrücken kann:

Unter virtuellen Verrückungen leisten Zwangskräfte keine Arbeit oder Die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet.

Für skleronome Zwangsbedingungen sind die virtuellen Verrückungen identisch mit infinitesimalen realen Verrückungen. Essentiell ist die Maßgabe, daß bei virtuellen Verrückungen die Zeit festzuhalten ist, im Falle von zeitabhängigen Zwangsbedingungen. Wir hatten ja schon betont, daß in diesem Fall die Zwangskräfte sehr wohl reale Arbeit leisten.

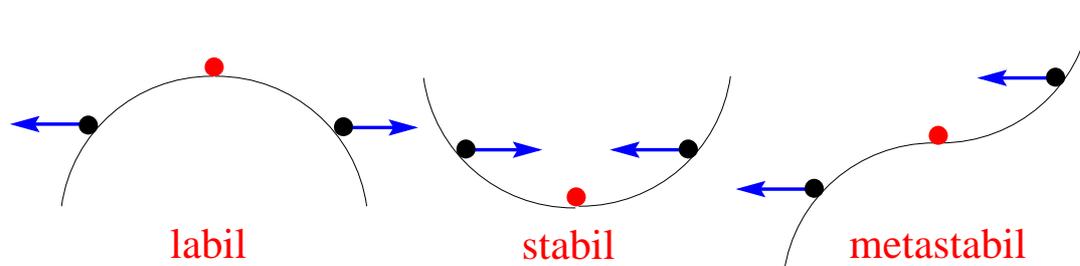
Aus (5.2) und (5.39) folgt sofort eine alternative Schreibweise der Bewegungsgleichungen (5.13) mittels virtueller Verrückungen:

$$(\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} = 0. \quad (5.40)$$

Der durch diese Gleichung ausgedrückte Sachverhalt wird das **d'Alembertsche Prinzip** genannt. **Jean-Baptist de Rond d'Alembert (1717-1783)** hat dieses Prinzip aus einer Verallgemeinerung des **Prinzips der virtuellen Arbeit** gewonnen, mit dem man Gleichgewichtszustände identifizieren kann. Dieses Prinzip ergibt sich aus (5.40) im Gleichgewicht, d.h. für den Fall verschwindender Beschleunigung, als

$$\delta A \doteq \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = 0. \quad (5.41)$$

Falls die eingepreßte Kraft \mathbf{F} konservativ ist und damit ein Potential V besitzt, gilt $\delta A = -\delta V$ und Gleichgewicht herrscht an solchen Stellen, an denen das Potential V auf der Zwangsmannigfaltigkeit Maxima, Minima oder Wendepunkte hat. In der folgenden Figur sind diese drei wohlbekannten Gleichgewichtssituationen noch einmal dargestellt und durch Angabe der Richtungen der auftretenden Kräfte in der Nähe der Gleichgewichtslage charakterisiert.



Für die begriffliche Verallgemeinerung des Prinzips der virtuellen Arbeit auf ein auch für beschleunigte Körper gültiges Prinzip hat d'Alembert den Beschleunigungsterm in (5.40) als **Trägheitskraft** aufgefaßt: $\mathbf{F}^* \doteq -m\ddot{\mathbf{r}}$. Damit konnte er der Bewegungsgleichung (5.40) die Bedeutung einer Gleichgewichtsbedingung geben, indem er sagte:

Die virtuelle Arbeit der Summe von eingprägter Kraft und Trägheitskraft verschwindet.

Die obigen Prinzipien entfalten ihre ganze Nützlichkeit erst richtig nach Verallgemeinerung auf mehr als einen Massenpunkt.

Wir haben oben zwei Zugänge zu einer systematischen Behandlung holonomer Zwangsbedingungen (5.1) beschrieben, die auf die Lagrangegleichungen erster Art (5.1-3) und zweiter Art (5.26) führten. Natürlich gibt es auch Zwänge, die man nicht durch holonome Bedingungen des Typs (5.1) ausdrücken kann. Eine interessante Klasse **nicht-holonome Zwangsbedingungen** werden wir erst später diskutieren, weil sich sinnvolle Beispiele für diese Zwänge nur für Systeme mit mehreren Massenpunkten ergeben. Ein anderer Typ nicht-holonome Zwangsbedingungen enthält Ungleichungen

$$f(\mathbf{r}, t) \geq 0 \quad (5.42)$$

anstelle von Gleichungen. Einfache Beispiele dafür sind der Massenpunkt in einem Fahrstuhl oder auf einer beliebigen Unterlage, durch die er nach unten begrenzt ist, von der er aber nach oben abheben kann. Im Falle des Fadenpendels, dessen Faden nicht immer gespannt sein muß, haben wir solche Zwänge oben schon kurz erwähnt. Solche Zwänge lassen sich offenbar stückweise wie holonome Zwänge behandeln, nämlich solange der Massenpunkt die Gleichung $f(\mathbf{r}, t) = 0$ erfüllt. Man muß nur ein Kriterium dafür finden, wie lange diese Gleichung gültig ist. Solange der Massenpunkt die Gleichung $f(\mathbf{r}, t) = 0$ erfüllt, besteht die Wirkung des Zwanges (5.42) darin, ihn am Eindringen in das Gebiet $f(\mathbf{r}, t) < 0$ zu hindern. Das kann nur durch eine Zwangskraft geschehen, die in Richtung des Gebietes $f(\mathbf{r}, t) > 0$ zeigt, in das auch der Normalenvektor $\text{grad}f$ gerichtet ist. Mit der Gleichung (5.3) für die Zwangskraft erhalten wir somit das folgende Kriterium:

Die nichtholonome Zwangsbedingung (5.42) wirkt wie die holonome Zwangsbedingung $f(\mathbf{r}, t) = 0$, solange der zugehörige Lagrangesche Multiplikator λ positiv ist.

II. Mechanik der Massenpunktsysteme (Punktmechanik)

6. Einführung

Im folgenden Teil der Vorlesung befassen wir uns mit der Mechanik eines Systems von n Massenpunkten ($n \geq 1$), auch kurz **Punktmechanik** genannt. Die im ersten Teil behandelte Mechanik eines einzelnen Massenpunktes stellt den einfachsten Spezialfall dafür dar. Sie wurde vorangestellt, damit Sie sich in Ruhe mit einigen wichtigen Grundbegriffen der Mechanik vertraut machen konnten. Alle diese Grundbegriffe spielen auch in der Mechanik der Punktsysteme eine wesentliche Rolle. Es werden allerdings neue Begriffe hinzukommen, zum Beispiel der des Massenmittelpunktes, der im Falle eines einzelnen Massenpunktes ohne Bedeutung ist. Außerdem werden wir zusätzliche Prinzipien formulieren, zum Beispiel das Hamiltonsche Prinzip, die neben den schon besprochenen wesentliche Bestandteile der analytischen Mechanik sind.

Eine Punktmechanik ist offensichtlich angemessen für die Beschreibung von Systemen wie dem Sonnensystem, wenn man die Planeten als Massenpunkte auffaßt. Die volle Bedeutung der Punktmechanik wird allerdings erst klar, wenn man daran denkt, daß alle Materie aus Elementarbausteinen aufgebaut ist, die man nach gängiger Auffassung als punktförmig ansieht. In diesem Sinne ist die Punktmechanik die jede Mechanik umfassende Mechanik. Ausgedehnte Materiestücke können ebenfalls als Systeme aus Massenpunkten angesehen werden, die aufgrund von inneren Kräften zusammenhalten. So ist für feste Materie oft das Modell des **starrten Körpers** von Nutzen, bei dem die einzelnen Massenpunkte den Zwangsbedingungen unterliegen, daß die Abstände von je zwei Massenpunkten fest vorgegeben sind. Diese wichtige Klasse von Punktsystemen werden wir im dritten Teil der Vorlesung gesondert diskutieren. Auch die im vierten Teil zu behandelnden **deformierbaren Medien** werden als ein Spezialfall für Punktsysteme anzusehen sein.

Es muß hier erwähnt werden, daß aufgrund jüngerer Entwicklungen in der Theorie der Elementarteilchen auch die Mechaniken nicht punktförmiger Objekte eine wachsende Bedeutung erlangt haben. Zu nennen wäre insbesondere die Mechanik linienförmiger Objekte, die **String-Mechanik**, aber auch diejenigen für flächenhafte und höherdimensionale fundamentale Objekte, die **Brane-Mechanik**.

Für die kinematische Beschreibung eines Systems von n Massenpunkten sind n Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_i(t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.1)$$

anzugeben, die im Ursprung O eines Bezugssystems angelegt werden. Die Bewegungsgesetze für diese Massenpunkte wird man vorzugsweise wieder in einem Inertialsystem beschreiben. Wenn m_i die Masse des i -ten Massenpunktes ist, lauten die Bewegungsgleichungen wie in (2.1)

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6.2)$$

Die Kräfte \mathbf{F}_i setzen sich jetzt aus Anteilen zusammen, deren Quellen außerhalb und innerhalb des betrachteten Systems liegen. Man unterscheidet dementsprechend **äußere oder externe Kräfte** $\mathbf{F}_i^{(e)}$ und **innere Kräfte** $\mathbf{F}_{i \leftarrow k}$, die vom Massenpunkt k stammen, und findet insgesamt die Kraft

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_{i \leftarrow k}. \quad (6.3)$$

Damit die Summation nicht auf $k \neq i$ eingeschränkt werden muß, treffen wir die Vereinbarung $\mathbf{F}_{i \leftarrow i} = 0$. (Ein Massenpunkt übt keine Kraft auf sich selbst aus.)

Im Prinzip kann man durch eine geeignete Erweiterung des Systems immer äußere Kräfte zu inneren machen. Falls aber die Quellen von äußeren Kräften durch das betrachtete Massensystem nicht beeinflußt werden, wird man diese Quellen als fest vorgegeben nicht in das System einbeziehen. Systeme, auf die keine äußeren Kräfte wirken, nennt man **abgeschlossen**.

Innere Kräfte, die zwischen je zwei Massenpunkten i und k wirken, haben nach dem Reaktionsprinzip (2.2) die fundamentale Eigenschaft

$$\mathbf{F}_{i \leftarrow k} = -\mathbf{F}_{k \leftarrow i}, \quad (6.4)$$

die, wie wir schon in Kapitel 2 gesehen haben, ganz wichtige Konsequenzen hat.

Wie schon in (2.1) hängen die äußeren Kräfte im allgemeinen von der Lage und der Geschwindigkeit des beeinflußten Massenpunktes und der Zeit ab:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t). \quad (6.5)$$

Die inneren Kräfte werden dagegen im allgemeinen nicht von der Zeit abhängen, dafür aber von der Lage und vielleicht auch der Geschwindigkeit der beiden beteiligten Massenpunkte:

$$\mathbf{F}_{i \leftarrow k} = \mathbf{F}_{i \leftarrow k}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i; \mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k). \quad (6.6)$$

Äußere Kräfte rühren letztlich natürlich immer von **Zweikörperkräften** des Typs (6.6) her, indem Ort $\mathbf{r}_k(t)$ und Geschwindigkeit $\mathbf{v}_k(t)$ der äußeren Quelle k fest vorgegeben sind.

Das System (6.2) von n Differentialgleichungen zweiter Ordnung hat eine eindeutige Lösung, wenn die Lagen \mathbf{r}_i und die Geschwindigkeiten \mathbf{v}_i aller n Massenpunkte zu einer Anfangszeit t_0 vorgegeben werden.

7. Erhaltungssätze

Während die detaillierte Bewegung eines Systems von Massenpunkten im allgemeinen beliebig verwickelt sein kann, gibt es in Verallgemeinerung unserer entsprechenden Betrachtungen für einen Massenpunkt eine Reihe von Erhaltungssätzen, die gewisse Aussagen über die Bewegung von Systemen als Ganzes gestatten. Diese Erhaltungssätze werden wir im vorliegenden Kapitel besprechen.

Unter dem **Gesamtimpuls** eines Systems von n Massenpunkten mit den Massen m_i und den Geschwindigkeiten \mathbf{v}_i verstehen wir die Größe

$$\mathbf{P} \doteq \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i, \quad (7.1)$$

d.h. die Summe der Einzelimpulse (4.1). Durch Summation der Bewegungsgleichungen (6.2,3) über alle Massenpunkte finden wir damit die Gleichung

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,k=1}^n \mathbf{F}_{i \leftarrow k} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)}. \quad (7.2)$$

Hierbei hat sich die Doppelsumme über die inneren Kräfte wegen des Reaktionsprinzips (2.2, 6.4) herausgehoben. Wir haben damit den **Impulssatz** für Systeme von Massenpunkten gewonnen:

Die zeitliche Ableitung des Gesamtimpulses ist gleich der Resultierenden der äußeren Kräfte.

Wenn keine äußeren Kräfte vorhanden sind, das System also abgeschlossen ist, folgt daraus sogleich der Satz von der **Erhaltung des Gesamtimpulses**:

In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls zeitlich konstant.

Der Impulssatz erhält eine viel anschaulichere Interpretation mithilfe des Begriffs des **Massenmittelpunktes**. Wir bezeichnen die **Gesamtmasse** eines Systems mit

$$M \doteq \sum_{i=1}^n m_i. \quad (7.3)$$

Der Massenmittelpunkt des Systems ist dann durch die Gleichung

$$\mathbf{R} \doteq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (7.4)$$

gegeben. Der Massenmittelpunkt liegt immer im Inneren der **konvexen Hülle** der durch die n Massenpunkte gegebenen Punktmenge. (Unter konvexer Hülle versteht man die durch die Punkte $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{r}_i$ mit beliebigen Gewichten $\alpha_i \geq 0$ unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ aufgespannte Punktmenge.)

Aus (7.1) und (7.4) folgt nun sofort

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}} \quad (7.5)$$

oder in Worten:

Der Gesamtimpuls ist gleich dem Produkt aus der Gesamtmasse und der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes.

Den Impulssatz (7.2) können wir damit auch als Bewegungsgleichung des Massenmittelpunktes

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)} \quad (7.6)$$

auffassen und in Worten folgendermaßen als Satz vom Massenmittelpunkt formulieren:

Der Massenmittelpunkt bewegt sich so, als ob in ihm die gesamte Masse des Systems vereinigt wäre und auf ihn die Resultierende aller äußeren Kräfte wirkte.

Entscheidend ist hier die Tatsache, daß die inneren Kräfte keinerlei Einfluß auf die Bewegung des Massenmittelpunktes haben. Wie schon in Kapitel 2 kurz angedeutet, rechtfertigt die Bewegungsgleichung (7.6) erst, zusammengesetzte Körper unter geeigneten Umständen als Massenpunkte zu betrachten. Im homogenen Gravitationsfeld ist die resultierende Kraft $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g} = M\mathbf{g}$ trivialerweise identisch mit der auf die Punktmasse M wirkenden Kraft. Aus diesem Grunde nennt man den Massenmittelpunkt auch oft **Schwerpunkt**. Es stellt sich heraus, daß die resultierende Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern ebenfalls exakt gleich derjenigen ist, die zwischen deren punktförmigen Attrappen wirkt, solange die beiden Himmelskörper kugelsymmetrisch sind. Dies folgt aus einer einfachen Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und wird Ihnen im Rahmen der Elektrodynamikvorlesung näher erläutert werden.

Für abgeschlossene Systeme gilt also

$$M\ddot{\mathbf{R}} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 \cdot t. \quad (7.7)$$

Der Erhaltungssatz für den Gesamtimpuls hat daher die anschauliche Bedeutung, daß der Massenmittelpunkt sich geradlinig gleichförmig bewegt. Dies ist das Analogon des 1. Newtonschen Axioms für Systeme von Massenpunkten. Ganz wesentlich ist dafür das 3. Newtonsche Axiom (2.2, 6.4) gewesen. Wir halten fest, daß wir für abgeschlossene Systeme von n Massenpunkten 6 der $6n$ Integrationen, die zur Lösung der Bewegungsgleichungen nötig sind, ausführen können (**6 erste Integrale der Bewegung**).

Mit dem Ziel der Herleitung eines **Energiesatzes** gehen wir wie in Kapitel 3 bei einem einzigen Massenpunkt vor. Wir multiplizieren die Bewegungsgleichung (6.2) mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_i$ und erhalten nach Summation über alle Massenpunkte

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (7.8)$$

Die Größe

$$T \doteq \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (7.9)$$

hat die Bedeutung der gesamten kinetischen Energie des Systems. Indem man (7.8) nach der Zeit integriert, erhält man

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt \equiv A. \quad (7.10)$$

Hier bezeichnet A die im Zeitintervall zwischen t_1 und t_2 von den äußeren und inneren Kräften an den n Massenpunkten geleistete Arbeit. Ohne weitere Annahmen ist die Gleichung (7.10) nicht sehr nützlich, weil der Arbeitsbegriff in dieser Allgemeinheit zu verwickelt und unanschaulich bleibt. Man wird wieder anstreben, die Zeitintegration in (7.10) ausführen zu können, wie das in Kapitel 3 für konservative Kräfte gelang.

Die Arbeit der äußeren Kräfte wird leicht überschaubar, wenn diese konservativ im früheren Sinne sind. Falls Potentiale $V_i(\mathbf{r})$ existieren, so daß

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i) = -\nabla V_i(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V_i(\mathbf{r}_i), \quad (7.11)$$

so gilt für die von dieser Kraft geleistete Arbeit

$$A_i^{(e)} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} V_i(\mathbf{r}_i(t)) dt = -[V_i(\mathbf{r}_i(t_2)) - V_i(\mathbf{r}_i(t_1))] \quad (7.12)$$

und die gesamte von den äußeren Kräften geleistete Arbeit schreibt sich als

$$A^{(e)} = - \sum_{i=1}^n [V_i(\mathbf{r}_i(t_2)) - V_i(\mathbf{r}_i(t_1))]. \quad (7.13)$$

Wir wollen nun fragen, welche Eigenschaft die inneren Kräfte haben müssen, damit eine ähnliche Vereinfachung möglich ist. Es wird offenbar notwendig sein, daß die inneren Kräfte unabhängig von den Geschwindigkeiten \mathbf{v}_j sind: $\mathbf{F}_{j \leftarrow k} = \mathbf{F}_{j \leftarrow k}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)$. Ein mögliches Potential $W_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)$ wird dann ebenfalls von den beiden Ortsvektoren \mathbf{r}_j und \mathbf{r}_k abhängen. Die totale Zeitableitung dieses Potentials lautet

$$\frac{d}{dt} W_{jk}(\mathbf{r}_j(t), \mathbf{r}_k(t)) = \frac{\partial W_{jk}}{\partial \mathbf{r}_j} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j + \frac{\partial W_{jk}}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \dot{\mathbf{r}}_k. \quad (7.14)$$

In dem Ausdruck

$$A^{(i)} \doteq \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j,k=1}^n \mathbf{F}_{j \leftarrow k} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j dt \quad (7.15)$$

für die Arbeit der inneren Kräfte finden wir die rechte Seite von (7.14) wieder, indem wir die beiden folgenden Identifikationen vornehmen:

$$\mathbf{F}_{j \leftarrow k} = -\frac{\partial W_{jk}}{\partial \mathbf{r}_j} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_{k \leftarrow j} = -\frac{\partial W_{jk}}{\partial \mathbf{r}_k}. \quad (7.16)$$

Die beiden Reaktionskräfte $\mathbf{F}_{j \leftarrow k}$ und $\mathbf{F}_{k \leftarrow j}$ müssen also aus einer gemeinsamen Potentialfunktion W_{jk} (z.B. mit der Konvention $j < k$) folgen. Das Reaktionsprinzip $\mathbf{F}_{k \leftarrow j} = -\mathbf{F}_{j \leftarrow k}$ hat dann die Konsequenz, daß

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} W_{jk}(\mathbf{r}_j + \mathbf{a}, \mathbf{r}_k + \mathbf{a}) \Big|_{\mathbf{a}=0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} W_{jk} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} W_{jk} = -\mathbf{F}_{j \leftarrow k} - \mathbf{F}_{k \leftarrow j} \equiv 0, \quad (7.17)$$

so daß $W_{jk}(\mathbf{r}_j + \mathbf{a}, \mathbf{r}_k + \mathbf{a})$ unabhängig vom Verschiebungsvektor \mathbf{a} ist. Damit hängt $W_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)$ aber nur vom Differenzvektor $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ ab (wähle dazu $\mathbf{a} = -\mathbf{r}_k$) und wir können für jedes Paar (j, k) von Massenpunkten das Wechselwirkungspotential

$$V_{(j,k)}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \doteq W_{jk}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k, 0) = W_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) \quad (7.18)$$

einführen.

Wir haben damit herausgefunden, wann man Wechselwirkungskräfte sinnvollerweise konservativ nennen wird, nämlich dann, wenn für jedes Paar (j, k) von Massenpunkten ein Potential $V_{(j,k)}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$ existiert, mit dem

$$\mathbf{F}_{j \leftarrow k} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} V_{(j,k)}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} V_{(j,k)}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) = -\mathbf{F}_{k \leftarrow j} \quad (7.19)$$

gilt. Es ist zu beachten, daß kein Unterschied zwischen dem Paar (j, k) und dem Paar (k, j) besteht und wegen (7.14) das Potential $V_{(j,k)}$ alle Beiträge des Paares (j, k) in der Doppelsumme in (7.15) abdeckt. Der Anteil der inneren Kräfte an der Arbeit (7.10) schreibt sich dann als

$$\begin{aligned} A^{(i)} &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_{j \leftarrow k} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j + \mathbf{F}_{k \leftarrow j} \cdot \dot{\mathbf{r}}_k) dt \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_{j \leftarrow k} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j + \mathbf{F}_{k \leftarrow j} \cdot \dot{\mathbf{r}}_k) dt \\ &= - \sum_{1 \leq j < k \leq n} [V_{(j,k)}(\mathbf{r}_j(t_2) - \mathbf{r}_k(t_2)) - V_{(j,k)}(\mathbf{r}_j(t_1) - \mathbf{r}_k(t_1))]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Die damit gefundene Eigenschaft konservativer Wechselwirkungskräfte und deren Potentiale, nur vom Relativvektor $\mathbf{r}_{jk} \doteq \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ abhängig zu sein, nennt man **Translationsinvarianz**. Wir haben deshalb oben gezeigt, daß für konservative innere Kräfte das Reaktionsprinzip gleichbedeutend mit Translationsinvarianz ist.

Unter der Annahme, daß innere und äußere Kräfte eines Systems von n Massenpunkten konservativ sind, folgt aus (7.10), (7.13) und (7.20) der **Energieerhaltungssatz**, der aussagt, daß die Gesamtenergie

$$E \equiv T + V^{(e)} + V^{(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq j < k \leq n} V_{(j,k)} \quad (7.21)$$

erhalten ist:

Die Summe aus der kinetischen, der äußeren potentiellen und der inneren potentiellen Energie ist zeitlich konstant.

Für manche Zwecke erweist sich die folgende Zerlegung der kinetischen Energie in einen inneren und einen äußeren Anteil als nützlich. Wir zerlegen die Ortsvektoren \mathbf{r}_i in den Vektor \mathbf{R} von Aufpunkt zum Massenmittelpunkt des Systems und den Vektor \mathbf{r}'_i vom Massenmittelpunkt zum Punkt i :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i. \quad (7.22)$$

Dann gilt wegen (7.4) offenbar

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0, \quad (7.23)$$

wodurch die gesamte kinetische Energie sich zu

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2 = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i'^2 = T^{(e)} + T^{(i)} \quad (7.24)$$

vereinfacht. Hierbei ist die externe kinetische Energie $T^{(e)}$ diejenige, die das System hätte, wenn sich die Gesamtmasse M mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{R}}$ des Massenmittelpunktes bewegte, und $T^{(i)}$ ist die kinetische Energie des Systems in einem Bezugssystem, in dem der Massenmittelpunkt ruht.

Abschließend halten wir noch einmal fest, daß wir für Systeme mit konservativen Kräften eine Zeitintegration ausführen können und so zum Energieerhaltungssatz kommen.

Wir wollen nun in Analogie zu (4.5) einen Satz über den **Gesamtdrehimpuls**

$$\mathbf{L} \doteq \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \quad (7.25)$$

herleiten. Wir betonen noch einmal, daß Drehimpulse nicht nur von der Wahl des Bezugssystems, sondern auch von der Wahl des Aufpunktes O im Bezugssystem

abhängen. Durch vektorielle Multiplikation der Bewegungsgleichung (6.2) mit \mathbf{r}_i und Summation über alle Massenpunkte erhalten wir

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,k=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i \leftarrow k}. \quad (7.26)$$

Der erste Term auf der rechten Seite stellt die **Resultierende der Drehmomente** (siehe (4.3)) der äußeren Kräfte dar, die wir mit

$$\mathbf{N} \doteq \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} \quad (7.27)$$

bezeichnen. Von den Beiträgen der inneren Kräfte greifen wir aus der Doppelsumme in (7.26) die beiden Summanden

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i \leftarrow k} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{k \leftarrow i} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{i \leftarrow k} \quad (7.28)$$

heraus. Man erkennt an dieser Formel, daß der Beitrag der inneren Kräfte zur zeitlichen Änderung des Gesamtdrehimpulses verschwindet, wenn die inneren Kräfte **Zentralkräfte** in dem Sinne sind, daß die Kraft zwischen i -ten und dem k -ten Massenpunkt in Richtung des Verbindungsvektors zwischen den beiden Massenpunkten zeigt. Tatsächlich haben viele Wechselwirkungskräfte diese Eigenschaft (Gravitationskraft, Coulombkraft). Unter der genannten Voraussetzung gilt der **Drehimpulssatz für Systeme von Massenpunkten**,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \quad (7.29)$$

oder in Worten:

Für Systeme mit inneren Zentralkräften ist die zeitliche Ableitung des Gesamtdrehimpulses gleich der Resultierenden der Drehmomente der äußeren Kräfte.

Zu einem **Drehimpulserhaltungssatz** gelangt man nun, wenn das Drehmoment \mathbf{N} verschwindet:

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}_0, \quad \text{wenn} \quad \mathbf{N} = 0. \quad (7.30)$$

Wichtige Beispiele für die Gültigkeit des Drehimpulserhaltungssatzes sind:

- abgeschlossene Systeme ($\mathbf{F}_i^{(e)} = 0$)
- Systeme, bei denen die äußeren Kräfte $\mathbf{F}_i^{(e)}$ Zentralkräfte mit einem gemeinsamen Kraftzentrum O für alle i sind; dann verschwindet \mathbf{N} bezüglich dieses Zentrums O und \mathbf{L} ist bezüglich des Aufpunktes O erhalten.

Um die Abhängigkeit des Drehimpulses vom Aufpunkt zu studieren, führen wir eine Verschiebung des Aufpunktes um den festen Vektor \mathbf{a} durch. Mit den Bezeichnungen $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$, $\mathbf{r}'_i = \overrightarrow{O'P_i}$ und $\mathbf{a} = \overrightarrow{OO'}$ haben wir die Transformation

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{a} + \mathbf{r}'_i, \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}'_i \quad (7.31)$$

und daher gilt für die Drehimpulse \mathbf{L}' bezüglich O' und \mathbf{L} bezüglich O die Beziehung

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) \times \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{L} - \mathbf{a} \times \mathbf{P}. \quad (7.32)$$

Daraus folgt die Unabhängigkeit des Drehimpulses vom Aufpunkt in Bezugssystemen, in denen der Massenmittelpunkt ruht. Hinter diesem Ergebnis steht eine naheliegende Zerlegung des Gesamtdrehimpulses in einen inneren und einen äußeren Anteil. Wählt man nämlich statt des obigen festen Aufpunktes O' den (möglicherweise bewegten) Massenmittelpunkt als neuen Bezugspunkt, so gilt mit (7.22,23)

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i) = M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{L}'. \quad (7.33)$$

Der hier auftretende Drehimpuls \mathbf{L}' , der auf den Massenmittelpunkt bezogen ist, ist der sogenannte **innere Drehimpuls** $\mathbf{L}^{(i)}$ des Systems. Wir halten daher fest:

Im Bezugssystem des Massenmittelpunktes ist der Drehimpuls bezüglich jedes Aufpunktes gleich dem inneren Drehimpuls.

Wenn man vom Drehimpuls eines Atoms, Atomkerns oder eines Elementarteilchens spricht, meint man im allgemeinen den inneren Drehimpuls $\mathbf{L}^{(i)}$.

Wir zerlegen das Drehmoment (7.27) in Analogie zum Drehimpuls (7.33) in

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}. \quad (7.34)$$

Wegen der Gültigkeit des Impulssatzes (7.2) heben sich im Drehimpulssatz (7.29) die Zeitableitung des ersten Terms der rechten Seite von (7.33) und der erste Term der rechten Seite von (7.34) gegenseitig weg. Für Systeme mit inneren Zentralkräften folgt daher aus dem Drehimpulssatz (7.29) die Gleichung

$$\frac{d\mathbf{L}^{(i)}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}, \quad (7.35)$$

die bei beliebiger, auch beschleunigter Bewegung des Massenmittelpunktes gilt. Wir merken uns:

Für Systeme mit inneren Zentralkräften ist die zeitliche Ableitung des inneren Drehimpulses gleich dem Moment der äußeren Kräfte bezüglich des Massenmittelpunktes.

Das Moment der äußeren Kräfte bezüglich des Massenmittelpunktes ist oft leichter zu berechnen als das bezüglich anderer Aufpunkte. So gilt etwa in einem homogenen Schwerefeld $\mathbf{N}^{(i)} = \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{g} = \sum m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{g} = 0$ und deshalb ist der innere Drehimpuls eines im homogenen Schwerefeld fallenden oder geworfenen Körpers konstant.

Große praktische Bedeutung hat der Drehimpulssatz für die Bewegung **starrer Körper**, die wir im 3. Abschnitt dieser Vorlesung noch ausführlich behandeln werden. Hier wollen wir nur kurz die Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse durch seinen Massenmittelpunkt betrachten, die wir als z -Achse unseres Koordinatensystems wählen. Dann liegen die Geschwindigkeiten aller Punkte des starren Körpers in der (x, y) -Ebene und haben den Betrag $v_i = l_i \omega$, wo l_i den Abstand des Punktes i von der Drehachse und ω die **Winkelgeschwindigkeit** der Rotation bezeichnet. Die z -Komponente des inneren Drehimpulses ist dann

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i l_i^2 \omega = \Theta \omega, \quad (7.36)$$

wo Θ das **Trägheitsmoment** des Körpers bezüglich der Drehachse ist.

Zeitliche Konstanz des Drehimpulses L_z ist gleichbedeutend mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω . Falls man allerdings durch innere Kräfte, wenn der Körper nicht starr ist, das Trägheitsmoment ändern kann, muß sich die Winkelgeschwindigkeit entsprechend ändern, damit der Drehimpuls konstant bleibt (Drehschemelversuch, Pirouette).

In der Satellitentechnik benutzt man innere Kreisel, um kleine Drehimpulse des Satelliten aufzufangen. Auf diese Weise verhindert man nicht nur unangenehme Rotationen des Satelliten, sondern richtet ihn auch nach dem Fixsternhimmel aus. Nach demselben Prinzip fallen Katzen bekanntlich immer auf die Füße, indem sie ihren Schwanz rotieren lassen.

Wir halten abschließend fest, daß bei inneren Zentralkräften in abgeschlossenen Systemen der Drehimpuls \mathbf{L} erhalten ist. Dies liefert 3 weitere Integrale der Bewegungsgleichungen.

In einer Gesamtsicht der besprochenen Erhaltungssätze betrachten wir jetzt ein System, für das alle diese Erhaltungssätze gültig sind. Es waren für die Impulserhaltung Abgeschlossenheit, für die Energieerhaltung konservative innere Kräfte und für die Drehimpulserhaltung innere Zentralkräfte erforderlich. Wir betrachten daher jetzt ein abgeschlossenes System mit inneren Kräften $\mathbf{F}_{j \leftarrow k}$, die sowohl konservativ als auch Zentralkräfte sind:

$$\mathbf{F}_{j \leftarrow k} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{jk}} V_{(j,k)}(\mathbf{r}_{jk}), \quad \mathbf{F}_{j \leftarrow k} \parallel \mathbf{r}_{jk}, \quad (\mathbf{r}_{jk} \doteq \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k). \quad (7.37)$$

Wir fragen, was diese beiden Eigenschaften zusammen bedeuten. Mit analytischen Mitteln kann man diese Frage beantworten, indem man den Gradienten in Kugelkoordinaten schreibt:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (7.38)$$

Der Gradient eines Potentials $V(\mathbf{r})$ hat folglich nur eine radiale Komponente genau dann, wenn das Potential nicht von der Richtung des Vektors \mathbf{r} abhängt, also eine

Funktion allein des Betrages $r_{(jk)} \doteq |\mathbf{r}_{(jk)}|$ ist. Wegen der Identität $\partial r_{(jk)}/\partial \mathbf{r}_{(jk)} = \mathbf{r}_{(jk)}/r_{(jk)} = \mathbf{n}_{(jk)}$ (siehe Kapitel 4) erhalten wir dann

$$\mathbf{F}_{j \leftarrow k} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{(jk)}} V_{(j,k)}(r_{(jk)}) = -\frac{\partial V_{(j,k)}}{\partial r_{(jk)}} \cdot \mathbf{n}_{(jk)}. \quad (7.39)$$

Wir halten fest:

Konservative innere Zentralkräfte $\mathbf{F}_{j \leftarrow k}$ leiten sich aus einem Potential $V_{(j,k)}(r_{(jk)})$ ab, das nur vom Betrag des Relativvektors $r_{(jk)}$ abhängt.

Ein anschaulicheres geometrisches Verständnis für diesen Sachverhalt gewinnt man aus der Überlegung, daß unter den Annahmen (7.37) die Äquipotentialflächen, zu denen der Gradient des Potentials immer senkrecht steht, Kugeln sein müssen.

Für ein abgeschlossenes System mit inneren Kräften vom Typ (7.39) gelten also die folgenden Erhaltungssätze:

- (1) **Impulserhaltung** (wegen $\mathbf{F}_{j \leftarrow k} = -\mathbf{F}_{k \leftarrow j}$), sechs Integrale,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot t. \quad (7.40)$$

- (2) **Energieerhaltung** (wegen $\mathbf{F}_{j \leftarrow k} = -\partial V_{(j,k)}/\partial \mathbf{r}_{(jk)}$), ein Integral,

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} v_i^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} V_{(j,k)}(\mathbf{r}_{(jk)}). \quad (7.41)$$

- (2) **Drehimpulserhaltung** (wegen $V_{(j,k)} = V_{(j,k)}(r_{(jk)})$), drei Integrale,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \quad (7.42)$$

Wir haben damit insgesamt **10 Integrale** der Bewegungsgleichungen gewonnen.

Man wird nun die Frage stellen, warum wir genau 10 Integrale der Bewegungsgleichungen gewonnen haben. Wird man nicht durch genügendes Nachdenken weitere Integrale auffinden? Die Antwort auf diese Frage ist negativ, wenn man an allgemeine Integrale der obigen Art denkt. Dies wurde 1887 von Bruns und 1889 von Poincaré für das Dreikörperproblem gezeigt.

Warum es genau 10 allgemeine Integrale gibt, versteht man durch die Betrachtung der Invarianzeigenschaften eines abgeschlossenen Systems. Wir nehmen unter Verallgemeinerung von (6.2) Bewegungsgleichungen der Form

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n; t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (7.43)$$

an, die sich unter den folgenden Transformationen nicht ändern sollen:

- (1) **Zeittranslationen**, $t \rightarrow t + t_0$
($\iff \mathbf{F}_i$ hängt nicht von t ab)
- (2) **Raumtranslationen**, $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$
($\iff \mathbf{F}_i$ hängt nur von den Differenzen $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ ab)
- (3) **Galilei-Transformationen** (im engeren Sinne), $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_0 \cdot t$
($\iff \mathbf{F}_i$ hängt nur von den Differenzen $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k$ ab)
- (4) **Drehungen**, $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{D}\mathbf{r}_i$, $\mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{D}\mathbf{v}_i$

Für Kräfte vom Typ (7.39) haben die Bewegungsgleichungen die genannten Invarianzen.

Alle Transformationen, die sich durch Aneinanderreihung der obigen Transformationen ausführen lassen, lassen die Bewegungsgleichungen (7.43) unter den genannten Bedingungen für die Kräfte \mathbf{F}_i invariant. Führt man in der Menge dieser Transformationen das Hintereinanderausführen als Produktoperation ein, so bildet diese Menge eine Gruppe, die **inhomogene Galilei-Gruppe**, deren Elemente man **Galilei-Transformationen** (im weiteren Sinne) nennt. Die Eigenschaft des Systems (7.43), unter allen Transformationen der Galilei-Gruppe invariant zu sein, nennt man **Galilei-Invarianz**.

Man stellt nun fest, daß die oben aufgeführten Transformationen sich durch insgesamt 10 skalare Parameter charakterisieren lassen: t_0 , \mathbf{a} , \mathbf{v}_0 und die drei Parameter, durch die Drehungen parametrisiert werden (letzteres werden wir noch ausführlich beim starren Körper diskutieren). In mathematischer Terminologie ist die Galilei-Gruppe eine 10-parametrische kontinuierliche Gruppe. Es gibt nun einen allgemeinen Satz, das **Noethersche Theorem** (Emmy Noether, 1882-1935), nach dem eine m -parametrische Invarianzgruppe eines physikalischen Systems die gleiche Zahl von Erhaltungsgrößen zur Folge hat. Dieser Satz erklärt somit, warum wir es auf 10 Erhaltungsgrößen gebracht haben. Wir werden hier das Noethersche Theorem nicht in seiner Allgemeinheit formulieren, sondern seine Schlußweise anhand eines einfachen Beispiels demonstrieren. In Kapitel 11 werden wir jedoch auf dieses Theorem zurückkommen.

Wir betrachten das System (7.43) von Bewegungsgleichungen unter der Annahme, daß die Kräfte sich aus einem geschwindigkeits- und zeitunabhängigen Potential herleiten lassen:

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n). \quad (7.44)$$

Dieses Potential soll zunächst eine völlig allgemeine Funktion seiner n vektoriellen Variablen sein. Es muß sich insbesondere nicht aus einem äußeren Potential und inneren Zweikörperpotentialen zusammensetzen. Wir gehen mit (7.44) also deutlich über die bisher behandelten Fälle hinaus. Ein solch allgemeines Potential ist tatsächlich nicht nur von hypothetischem Interesse, sondern ergibt sich zum Beispiel als effektives Potential, in dem sich die Atomkerne eines Moleküls bewegen, wenn man die Quantenmechanik der Elektronen in der sogenannten adiabatischen Näherung behandelt.

Ein Impulserhaltungssatz gilt mit (7.44) natürlich nicht, da V ja zum Beispiel äußere Kräfte enthalten könnte. Wir machen jetzt die zusätzliche Annahme der **Translationsinvarianz** für V :

$$V(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{r}_n + \mathbf{a}) = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n). \quad (7.45)$$

Diese Forderung beinhaltet im übrigen gleichzeitig die Galilei-Invarianz (im engeren Sinne), weil die Bewegungsgleichungen damit invariant unter allen zeitabhängigen Verschiebungen der Form $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot t$ sind. Für Mehrkörperkräfte, die in (7.44) enthalten sein können, kann ein Reaktionsprinzip (2.2, 6.4) nicht formuliert werden. Die Translationsinvarianz ersetzt in dem hier vorliegenden Fall das Reaktionsprinzip. Mit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \\ &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} V(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{r}_n + \mathbf{a}) \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{0}} = 0 \end{aligned} \quad (7.46)$$

folgt aus (7.45) die Impulserhaltung. Dies ist ein typisches Beispiel für die Aussage des Noetherschen Theorems.

Wenn man aus dem allgemeinen Potential (7.44) auf Drehimpulserhaltung schließen möchte, ist der Begriff Zentralpotential durch die Eigenschaft der **Rotationsinvarianz** zu ersetzen, die für alle Drehungen \mathbf{D} die Beziehung

$$V(\mathbf{D}\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{D}\mathbf{r}_n) = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (7.47)$$

fordert. Wir werden die Drehungen \mathbf{D} im Zusammenhang mit den starren Körpern noch ausführlich besprechen und werden dann in der Lage sein, ähnlich mühelos von der Rotationsinvarianz auf die Erhaltung des Drehimpulses zu schließen wie oben von der Translationsinvarianz auf die Erhaltung des Impulses (siehe auch Kapitel 11).

8. Zweikörperproblem und -streuung

In diesem Kapitel werden wir das allgemeine Zweikörperproblem besprechen. Zunächst wollen wir untersuchen, welche Konsequenzen die Ergebnisse des letzten Kapitels für ein Zweikörpersystem haben, das durch Bewegungsgleichungen vom Typ (7.43, 7.44, 7.45, 7.47) beschrieben wird. Es gelte also

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \quad (i = 1, 2) \quad (8.1)$$

mit einer inneren Kraft der Gestalt

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (8.2)$$

Von den 12 für die vollständige Lösung erforderlichen Zeitintegrationen werden 10 durch die Erhaltungssätze geliefert. Es zeigt sich, daß die letzten beiden immer leicht durch zwei weitere Integrationen erhalten werden.

Tatsächlich erlaubt die Impulserhaltung eine elementare Zurückführung des Zweikörperproblems auf ein Einkörperproblem. Wir wissen nämlich, wie die **Bewegung des Massenmittelpunktes**

$$\mathbf{R} \doteq \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (8.3)$$

aussieht. Sie erfolgt nach (7.7) geradlinig gleichförmig:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 \cdot t. \quad (8.4)$$

Es liegt nun nahe, die **Relativbewegung** der beiden Massenpunkte zu studieren, die durch den Vektor

$$\mathbf{r} \doteq \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (8.5)$$

beschrieben wird. Mit $\mathbf{r}(t)$ würde man die Bewegung der beiden Massenpunkte vollständig kennen, weil man (8.3) und (8.5) eindeutig nach \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 auflösen kann mit dem Ergebnis

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (8.6)$$

Indem man $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = -\text{grad } V(r)$ benutzt, erhält man aus den Bewegungsgleichungen (8.1) für den Relativvektor die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m_1} \mathbf{F}_1 - \frac{1}{m_2} \mathbf{F}_2 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \text{grad } V(r). \quad (8.7)$$

Mit der **reduzierten Masse** μ , die durch

$$\frac{1}{\mu} \doteq \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (8.8)$$

definiert ist, schreibt sich diese Bewegungsgleichung schließlich als

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } V(r). \quad (8.9)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes der Masse μ in einem konservativen Zentralkraftfeld. Die Lösung solcher Probleme ist uns aus Kapitel 4 geläufig.

An dieser Stelle wollen wir kurz auf das 3. Keplersche Gesetz (4.25) zurückkommen, das wir in Kapitel 4 unter der Annahme einer unendlichen Sonnenmasse formuliert hatten. Wir können es jetzt mit der Kraftkonstanten $k = G m_1 m_2$ präziser folgendermaßen angeben:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{k} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \quad (8.10)$$

Das Verhältnis T^2/a^3 ist also nur insoweit für alle Planeten gleich, als ihre Masse m_1 gegenüber der Sonnenmasse m_2 vernachlässigt werden kann. Da die Masse des massivsten Planeten Jupiter etwa tausendmal geringer als die Sonnenmasse ist, liegt die Varianz der Konstanten im 3. Keplerschen Gesetz für das Sonnensystem im Bereich 10^{-3} .

Nach Gleichung (8.6) vollführen beide Körper zur Relativbewegung $\mathbf{r}(t)$ im geometrischen Sinne ähnliche, mit den Faktoren $m_2/(m_1 + m_2)$ und $-m_1/(m_1 + m_2)$ skalierte Bewegungen um den Massenmittelpunkt. Dabei ist die Bewegung des massiveren Körpers stärker gestaucht als die des weniger massiven. Anhand des Massenverhältnisses $m_J/m_S = 0,00095$, des Abstandes $D_{J-S} = 779 \cdot 10^6$ km und des Sonnenradius $R_S = 696 \cdot 10^3$ km schätzt man leicht ab, daß der Massenmittelpunkt des Sonnensystems immer in unmittelbarer Nähe der Sonne liegt. Periodische Schwankungen der Position der Sonne lassen auf die Existenz der Planeten schließen. Die Beobachtung solcher Schwankungen bei Fixsternen liefert die bisher einzige Methode zum Nachweis ihrer Planeten.

Bei der Lösung der Gleichung (8.9) wird man eine Energie und einen Drehimpuls als formale Integrationskonstanten erhalten. Wir werden natürlich an der genauen physikalischen Bedeutung dieser Konstanten interessiert sein und stellen daher die folgende Vorbetrachtung an. Aus (8.6) entnehmen wir die vom Massenmittelpunkt aus gerechneten Ortsvektoren der beiden Massenpunkte, $\mathbf{r}'_1 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \mathbf{r}$, und können damit die innere kinetische Energie (siehe (7.24)) und den inneren Drehimpuls (siehe (7.33)) des Zweikörpersystems ausrechnen. Wir erhalten mit $M \doteq m_1 + m_2$

$$T^{(i)} = \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} v_2'^2 = \frac{m_1}{2} \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 v^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} v^2 = \frac{\mu}{2} v^2 \quad (8.11)$$

und

$$\mathbf{L}^{(i)} = m_1 \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{v}'_2 = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (8.12)$$

Die beiden zu (8.9) gehörigen Erhaltungssätze können wir deshalb jetzt mit den in (8.11) und (8.12) berechneten Größen als

$$\frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = T^{(i)} + V^{(i)} = E^{(i)} \quad (8.13)$$

und

$$\mu r^2\dot{\varphi} = L^{(i)} \quad (8.14)$$

schreiben, wo $L^{(i)}$ die Komponente des Drehimpulses senkrecht zur Bahnebene der inneren Bewegung ist. Aus diesen beiden ersten Integralen der Bewegungsgleichung (8.9) leiten wir dann in völliger Analogie zu Kapitel 4 die Bahngleichung ab (siehe (4.16)) und erhalten mit $u(\varphi) = \frac{1}{r}$

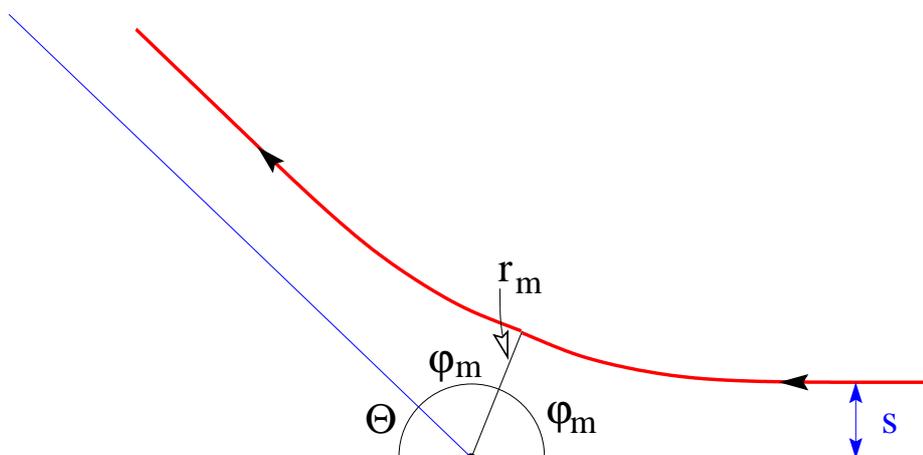
$$\frac{L^{(i)2}}{2\mu}(u'^2 + u^2) + V\left(\frac{1}{u}\right) = E^{(i)}. \quad (8.15)$$

Wir werden diese Gleichung in der Form

$$\frac{d\varphi}{du} = \left[\frac{2\mu}{L^{(i)2}} \left(E^{(i)} - V\left(\frac{1}{u}\right) \right) - u^2 \right]^{-1/2} \quad (8.16)$$

weiterverwenden.

Wir haben oben die Lösung des Problems der Relativbewegung noch einmal in allen Einzelheiten angegeben, weil wir sie im folgenden auf das Problem der **Streuung** zweier Massenpunkte aneinander anwenden wollen. Die Streuung von Teilchen aneinander ist eine sehr wichtige Methode zur experimentellen Bestimmung von Wechselwirkungen, zum Beispiel in der Atom- und Elementarteilchenphysik. Sie stellt dort eine unverzichtbare Ergänzung zur Beobachtung gebundener Bahnen dar, aus der wir hier bisher die Potentiale bestimmt haben, weil man mit der Streuung große Abstandintervalle des Potentials überstreichen kann. Ein Streuvorgang ist eine Bewegung, bei der die Teilchen aus großer Entfernung kommend einander nahekommen und sich nach der gegenseitigen Beeinflussung wieder voneinander entfernen. Die Relativbewegung kann dann zum Beispiel wie in der folgenden Figur gezeichnet aussehen.



Die vorstehende Figur gibt qualitativ die Bahn für ein abstoßendes Potential wieder, für das der Abstand r bis zu einem Minimalwert r_m abnimmt, der beim Polarwinkel φ_m erreicht wird. Danach wächst r wieder an, wobei dieser zweite Bahnabschnitt aus dem ersten durch Spiegelung hervorgeht. Mit der Anfangsbedingung $\varphi(u=0) = 0$ erhält man durch Integration von (8.16) und mit $u_m = 1/r_m$

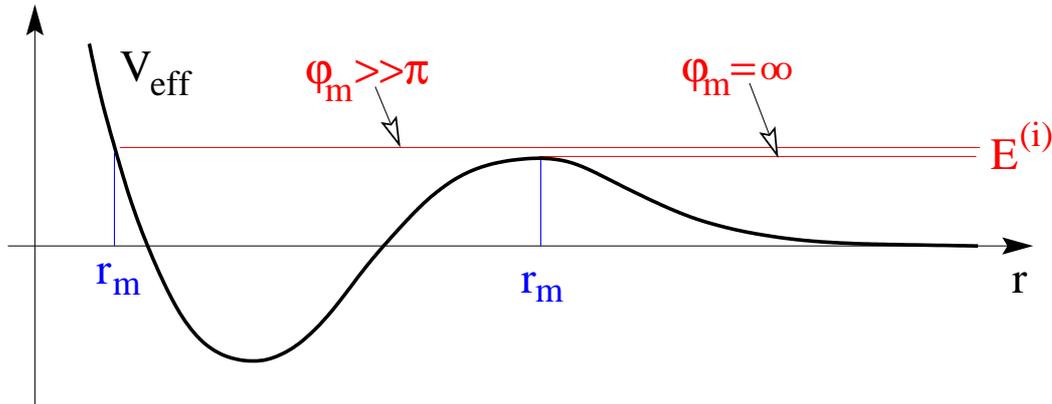
$$\varphi_m = \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu}{L^{(i)2}} (E^{(i)} - V(\frac{1}{u})) - u^2}}. \quad (8.17)$$

Hier ist u_m die Nullstelle der Wurzel im Nenner, an der nach (8.16) $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ gilt, also r minimal und u maximal ist.

Für abstoßende Potentiale gilt immer $\varphi_m \leq \pi/2$, so daß das in der Figur gezeigte Verhalten typisch ist. Tatsächlich kann man dieses aus der Anschauung gewonnene Ergebnis leicht auch rechnerisch bestätigen. Mit $-\frac{dV}{dr} \geq 0$ (und $V(\infty) = 0$) gilt ja $0 < V(r) \leq V(r_m)$ für $r \geq r_m$ oder $V(\frac{1}{u}) \leq V(\frac{1}{u_m})$ für $u \leq u_m$ und daher

$$\varphi_m \leq \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu}{L^{(i)2}} (E^{(i)} - V(\frac{1}{u_m})) - u^2}} = \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{u_m^2 - u^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}. \quad (8.18)$$

Bei nicht durchweg abstoßenden Potentialen kann der Winkel φ_m beliebig groß werden. Dies ist anhand der folgenden Figur leicht einzusehen, wenn man sich an die Diskussion eindimensionaler Bewegungen in Kapitel 3 und an die Zurückführung von Bewegungen im Zentralpotential auf eindimensionale Bewegungen in Kapitel 4 mit Hilfe des effektiven Potentials (4.14) erinnert. Wenn die innere Energie $E^{(i)}$ gleich einem Maximum des Potentials ist, divergiert das Integral (8.17) und der Winkel φ_m ist unendlich groß. Für leicht höhere Energien kann dann φ_m beliebig groß sein und die Teilchen kreisen beliebig oft umeinander, bevor sie sich wieder voneinander entfernen. In der Streutheorie nennt man eine solche Erscheinung **Resonanz**.



Wir verfolgen jetzt den Fall abstoßender Potentiale weiter. (Bei anziehenden Potentialen würden im folgenden einige Vorzeichen zu ändern sein.) Als **Streuwinkel** bezeichnet man den in der vorletzten Figur eingezeichneten Ablenkwinkel

$$\Theta \doteq \pi - 2\varphi. \quad (8.19)$$

Bei atomaren Streuprozessen ist nicht die gesamte Bewegung beobachtbar, sondern nur der Streuwinkel. Der Streuwinkel hängt nach den Gleichungen (8.17) und (8.19) von der inneren Energie und vom inneren Drehimpuls des Systems ab. Die innere Energie des Systems ist durch die Relativgeschwindigkeit der beiden Teilchen vorgegeben. Man schießt typischerweise bei ruhendem **Streuzentrum** (“**target**”) das zu streuende Teilchen mit der Geschwindigkeit v_a aus großem Abstand ($V(r) = 0$) auf das Streuzentrum und gibt dem System damit die innere Energie

$$E^{(i)} = \frac{\mu}{2} v_a^2, \quad (8.20)$$

die während des Streuvorgangs ja erhalten bleibt. Der innere Drehimpuls jedoch hängt vom **Stoßparameter** s ab,

$$L^{(i)} = \mu s v_a, \quad (8.21)$$

und kann bei atomarer Größenordnung von s nicht vorgegeben werden. Aus diesem Grunde ist man bei Streuexperimenten auf statistische Aussagen angewiesen. Der Streuwinkel Θ ist zwar eindeutig bestimmt durch den Stoßparameter s (und die fest vorgegebene Geschwindigkeit v_a),

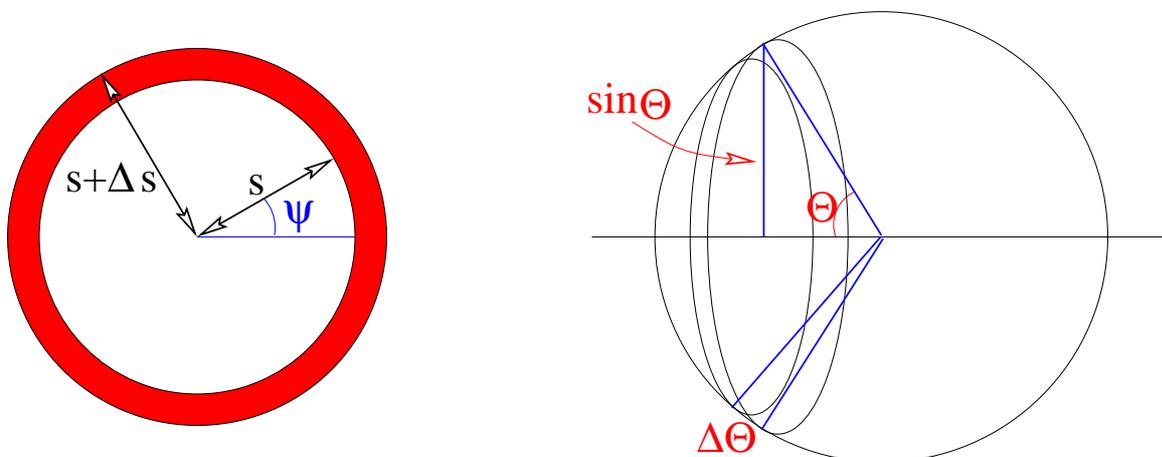
$$\Theta = \Theta(s), \quad (8.22)$$

aber wir können den Wert von s nicht kontrollieren. Man nimmt daher an und führt das Experiment so durch, daß ein **homogener Strom** von Streuteilchen der Geschwindigkeit v_a auf das Streuzentrum trifft. Dieser Strom habe die Intensität (Stromdichte) I , die folgendermaßen definiert ist:

Die Stromdichte I ist die Zahl N der in der Zeit t durch eine Fläche F (senkrecht zur Stromrichtung) tretenden Teilchen dividiert durch die Zeit t und die Fläche F , $I = \frac{N}{t \cdot F}$.

Die Stromdichte hat die Dimension $1/\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}$. Die Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit mit Stoßparametern zwischen s und $s + \Delta s$ auf das Streuzentrum treffen, ist dann gleich

$$\Delta n(s) = I \cdot 2\pi s \Delta s. \quad (8.23)$$



Alle diese Teilchen werden Streuwinkel zwischen $\Theta(s)$ und $\Theta(s + \Delta s) = \Theta(s) + \Delta\Theta$ haben. (Für abstoßende Potentiale ist $\Delta\Theta$ negativ, wenn Δs positiv ist.) Wir bezeichnen den anhand der Polarwinkel Θ und ψ von der Strahlrichtung aus gemessenen Raumwinkel als $\Omega = (\Theta, \psi)$. Damit definieren wir nunmehr den **differentiellen Streuquerschnitt** $\sigma(\Omega)$ folgendermaßen:

Der differentielle Streuquerschnitt $\sigma(\Omega)$ ist gleich der Zahl der pro Zeiteinheit in ein Raumwinkelelement $\Delta\Omega$ um den Raumwinkel Ω gestreuten Teilchen dividiert durch $\Delta\Omega$ und die Intensität I des einfallenden Teilchenstroms.

Der differentielle Streuquerschnitt hat die Dimension einer Fläche.

Für unser zentralsymmetrisches Potential hängt der Streuquerschnitt nicht vom Winkel ψ ab, $\sigma = \sigma(\Theta)$, und der Raumwinkel, in den die oben genannten $\Delta n(s)$ Teilchen gestreut werden, ist durch $\Delta\Omega = 2\pi \sin\Theta \cdot (-\Delta\Theta)$ gegeben. Daher gilt nach der obigen Definition des Streuquerschnitts

$$\Delta n(s) = I \cdot \sigma(\Theta) \cdot \Delta\Omega = -2\pi I \sigma(\Theta) \sin\Theta \cdot \Delta\Theta. \quad (8.24)$$

Aus den Gleichungen (8.23) und (8.24) erhalten wir im Limes $\Delta s \rightarrow 0$ die Formel

$$\sigma(\Theta) = -\frac{s}{\sin\Theta} \cdot \frac{ds}{d\Theta} \quad (8.25)$$

für den differentiellen Streuquerschnitt. In dieser einfachen Form gilt die Formel (8.25) für abstoßende Potentiale, bei denen die Beziehung zwischen dem Streuwinkel Θ und dem Stoßparameter s monoton (fallend) ist. Bei nicht monotonem Verlauf von $\Theta(s)$, wenn $\Theta(s_n) = \Theta$ mehrere Lösungen s_n hat, muß über alle diese Lösungen summiert werden und man erhält die allgemeinere Formel

$$\sigma(\Theta) = \sum_n \frac{s_n}{\sin\Theta} \cdot \left| \frac{ds_n}{d\Theta} \right|. \quad (8.26)$$

Wir wollen nun den Streuquerschnitt für den speziellen Fall zweier elektrisch geladener Teilchen mit den Ladungszahlen z_1 und z_2 berechnen, die miteinander über das **Coulombpotential**

$$V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} \quad (8.27)$$

wechselwirken. Um die funktionale Beziehung zwischen dem Stoßparameter s und dem Streuwinkel Θ zu berechnen, untersuchen wir die Wurzel in der Gleichung (8.17):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2\mu E^{(i)}}{L^{(i)2}} - 2\frac{\mu z_1 z_2 e^2}{L^{(i)2}} u - u^2} &\doteq \sqrt{\beta - 2\alpha u - u^2} = \sqrt{\beta + \alpha^2 - (u + \alpha)^2} \\ &= \sqrt{(\beta + \alpha^2)(1 - x^2)} \quad \text{mit} \quad x \doteq \frac{u + \alpha}{\sqrt{\beta + \alpha^2}}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Indem wir die hier definierte neue Integrationsvariable x in (8.17) substituieren, erhalten wir das Resultat

$$\varphi_m = \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{\beta+\alpha^2}}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{\frac{\alpha}{\sqrt{\beta+\alpha^2}}}^1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{\beta+\alpha^2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}. \quad (8.29)$$

Wegen (8.19) entnehmen wir daraus die einfache Relation

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta+\alpha^2}} \quad \text{oder} \quad \text{ctg}^2 \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} - 1 = \frac{\beta}{\alpha^2} = \left(\frac{v_a L^{(i)}}{z_1 z_2 e^2} \right)^2 \quad (8.30)$$

oder, indem wir die Wurzel ziehen und (8.21) benutzen, schließlich

$$s = \frac{|z_1 z_2| e^2}{\mu v_a^2} \cdot \text{ctg} \frac{\Theta}{2}. \quad (8.31)$$

Durch Einsetzen dieser Relation in die Formel (8.21) für den differentiellen Streuquerschnitt erhalten wir somit den berühmten **Rutherford'schen Streuquerschnitt**

$$\sigma(\Theta) = \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{2\mu v_a^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} \quad (8.32)$$

für die Coulombstreuung, ursprünglich abgeleitet für die Streuung von α -Teilchen an Atomkernen und historisch bedeutsam für die Aufklärung der räumlichen Struktur von Atomen. Man beachte die starke Divergenz $\sigma \propto \Theta^{-4}$ dieses Streuquerschnitts bei kleinen Streuwinkeln $\Theta \rightarrow 0$. Sie resultiert aus der langen Reichweite des Coulombpotentials, die dafür verantwortlich ist, daß Teilchen mit beliebig großen Stoßparametern sehr kleine, aber nicht verschwindende Streuwinkel besitzen.

Erwähnt sei auch der Begriff des **totalen Streuquerschnitts** oder **Wirkungsquerschnitts** σ_{total} :

Der totale Streuquerschnitt σ_{total} ist gleich der Zahl der pro Zeiteinheit gestreuten Teilchen dividiert durch die Intensität des einfallenden Teilchenstroms und damit gleich der Querschnittsfläche senkrecht zum Teilchenstrom, aus der Teilchen überhaupt gestreut werden.

Für Potentiale, die erst bei unendlich großem Abstand der Teilchen verschwinden und die daher alle Teilchen (mit beliebigem Stoßparameter) streuen, ist der Wirkungsquerschnitt immer unendlich groß. Für Potentiale endlicher Reichweite, die ab einem Abstand $r = a$ verschwinden ($V(r) = 0$ für $r > a$), hat der Wirkungsquerschnitt offenbar den Wert

$$\sigma_{\text{total}} = \pi a^2. \quad (8.33)$$

Durch Vergleich mit der Definition des differentiellen Streuquerschnitts ergibt sich, daß der totale Querschnitt gleich dem Raumwinkelintegral

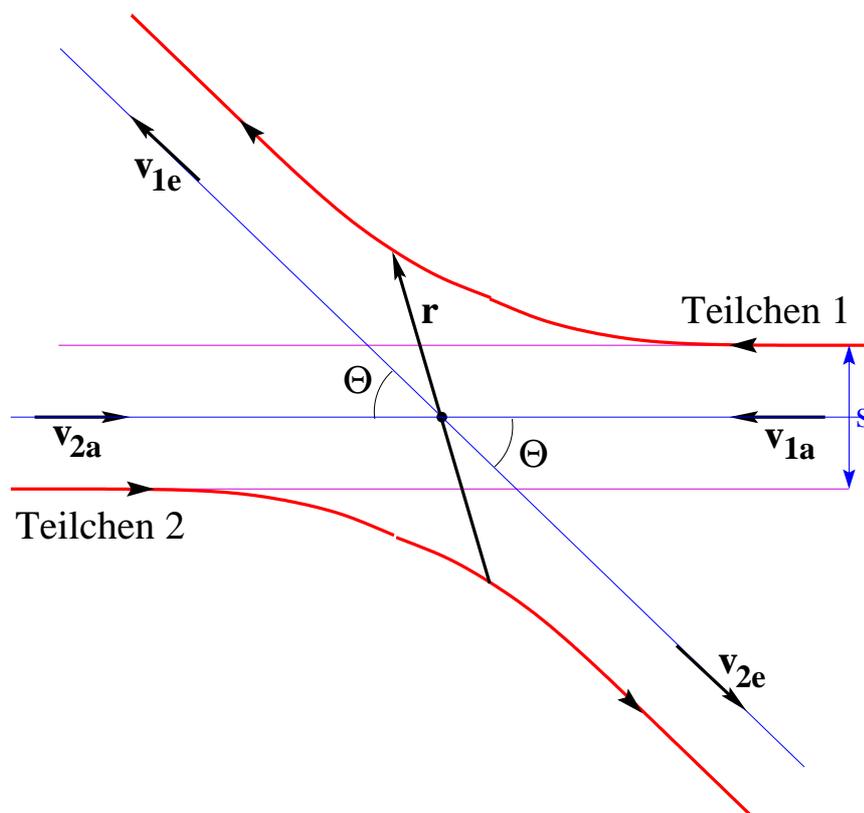
$$\sigma_{\text{total}} = \iint \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta \quad (8.34)$$

über den differentiellen Querschnitt ist. Durch Einsetzen der Formel (8.25) in (8.34) bestätigt man für Potentiale endlicher Reichweite mittels

$$\sigma_{\text{total}} = 2\pi \int_0^\pi (-s(\Theta)) \cdot \frac{ds}{d\Theta} d\Theta = 2\pi \int_0^a s ds = \pi a^2 \quad (8.35)$$

leicht die Formel (8.33).

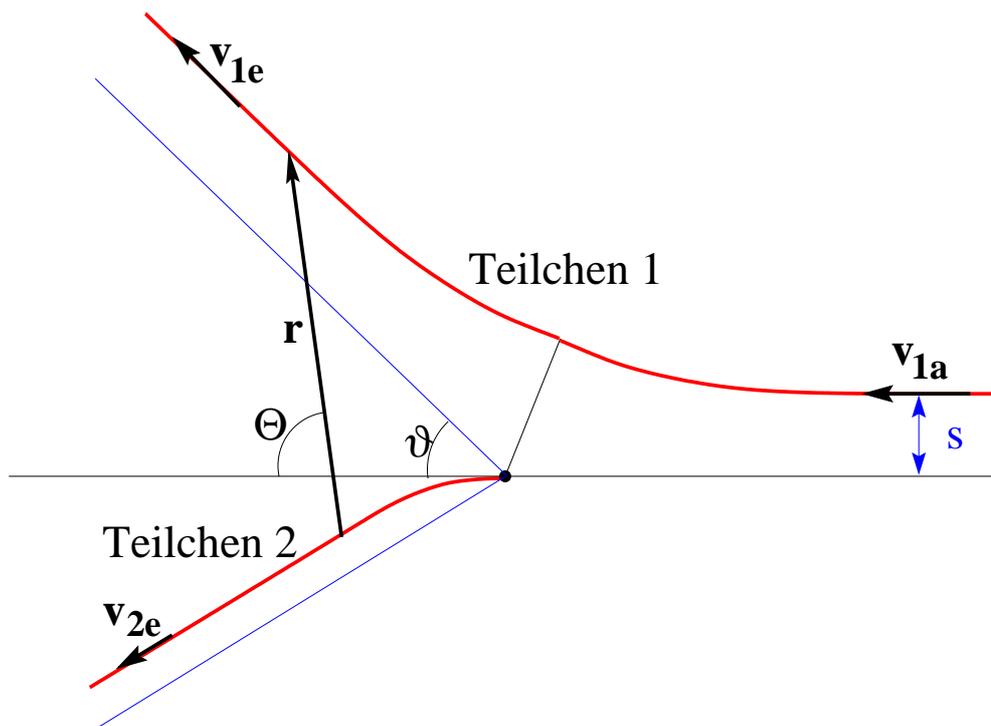
Da für mechanische Probleme auf atomaren Längenskalen im allgemeinen nicht die klassische Mechanik, sondern die Quantenmechanik zuständig ist, kann man fragen, inwieweit die obige klassische Analyse von Streuquerschnitten relevant ist. Sie werden in der Quantenmechanikvorlesung lernen, daß der quantenmechanische differentielle Streuquerschnitt für die Coulombstreuung (erstaunlicherweise) mit dem in (8.32) angegebenen klassischen exakt übereinstimmt. Dies ist jedoch ein Sonderfall. Im allgemeinen unterscheiden sich klassische und quantenmechanische Streuquerschnitte durchaus. Insbesondere ist der totale Streuquerschnitt bei quantenmechanischer Streuung endlich nicht nur für Potentiale endlicher Reichweite, sondern für alle Potentiale, die bei großen Abständen genügend stark (stärker als r^{-2}) abfallen.



Wir haben oben den Streuprozess anhand der Relativbewegung von Streuteilchen und Streuzentrum diskutiert. Der dabei aufgetretene Streuwinkel Θ ist derjenige Winkel, um den die Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} während des Streuprozesses gedreht wird. Anhand von Gleichung (8.6) und der vorstehenden Figur, die die Bewegung beider Teilchen im **Massenmittelpunktsystem** darstellt, erkennt man, daß in diesem Inertialsystem beide Teilchen um den Streuwinkel Θ aus ihrer ursprünglichen Bewegungsrichtung abgelenkt werden.

Das **Laborsystem**, in dem bei Experimenten der Streuvorgang beobachtet wird, stimmt in den seltensten Fällen mit dem Massenmittelpunktsystem überein. In vielen Fällen ruht das Streuzentrum (Teilchen 2) vor dem Streuprozess und das Streuteilchen (Teilchen 1) wird mit der Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_{1a} auf das ruhende Streuzentrum geschossen. Daher bewegt sich der Massenmittelpunkt im Laborsystem mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{1a} = \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_{1a}. \quad (8.36)$$

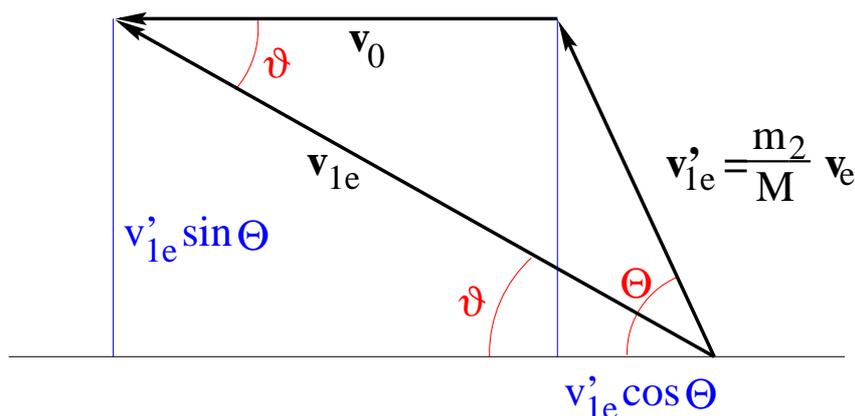


Während des Streuvorgangs wird nun, wie in der vorstehenden Figur gezeichnet, das Teilchen 2 (Streuzentrum) beschleunigt. Deshalb wird das Streuteilchen im Laborsystem um einen anderen Winkel ϑ als die Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} , die um den Streuwinkel Θ gedreht wird. Die Bestimmung der Beziehung zwischen diesen beiden Winkeln ist ein rein kinematisches Problem, zu dessen Lösung wir die Beziehung

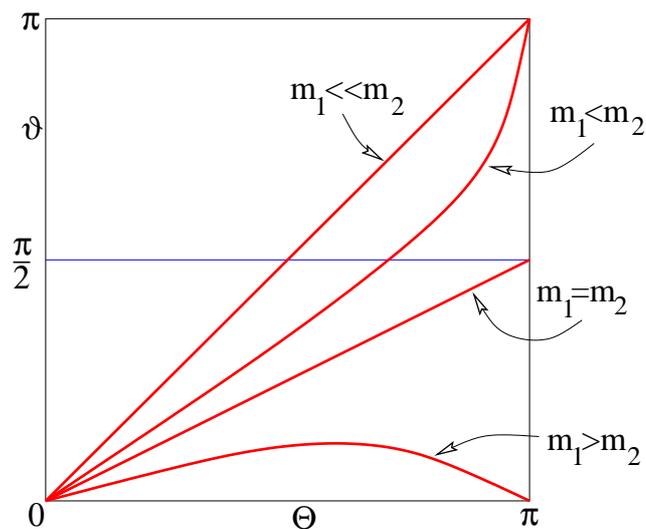
$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_0 + \frac{m_2}{M} \mathbf{v} \quad (8.37)$$

aus Gleichung (8.6) heranziehen. Nach dem Streuprozess, wenn die potentielle Energie wieder verschwindet ($V(r) = 0$), gilt wegen der Erhaltung der inneren Energie $|\mathbf{v}_e| = v_{1a}$ und daher $|\mathbf{v}'_{1e}| = \frac{m_2}{M} v_{1a}$ oder mit (8.36) schließlich die Beziehung $v_0/v'_{1e} = m_1/m_2$, die wir in Gleichung (8.38) benutzen werden. Die Vektoren \mathbf{v}_{1e} und \mathbf{v}_e schließen dann (d.h. nach dem Streuprozess) mit der Streuachse (der Richtung von \mathbf{v}_{1a}) die beiden Winkel ϑ und Θ ein. Anhand der folgenden Figur, die die geometrische Anordnung der Vektoren in (8.37) zeigt, erhalten wir nunmehr das Ergebnis

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v'_{1e} \sin \Theta}{v'_{1e} \cos \Theta + v_0} = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \frac{m_1}{m_2}}. \quad (8.38)$$



Die funktionale Beziehung zwischen den beiden Streuwinkeln ϑ und Θ ist in der folgenden Figur für verschiedene Massenverhältnisse veranschaulicht. Für sehr massive Streuzentren, $m_2 \gg m_1$, spielt die Bewegung des Streuzentrums offenbar keine große Rolle und es gilt $\vartheta \approx \Theta$. Für gleiche Massen, $m_1 = m_2$, ist die rechte Seite von Gleichung (8.38) gleich $\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}$ und es gilt die einfache Beziehung $\vartheta = \Theta/2$. Weiterhin macht man sich leicht klar, daß für $m_1 < m_2$ der Streuwinkel im Laborsystem immer monoton mit dem Streuwinkel im Massenmittelpunktsystem von 0 auf π anwächst. Für $m_1 > m_2$ erreicht ϑ jedoch nie den Wert $\pi/2$ und fällt für $\Theta \rightarrow \pi$ wieder auf $\vartheta = 0$ ab.



Im Falle $m_1 \leq m_2$ ist ϑ also eine monotone Funktion von Θ und jedem Intervall $\Delta\vartheta$ entspricht ein eindeutiges Intervall $\Delta\Theta$, in das die Teilchen in den beiden verschiedenen Inertialsystemen gestreut werden. Wenn wir den differentiellen Streuquerschnitt im Laborsystem mit $\sigma_L(\vartheta)$ bezeichnen, gilt nach Gleichung (8.24) die Teilchenzahlbilanz

$$2\pi I\sigma_L(\vartheta) \sin\vartheta \Delta\vartheta = 2\pi I\sigma(\Theta) \sin\Theta \Delta\Theta. \quad (8.39)$$

Die Beziehung zwischen den differentiellen Streuquerschnitten im Labor- und im Massenmittelpunktsystem ist deshalb durch

$$\sigma_L(\vartheta) = \sigma(\Theta) \frac{d \cos \Theta}{d \cos \vartheta} \quad (8.40)$$

gegeben. Für die Rutherfordstreuung von α -Teilchen an Heliumatomen ($m_1 = m_2$) erhält man danach zum Beispiel, wenn man den Vorfaktor auf der rechten Seite von Gleichung (8.32) mit σ_0 abkürzt, wegen $\vartheta = \Theta/2$

$$\sigma_L(\vartheta) = \sigma_0 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} \cdot \frac{\sin \Theta}{\sin \vartheta} \cdot 2 = 4 \sigma_0 \cdot \frac{\cos \vartheta}{\sin^4 \vartheta} \quad (0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}). \quad (8.41)$$

Das α -Teilchen wird höchstens um den Winkel $\pi/2$ abgelenkt und wird niemals zurückgestreut.

Für $m_1 > m_2$ muß man in der (8.39) entsprechenden Bilanzgleichung wegen der nicht monotonen Beziehung zwischen ϑ und Θ für jedes $\Delta\vartheta$ über die beiden zugehörigen $\Delta\Theta$ -Intervalle summieren, weil es genau zwei Winkel $\Theta_1(\vartheta)$ und $\Theta_2(\vartheta)$ gibt. Statt (8.40) erhält man dann die Formel

$$\sigma_L(\vartheta) = \sigma(\Theta_1) \frac{d \cos \Theta_1}{d \cos \vartheta} - \sigma(\Theta_2) \frac{d \cos \Theta_2}{d \cos \vartheta}. \quad (8.42)$$

Je größer das Massenverhältnis m_1/m_2 ist, um so kleiner ist der maximale Streuwinkel ϑ_{\max} im Laborsystem und um so stärker ist die Streuung in Vorwärtsrichtung fokussiert. Der Streuquerschnitt σ_L divergiert nach Gleichung (8.42) für den maximalen Streuwinkel ϑ_{\max} .

Im Laborsystem hat das Streuteilchen nach dem Streuprozess einen Teil seiner ursprünglichen kinetischen Energie an das Streuzentrum abgegeben. Man entnimmt für die Geschwindigkeit des Streuteilchens nach dem Stoß v_{1e} aus der vorletzten Figur mittels des Cosinussatzes die Gleichung

$$v_{1e}'^2 = v_{1e}^2 + v_0^2 - 2v_{1e}v_0 \cos \vartheta, \quad (8.43)$$

aus der man mittels $v_0 = \frac{m_1}{M} v_{1a}$ (siehe (8.36)) und der vor Gleichung (8.38) schon einmal abgeleiteten Relation $v_{1e}' = \frac{m_2}{M} v_{1a}$ die quadratische Gleichung

$$\left(\frac{v_{1e}'}{v_{1a}}\right)^2 - 2\frac{m_1}{M}\left(\frac{v_{1e}'}{v_{1a}}\right) \cos \vartheta + \frac{m_1 - m_2}{M} = 0 \quad (8.44)$$

für das Verhältnis v_{1e}/v_{1a} erhält. Im Spezialfall gleicher Massen $m_1 = m_2$ entnimmt man daraus die einfache Lösung

$$\frac{v_{1e}}{v_{1a}} = \cos \vartheta. \quad (8.45)$$

Diese Gleichung stimmt mit der Beobachtung überein, nach der das Streuteilchen beim zentralen Stoß (Stoßparameter $s = 0$ und $\vartheta = \pi/2$) seine gesamte kinetische Energie an das Streuzentrum abgibt.

Die obigen Überlegungen kann man für die Berechnung des mittleren Energieverlustes bei Streuprozessen nutzen, zum Beispiel bei der Streuung von Reaktorneutronen am Moderator. Man hat dazu unter Benutzung des differentiellen Streuquerschnitts $\sigma_L(\vartheta)$ das Verhältnis der kinetischen Energien $T_{1e}/T_{1a} = (v_{1e}/v_{1a})^2$ über alle Streuwinkel zu mitteln.

Für die Analyse von Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen bei kurzen Abständen braucht man große innere Energien $E^{(i)}$, da der kleinste erreichbare Abstand (bei repulsiven Potentialen) durch die Beziehung $E^{(i)} = V(r_{\min})$ ($L^{(i)} = 0$) gegeben ist. Zur Erreichung möglichst großer $E^{(i)}$ ist es nachteilig, das Streuzentrum im Laborsystem ruhen zu lassen. Um dies zu verstehen, betrachten wir als Beispiel den Stoß zweier Teilchen gleicher Masse $m_1 = m_2 = m$ und nehmen an, wir seien in der Lage, die Teilchen im Laborsystem maximal auf die Geschwindigkeit v_a zu bringen, ihnen also die maximale kinetische Energie $E = \frac{m}{2} v_a^2$ zu geben. Wir wollen die dadurch erzielbare innere Energie bei zwei verschiedenen Streuexperimenten vergleichen:

- (1) ein Teilchen ruht im Labor, das andere erhält die kinetische Energie E ,
- (2) beide Teilchen werden mit der Geschwindigkeit v_a aufeinander geschossen.

Die bei diesen Experimenten erzielten inneren Energien sind

$$\begin{aligned} E_1^{(i)} &= \frac{\mu}{2} v_a^2 = \frac{m}{4} v_a^2 = \frac{1}{2} E, \\ E_2^{(i)} &= \frac{m}{4} (2v_a)^2 = 2E = 4E_1^{(i)}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Im zweiten Experiment erreicht man also die vierfache innere Energie. Dies macht verständlich, warum man in den Hochenergielabors Teilchen in Speicherringen zur Kollision bringt, indem man sie gegensinnig umlaufen läßt. Auch für die geplanten Linearbeschleuniger der nächsten Generation ist diese Art der Versuchsanordnung unerläßlich. Tatsächlich wird bei hohen Geschwindigkeiten, wenn die Bewegung mittels der relativistischen Mechanik beschrieben werden muß, das Experiment mit ruhendem Streuzentrum noch weit schlechter abschneiden, weil (8.46) dann folgendermaßen zu modifizieren ist (c ist die Lichtgeschwindigkeit):

$$\begin{aligned} E_1^{(i)} &= \frac{E}{\sqrt{1 + \frac{E}{2mc^2} + 1}}, \\ E_2^{(i)} &= 2E. \end{aligned} \quad (8.47)$$

9. Eingeschränkte Bewegungen

In diesem Abschnitt behandeln wir Methoden zur Beschreibung von Punktsystemen, deren Massenpunkte **Zwangsbedingungen** unterliegen. Wir werden erkennen, daß viele der Konzepte aus dem Kapitel 5, in dem wir eingeschränkte Bewegungen eines einzelnen Massenpunktes betrachtet haben, sich in offener Weise verallgemeinern lassen. Wie dort schon diskutiert, rufen Zwangsbedingungen **Zwangskräfte** hervor, die zunächst nicht bekannt sind. Anstelle der Bewegungsgleichung (5.2) erhalten wir hier für ein System von n Massenpunkten die n Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9.1)$$

Im folgenden werden wir eine Notation verwenden, die diese n Gleichungen in eine einzige Gleichung zusammenfaßt, wodurch die Formulierungen in diesem Kapitel denjenigen in Kapitel 5 sehr ähnlich werden. Wir führen dazu den $3n$ -dimensionalen **Konfigurationsvektor**

$$\mathbf{x} \doteq (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \quad (9.2)$$

ein, der die Lage aller n Massenpunkte beschreibt. In analoger Weise definieren wir die $3n$ -dimensionalen **Kraftvektoren**

$$\mathbf{Y} \doteq (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n), \quad \mathbf{Y}' \doteq (\mathbf{F}'_1, \dots, \mathbf{F}'_n). \quad (9.3)$$

Um die Massenfaktoren in (9.1) in eine Vektornotation zu überführen, müssen wir die diagonale **Massenmatrix**

$$\mathcal{M} \doteq \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m_n \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

verwenden. Mit dieser Notation können wir die n Bewegungsgleichungen (9.1) in die einzige Gleichung

$$\mathcal{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{Y} + \mathbf{Y}' \quad (9.5)$$

komprimieren, die große formale Ähnlichkeit mit der Gleichung (5.2) hat.

Der Begriff der **virtuellen Verrückung** aus Kapitel 5 läßt sich in naheliegender Weise verallgemeinern. Jede infinitesimale Veränderung der Konfiguration \mathbf{x} läßt sich durch einen $3n$ -dimensionalen Vektor $\delta \mathbf{x}$ kennzeichnen. Die Zwangsbedingungen werden gewisse Veränderungen $\delta \mathbf{x}$ der Konfiguration verbieten. Die bei festgehaltener Zeit – man erinnere sich daran, daß dieser Zusatz für

zeitabhängige (rheonome) Zwangsbedingungen wesentlich ist – möglichen infinitesimalen Veränderungen $\delta \mathbf{x}$ sind die virtuellen Verrückungen. Die Zwänge, die wir im Sinne haben, sollen auch hier keine Beschleunigungen in Richtung der virtuellen Verrückungen bewirken, sondern nur virtuelle Verrückungen in anderen Richtungen ausschließen und im Falle rheonomer Zwänge die Massenpunkte senkrecht zu den momentanen virtuellen Verrückungen bewegen. Das bedeutet aber:

Die Zwangskräfte leisten keine Arbeit unter virtuellen Verrückungen,

oder in Formeln, in vollständiger Analogie zu Gleichung (5.39):

$$\delta A' \doteq \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{Y}' = 0. \quad (9.6)$$

Mit dem Punkt \cdot wird hier wie im folgenden immer das Skalarprodukt zweier $3n$ -dimensionaler Vektoren bezeichnet. Dieses Prinzip, nach dem die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet, soll als eine Präzisierung des Begriffes der mechanischen Zwangsbedingungen aufgefaßt werden. Durch Kombination von (9.6) mit der Bewegungsgleichung (9.5) entsteht sofort wieder das zu (5.40) analoge für alle virtuellen Verrückungen gültige **d'Alembertsche Prinzip**

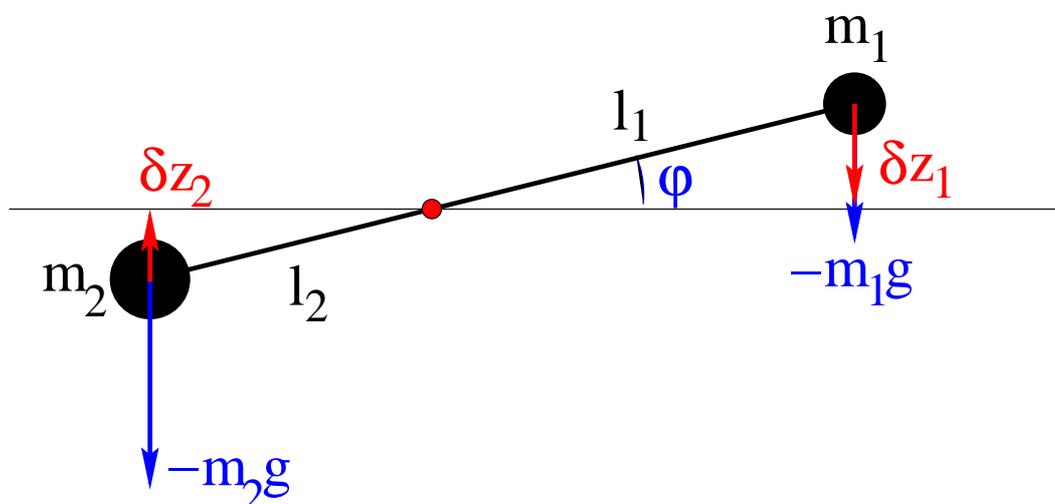
$$\delta \mathbf{x} \cdot (\mathbf{Y} - \mathcal{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}}) = 0. \quad (9.7)$$

Für **Gleichgewichtssituationen**, bei denen keine Beschleunigungen vorhanden sind, folgt daraus in Analogie zu (5.41) das **Prinzip der virtuellen Arbeit**

$$\delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{Y} = 0. \quad (9.8)$$

Aus einer der einfachsten Anwendungen des Prinzips der virtuellen Arbeit folgen die **Hebelgesetze**. Wie in der folgenden Figur gezeigt, erleiden die beiden Massen m_1 und m_2 bei einer kleinen Verringerung des Winkels φ um $\delta \varphi$ die vertikalen Verrückungen $\delta z_1 = -l_1 \sin \varphi \delta \varphi$ und $\delta z_2 = l_2 \sin \varphi \delta \varphi$. Mit den vertikalen Schwerkraftkomponenten $-m_1 g$ und $-m_2 g$ fordert das Prinzip der virtuellen Arbeit $-m_1 g \delta z_1 - m_2 g \delta z_2 = 0$ oder die Gleichgewichtsbedingung

$$m_1 l_1 = m_2 l_2. \quad (9.9)$$



Als einfaches Anwendungsbeispiel zur Demonstration der Nützlichkeit des d'Alembertschen Prinzips betrachten wir die **Atwoodsche Fallmaschine**, bei der zwei mit einem Seil der Länge l verbundene Massen über ein Rad mit dem Radius a gehängt sind. Für vertikale Bewegungen der Massen fordert das d'Alembertsche Prinzip

$$(-m_1 g - m_1 \ddot{z}_1) \delta z_1 + (-m_2 g - m_2 \ddot{z}_2) \delta z_2 = 0. \quad (9.10)$$

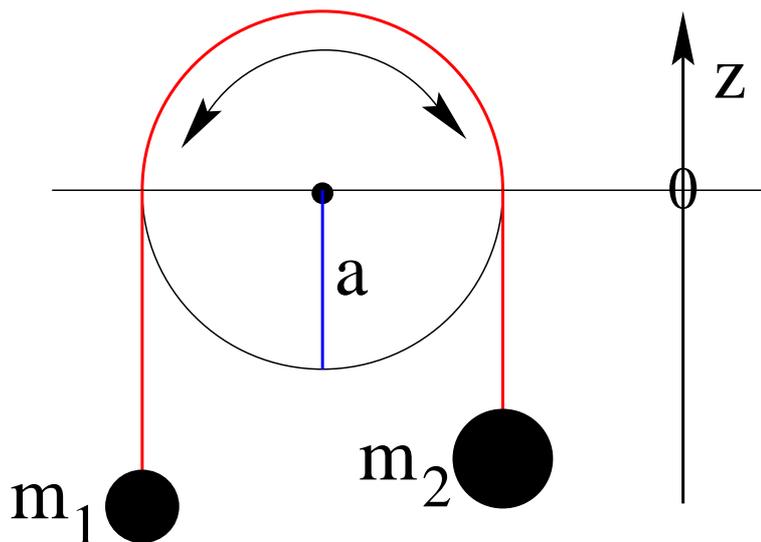
Die Zwänge (konstante Seillänge) bewirken die Restriktionen $\delta z_1 = -\delta z_2$ und $\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$. Damit erhalten wir sofort die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g, \quad (9.11)$$

die für nahezu gleiche Massen eine stark reduzierte Erdbeschleunigung ergeben, die sich leichter messen läßt. Die Zwangskraft

$$F'_{1z} = m_1 \ddot{z}_1 - F_{1z} = m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g + m_1 g = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 2\mu g \quad (9.12)$$

spannt den Faden.



Im folgenden werden wir zunächst wieder den Fall betrachten, daß k **holonome Zwangsbedingungen**

$$f_\mu(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\mu = 1, \dots, k) \quad (9.13)$$

vorliegen (siehe (5.1)). Die virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{x}$ sind dann solche infinitesimalen Verschiebungen des Konfigurationsvektors \mathbf{x} , die bei festgehaltener Zeit t mit den Zwangsbedingungen verträglich sind. Sie erfüllen also die Bedingungengleichungen

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} = f_{\mu \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} = 0 \quad (\mu = 1, \dots, k). \quad (9.14)$$

Hierbei bezeichnet die partielle Ableitung nach dem $3n$ -dimensionalen Vektor \mathbf{x} den $3n$ -dimensionalen Gradienten $\text{grad}_{\mathbf{x}}$ der Funktion f_{μ} , den wir auch kurz als $f_{\mu\mathbf{x}}$ schreiben. Wir werden annehmen, daß die k Zwangsbedingungen (9.13) in dem Sinne unabhängig sind, daß die k Gleichungen (9.14) linear unabhängige Bedingungen an die virtuellen Verrückungen stellen. Dann ist der Rang der $(k, 3n)$ -Matrix $(f_{\mu\mathbf{x}})_{\mu=1, \dots, k}$ gleich k . Offenbar sind daher maximal $k \leq 3n$ unabhängige Bedingungen möglich. Die virtuellen Verrückungen $\delta\mathbf{x}$ stehen dann auf den k linear unabhängigen Vektoren $f_{\mu\mathbf{x}}$ senkrecht und bilden einen Vektorraum U_V der Dimension $f = 3n - k$, der das orthogonale Komplement des von den Vektoren $f_{\mu\mathbf{x}}$ aufgespannten Vektorraums U_f ist ($U_V = U_f^{\perp}$). Das d'Alembertsche Prinzip sagt nun aus, daß der Vektor $\mathbf{Y} - m\ddot{\mathbf{x}}$ senkrecht auf dem Vektorraum U_V steht. Er muß dann also im orthogonalen Komplement dieses Vektorraumes liegen, d.h. im Vektorraum U_f , und muß sich aus den k Basisvektoren $f_{\mu\mathbf{x}}$ dieses Vektorraumes linear kombinieren lassen. Es muß deshalb k Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ geben mit

$$\mathbf{Y} - \mathcal{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \sum_{\mu=1}^k (-\lambda_{\mu}) f_{\mu\mathbf{x}}. \quad (9.15)$$

Wir haben damit natürlich auch die Zwangskräfte

$$\mathbf{Y}' = \sum_{\mu=1}^k \lambda_{\mu} f_{\mu\mathbf{x}}. \quad (9.16)$$

auf die k **Lagrangeparameter** λ_{μ} zurückgeführt.

Die Gleichungen (9.13) und (9.15) sind die **Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 1. Art** für das vorliegende Problem der eingeschränkten Bewegung von n Massenpunkten. Durch die kompakte Notation haben wir eine weitgehende Übereinstimmung mit den entsprechenden Gleichungen für einen einzigen Massenpunkt aus Kapitel 5 erzielt. Das Lösungsverfahren ist daher ebenfalls völlig analog zu dem in Kapitel 5 beschriebenen Verfahren (siehe (5.4-7)), wobei die Eindeutigkeit der Lösung wesentlich auf der linearen Unabhängigkeit der k $3n$ -dimensionalen Vektoren $f_{\mu\mathbf{x}}$ beruht. Wir fassen wie Lösungsschritte noch einmal in der hier benutzten Notation zusammen:

1. Man differenziert die holonomen Zwangsbedingungen (9.13) nach der Zeit,

$$\frac{d}{dt} f_{\nu}(\mathbf{x}, t) = f_{\nu\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f_{\nu}}{\partial t} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, k). \quad (9.17)$$

2. Man differenziert ein zweites Mal und erhält

$$\frac{d^2}{dt^2} f_{\nu}(\mathbf{x}, t) = f_{\nu\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + R_{\nu}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = 0 \quad (\nu = 1, \dots, k), \quad (9.18)$$

wobei

$$R_{\nu}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = (\dot{\mathbf{x}} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}})(\dot{\mathbf{x}} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}}) f_{\nu} + 2(\dot{\mathbf{x}} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}}) \frac{\partial f_{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_{\nu}}{\partial t^2} \quad (9.19)$$

wieder alle Terme der Ableitung von (9.17) zusammenfaßt, die die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}$ nicht enthalten.

3. Man setzt $\ddot{\mathbf{x}}$ aus (9.15) in (9.18) ein und erhält

$$\sum_{\mu=1}^k (f_{\nu\mathbf{x}} \mathcal{M}^{-1} f_{\mu\mathbf{x}}) \lambda_{\mu} = -f_{\nu\mathbf{x}} \mathcal{M}^{-1} \mathbf{Y} - R_{\nu} \quad (\nu = 1, \dots, k). \quad (9.20)$$

Die $(k \times k)$ -Matrix $f_{\nu\mathbf{x}} \mathcal{M}^{-1} f_{\mu\mathbf{x}}$ ist wegen der linearen Unabhängigkeit der k Tangentialvektoren $f_{\mu\mathbf{x}}$ und der Positivität der Massenmatrix \mathcal{M} invertierbar.

4. Man löst das lineare Gleichungssystem (9.20) nach den Lagrangeparametern λ_{ν} auf setzt die Lösung $\lambda_{\nu}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ in die Bewegungsgleichung (9.15) ein.
 5. Man löst die Bewegungsgleichung mit nunmehr explizit bekannten Zwangskräften unter Benutzung von Anfangsbedingungen, die die Gleichungen (9.13) und (9.17) erfüllen.

Eine zweite Möglichkeit zur Behandlung der durch die holonomen Zwangsbedingungen (9.13) eingeschränkten Bewegungen besteht auch hier wieder in der Einführung von **generalisierten Koordinaten**. Die Punkte \mathbf{x} des $3n$ -dimensionalen Konfigurationsraumes, die die Zwangsbedingungen (9.13) erfüllen, bilden eine f -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine solche Mannigfaltigkeit kann durch f Koordinaten q_1, \dots, q_f parametrisiert werden, die wir generalisierte Koordinaten nennen und in dem f -dimensionalen Vektor \mathbf{q} zusammenfassen. Die Konfigurationen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}, t) \quad (9.21)$$

durchlaufen die Mannigfaltigkeit, wenn die generalisierten Koordinaten \mathbf{q} ein gewisses Gebiet des f -dimensionalen Raumes durchlaufen. Die f Vektoren $\partial\mathbf{x}/\partial q_i$ ($i = 1, \dots, f$) sind Tangentenvektoren an die Mannigfaltigkeit. Um die Unabhängigkeit der generalisierten Koordinaten zu garantieren, nehmen wir wie in Kapitel 5 an, daß die Tangentenvektoren linear unabhängig sind. Es gilt die Identität

$$f_{\mu}(\mathbf{x}(\mathbf{q}, t), t) \equiv 0 \quad (\mu = 1, \dots, k), \quad (9.22)$$

d.h. die Zwangsbedingungen sind in den generalisierten Koordinaten \mathbf{q} identisch erfüllt. Aus dieser Identität folgen durch Differentiation nach q_i die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial q_i} f_{\mu} = f_{\mu\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, f; \mu = 1, \dots, k), \quad (9.23)$$

die noch einmal deutlich machen, daß die f Tangentenvektoren $\partial\mathbf{x}/\partial q_i$ den Unterraum U_V der virtuellen Verrückungen $\delta\mathbf{x}$ aufspannen. Tatsächlich können wir hier die virtuellen Verrückungen mittels

$$\delta\mathbf{x} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial q_i} \delta q_i \quad (9.24)$$

durch infinitesimale Änderungen δq_i der generalisierten Koordinaten ausdrücken. Aus dem d'Alembertschen Prinzip (9.7) folgern wir hiermit in Analogie zu Gleichung (5.13) die f Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \mathcal{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{Y} \quad (i = 1, \dots, f), \quad (9.25)$$

aus denen die Zeitabhängigkeit der f generalisierten Koordinaten $q_i(t)$ bestimmt werden kann.

Wir werden diese Bewegungsgleichungen, wiederum in Analogie zu Kapitel 5, im folgenden auf eine bequemere, suggestivere Gestalt bringen. Aus (9.21) folgt in Analogie zu (5.14), daß die $3n$ -dimensionale Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (9.26)$$

eine lineare Form in den **generalisierten Geschwindigkeiten** \dot{q}_i ist. Wir werden auch hier zwei zu (5.20) und (5.21) analoge Identitäten brauchen. Die erste folgt leicht aus (9.26) und lautet

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \quad (9.27)$$

und die zweite ergibt sich aus einer kurzen zu (5.21) analogen Rechnung als

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial q_i}. \quad (9.28)$$

Die linke Seite der Bewegungsgleichungen (9.25) wird nun umgeformt in

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \mathcal{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right) \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right) - \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial q_i} \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right). \end{aligned} \quad (9.29)$$

Wir identifizieren den in (9.29) auftauchenden Ausdruck

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j}{2} \dot{x}_j^2 \quad (9.30)$$

als die gesamte **kinetische Energie** des hier betrachteten Massenpunktssystems, die wegen (9.26) auch hier eine quadratische Form in den generalisierten Geschwindigkeiten ist. Wenn wir die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen (9.25) als generalisierte Kräfte

$$Q_i \doteq \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{Y} \quad (9.31)$$

bezeichnen, haben wir diese Gleichungen auf die Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (9.32)$$

gebracht, die man wieder **Lagrangesche Gleichungen 2. Art** (im weiteren Sinne) nennt.

Für konservative Kräfte, die sich aus einem Potential $V(\mathbf{x}, t)$ als

$$Y = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}, t) \quad (9.33)$$

herleiten, lassen sich auch die generalisierten Kräfte vereinfacht darstellen, weil für $V(\mathbf{x}(\mathbf{q}, t), t)$ nach der Kettenregel

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (9.34)$$

folgt. Führt man nunmehr die **Lagrangefunktion**

$$L \doteq T - V \quad (9.35)$$

ein, so schreiben sich die Lagrangegleichungen 2. Art (im engeren Sinne) als

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, f). \quad (9.36)$$

Für ein einfaches Beispiel der Bequemlichkeiten, die die Verwendung generalisierter Koordinaten und der Lagrangefunktion mit sich bringen, kommen wir noch einmal auf die **Atwoodsche Fallmaschine** zurück. Die konstante Fadenlänge l wird durch die holonome Zwangsbedingung $z_1 + z_2 + l - \pi a = 0$ berücksichtigt. Als generalisierte Koordinate können wir zum Beispiel $q \doteq z_1$ wählen, worauf mit der Zwangsbedingung $z_2 = \pi a - l - q$ gilt. Die Lagrangefunktion des Zweikörpersystems ist durch

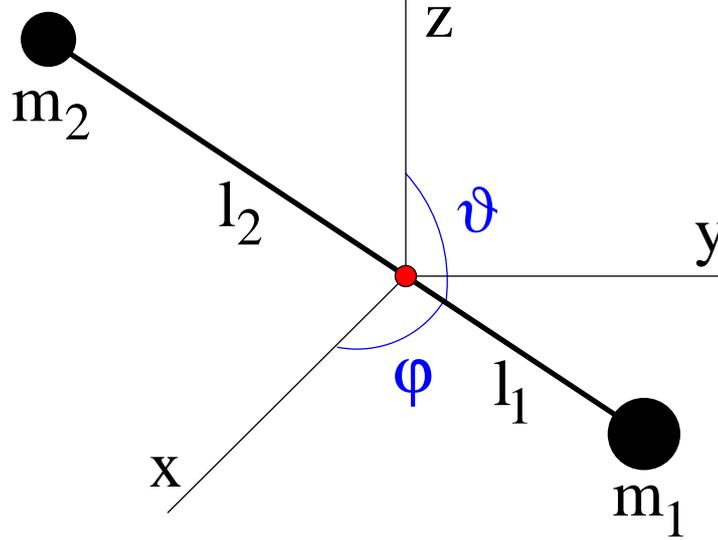
$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{z}_2^2 - m_1 g z_1 - m_2 g z_2 \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{q}^2 - (m_1 - m_2) g q - m_2 g (\pi a - l) \end{aligned} \quad (9.37)$$

gegeben, wobei wir in der zweiten Zeile die Massenpunktkoordinaten z_1 und z_2 durch die generalisierte Koordinate q ausgedrückt haben. Die Lagrangegleichung 2. Art ergibt sich damit sofort als (vergleiche mit (9.11))

$$(m_1 + m_2) \ddot{q} + (m_1 - m_2) g = 0. \quad (9.38)$$

Als zweites Beispiel betrachten wir zwei Massenpunkte, die durch eine Stange der Länge l mit vernachlässigbar kleiner Masse zu einer **Hantel** verbunden sind und

sich im homogenen Schwerfeld der Erde bewegen. Die sechs Freiheitsgrade der beiden Massenpunkte sind durch die Zwangsbedingung vorgegebenen Abstands auf fünf reduziert. Als generalisierte Koordinaten wählt man geschickterweise die drei kartesischen Massenmittelpunktskoordinaten x_0 , y_0 und z_0 sowie zwei Polarwinkel ϑ und φ , die die Ausrichtung der Hantelachse kennzeichnen.



Mit $l_{1/2} = \frac{m_{2/1}}{M} l$ ($M = m_1 + m_2$) ergibt sich für die Parametrisierung der kartesischen Massenpunktkoordinaten durch die generalisierten Koordinaten

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= x_0 \pm l_{1/2} \sin \vartheta \cos \varphi \\ y_{1/2} &= y_0 \pm l_{1/2} \sin \vartheta \sin \varphi \\ z_{1/2} &= z_0 \pm l_{1/2} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Die kinetische Energie der Hantel ist

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = T^{(e)} + T^{(i)} \\ T^{(e)} &= \frac{M}{2} v_0^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) \\ T^{(i)} &= \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} v_2'^2 = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \\ &= \frac{\Theta}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2), \end{aligned} \quad (9.40)$$

wobei Gleichung (1.17) verwendet und das Trägheitsmoment der Hantel zur Abkürzung Θ genannt wurde. Die potentielle Energie

$$V = V_1 + V_2 = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = M g z_0 + (m_1 l_1 - m_2 l_2) g \cos \vartheta = M g z_0 \quad (9.41)$$

hängt nur von der Höhe z_0 des Massenmittelpunktes ab. Die Lagrangefunktion der Hantel lautet also

$$L = T - V = \frac{M}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) + \frac{\Theta}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - m g z_0. \quad (9.42)$$

Man sieht, wie die geschickte Wahl der generalisierten Koordinaten zu einer Entkopplung zwischen Massenmittelpunkts- und Winkelkoordinaten in der Lagrangefunktion führt. Es folgen nun die fünf Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
M\ddot{x}_0 &= 0 \\
M\ddot{y}_0 &= 0 \\
M\ddot{z}_0 + Mg &= 0 \\
\Theta \ddot{\vartheta} - \Theta \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta &= 0 \\
\frac{d}{dt}(\Theta \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta) &= 0.
\end{aligned} \tag{9.43}$$

Man erkennt, daß der Massenmittelpunkt sich im freien Fall bewegt, während die Hantelrotation von dieser Bewegung überhaupt nicht beeinflusst wird. Aus der letzten Bewegungsgleichung lesen wir sogleich eine Erhaltungsgröße ab,

$$L^{(i)} = \Theta \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta, \tag{9.44}$$

wobei $L^{(i)}$ als die Komponente des inneren Drehimpulses in Richtung der Polarachse identifiziert werden kann. Eliminiert man nun $\dot{\varphi}$ aus der vierten Bewegungsgleichung mit Hilfe von (9.44), so erhält man mit

$$\Theta \ddot{\vartheta} - \Theta \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} \left(\frac{L^{(i)}}{\Theta} \right)^2 = 0 \tag{9.45}$$

eine reine Differentialgleichung für die Koordinate ϑ . Sie kann nach Multiplikation mit $\dot{\vartheta}$ einmal integriert werden und ergibt eine zweite Erhaltungsgröße,

$$E^{(i)} = \frac{\Theta}{2} (\dot{\vartheta}^2 + (\frac{L^{(i)}}{\Theta \sin \vartheta})^2), \tag{9.46}$$

die die Bedeutung der inneren Energie der Hantel hat. Man kann sich die Bestimmung dieser beiden Erhaltungsgrößen und die weiteren Lösungsschritte sehr erleichtern, wenn man die Wahl der Polarachse in geeigneter Weise an Anfangsbedingungen anpaßt. Im Massenmittelpunktsystem betrachtet zeichnen die Hantelachse und die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt t_0 eine Ebene aus, die momentane Rotationsebene der Hantel. Wählt man nun die Polarachse orthogonal auf dieser Ebene, so gilt $\vartheta(t_0) = \pi/2$ und $\dot{\vartheta}(t_0) = 0$ und die vierte Bewegungsgleichung in (9.43) impliziert, daß der Polarwinkel ϑ für alle Zeiten den Wert $\pi/2$ haben wird. Aufgrund dieser Vereinfachung kann man nun (9.44) leicht nach der Zeit integrieren und erhält die Lösung

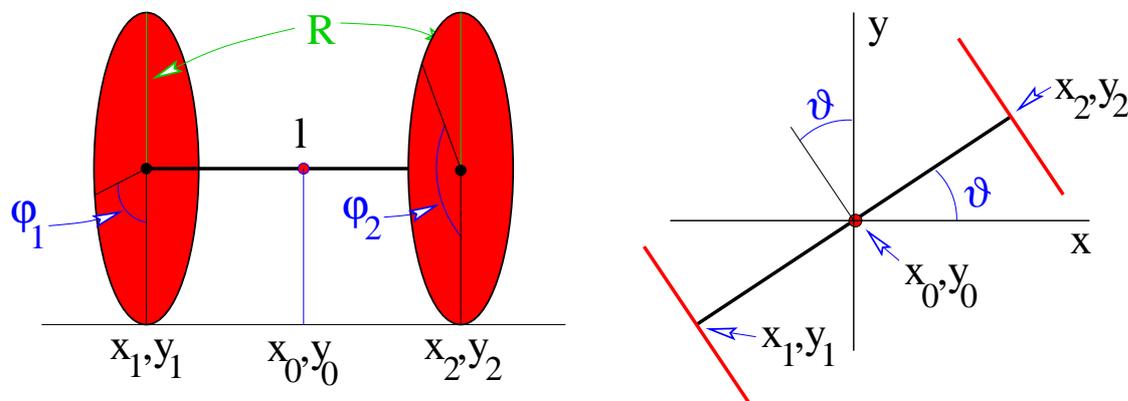
$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{L^{(i)}}{\Theta} (t - t_0). \tag{9.47}$$

Die Hantel rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine raumfeste Achse.

Die oben diskutierte Hantel ist ein Beispiel für einen **starreren Körper**. Ein starrer Körper besteht aus n Massenpunkten, die starr miteinander verbunden sind. Der erste Massenpunkt hat drei freie Koordinaten. Der zweite Massenpunkt kann durch zwei Winkel wie bei der Hantel beschrieben werden. Der dritte Massenpunkt kann, falls er nicht auf der durch die Hantel definierten Geraden liegt, noch um die Hantelachse rotieren und der vierte Massenpunkt hat dann überhaupt keine Freiheit mehr. Daher kann die Bewegung jedes starren Körpers durch sechs generalisierte Koordinaten parametrisiert werden, falls er nicht linear ist, durch fünf im linearen Fall. Wir werden eine geeignete Wahl der generalisierten Koordinaten später besprechen.

Für holonome Zwangsbedingungen haben wir gezeigt, wie Bewegungsgleichungen in Form von Lagrangegleichungen 1. oder 2. Art aufgestellt werden können. Wir werden jetzt anhand eines Beispiels einen interessanten Typ **nicht-holonome Zwangsbedingungen** kennenlernen, für den es keine generalisierten Koordinaten gibt.

Wir betrachten zwei Räder vom Radius R , die durch eine Achse der Länge l drehbar miteinander verbunden sind und auf einer Ebene gleitfrei rollen. Die möglichen Zustände dieses Systems kann man durch folgende Angaben kennzeichnen: die kartesischen Berührungskoordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) , an denen die Räder die Ebene berühren und zwei von festen Stellen auf den Radumfängen aus gemessene Winkel φ_1 und φ_2 , die die Berührungspunkte auf den Rädern parametrisieren.



Diese sechs Parameter sind natürlich nicht unabhängig voneinander. Es gilt zunächst die holonome Zwangsbedingung

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2, \quad (9.48)$$

die es erlaubt, die vier kartesischen Koordinaten durch drei Parameter zu ersetzen. Wir wählen als Koordinaten die Mittelpunktskoordinaten der Radachse

$$x_0 \doteq \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 \doteq \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (9.49)$$

und den Winkel ϑ , den die Radachse mit der x -Achse der Ebene einschließt. Mit diesen Parametern gilt dann

$$x_{1/2} = x_0 \pm \frac{l}{2} \cos \vartheta, \quad y_{1/2} = y_0 \pm \frac{l}{2} \sin \vartheta. \quad (9.50)$$

Eine Änderung dieser drei Parameter wird durch eine Änderung der beiden Winkel $\varphi_{1/2}$ bewirkt. Man macht sich leicht klar, daß gleiche Änderungen von φ_1 und φ_2 nur den Massenmittelpunkt verschieben, während gegensinnige Änderungen nur den Orientierungswinkel ϑ beeinflussen. Es gilt genauer

$$l \Delta \vartheta = R (\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2) \quad (9.51)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta x_0 &= R \sin \vartheta \frac{\Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2}{2} \\ \Delta y_0 &= -R \cos \vartheta \frac{\Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2}{2}. \end{aligned} \quad (9.52)$$

Aus (9.51) folgt offenbar die weitere holonome Zwangsbedingung

$$l \vartheta - R (\varphi_1 - \varphi_2) = \text{konstant}, \quad (9.53)$$

durch die die Koordinate ϑ eliminiert werden kann. Die infinitesimalen Zwangsbedingungen (9.52) sind jedoch nicht aus holonomen Zwangsbedingungen ableitbar. Um dies zu zeigen, ersetzen wir die beiden Winkel $\varphi_{1,2}$ durch die Variablen $\varphi_{\pm} \doteq (\varphi_1 \pm \varphi_2)/2$ und nehmen an, es gebe eine holonome Zwangsbedingung der Form

$$f(x_0, y_0, \varphi_+, \varphi_-) = 0, \quad (9.54)$$

die mit (9.52) konsistent sei. Dann muß die Differentialform zu (9.54) eine Linearkombination der beiden infinitesimalen Beziehungen in (9.52) sein. Es muß also zwei Funktionen $h_{x/y}(x_0, y_0, \varphi_+, \varphi_-)$ geben mit

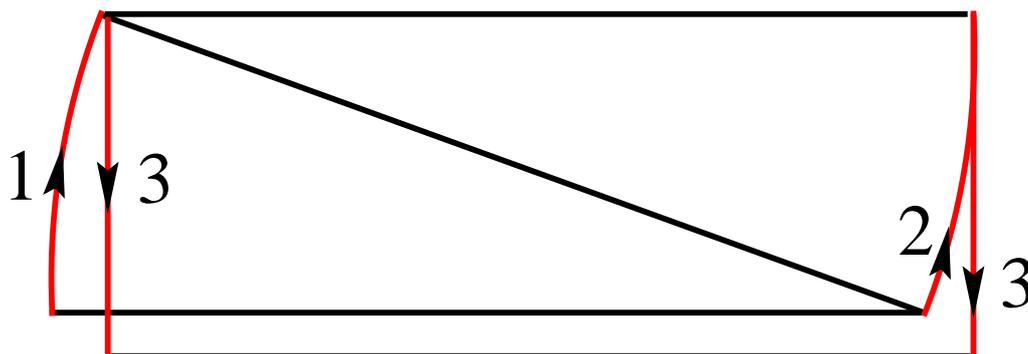
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial f}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial f}{\partial \varphi_+} \Delta \varphi_+ + \frac{\partial f}{\partial \varphi_-} \Delta \varphi_- &\equiv \\ h_x (\Delta x_0 - R \sin \vartheta \Delta \varphi_+) + h_y (\Delta y_0 + R \cos \vartheta \Delta \varphi_+) &= 0. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Durch Koeffizientenvergleich lesen wir daraus die folgenden Beziehungen ab:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0} &= h_x \\ \frac{\partial f}{\partial y_0} &= h_y \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi_+} &= h_y R \cos \vartheta - h_x R \sin \vartheta \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi_-} &= 0. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Die vierte, erste und zweite Gleichung in (9.56) implizieren die Unabhängigkeit der Funktionen f , h_x und h_y von der Variablen φ_- . Die rechte Seite der dritten Gleichung hängt aber wegen (9.53) über die Variable ϑ von φ_- ab, es sei denn, die Funktionen h_x und h_y , und damit auch die Funktion f , verschwinden. Damit ist die angenommene holonome Zwangsbedingung (9.54) ad absurdum geführt.

Wir haben hier also ein System, in dem die infinitesimalen Änderungen aller Variablen durch die der beiden Variablen φ_1 und φ_2 festgelegt sind. Man sagt in diesem Falle, das System habe **zwei Freiheitsgrade im Kleinen**. Der Zustand des Systems läßt sich aber trotzdem nicht durch zwei generalisierte Koordinaten beschreiben, sondern es hat **vier Freiheitsgrade im Großen**.



Daß der Massenmittelpunkt tatsächlich keine eindeutige Funktion der beiden Winkelvariablen $\varphi_{1/2}$ ist, kann man auch durch die oben skizzierte Folge von Bewegungen verstehen:

- (1) Man rollt zunächst das Rad 1 unter Festhaltung des Rades 2 ein Stück weiter unter Verkipfung der Radachse.
- (2) Man rollt dann das Rad 2 unter Festhaltung des Rades 1 um den gleichen Weg weiter, bis die Radachse wieder die ursprüngliche Richtung hat.
- (3) Schließlich rollt man beide Räder bei fester Achsenorientierung zurück, bis die Winkel φ_1 und φ_2 die alten Werte haben.

Man kann offenbar den Massenmittelpunkt beliebig verschieben und die Winkel φ_1 und φ_2 auf ihre Anfangswerte zurückführen.

Das obige Beispiel steht für eine große Klasse nicht-holonomer Zwangsbedingungen, die sich folgendermaßen beschreiben lassen. Wir nehmen an, wir hätten schon alle holonomen Zwangsbedingungen durch die Wahl von f_G generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} \doteq (q_1, \dots, q_{f_G})$ berücksichtigt. Es seien dann k weitere differentielle Zwangsbedingungen

$$\mathbf{f}_\kappa(\mathbf{q}, t) \cdot \Delta \mathbf{q} + f_\kappa(\mathbf{q}, t) \Delta t = 0 \quad (\kappa = 1, \dots, k) \quad (9.57)$$

vorhanden, wobei die \mathbf{f}_κ Vektoren der Dimension f_G sind. Diese differentielle Zwangsbedingungen kann man auch als lineare Gleichungen

$$\mathbf{f}_\kappa(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + f_\kappa(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (\kappa = 1, \dots, k) \quad (9.58)$$

für die generalisierten Geschwindigkeiten schreiben. Die virtuellen Verrückungen erfüllen dann die Bedingungen

$$\mathbf{f}_\kappa \cdot \delta \mathbf{q} = 0 \quad (\kappa = 1, \dots, k). \quad (9.59)$$

Man überprüft nun leicht, daß alle unsere Überlegungen, die wir zu den Lagrange-gleichungen 1. Art und deren Lösung angestellt haben, sich hier vollständig wiederholen lassen. Die holonomen Zwangsbedingungen (9.13) waren dafür nämlich gar nicht nötig. Die Gleichungen (9.59) und (9.58) entsprechen dabei den früheren Gleichungen (9.14) und (9.17). Wenn die k Vektoren \mathbf{f}_κ linear unabhängig sind, hat das System $f_K = f_G - k$ Freiheitsgrade im Kleinen.

Die Untersuchung, ob die k differentiellen Zwangsbedingungen keine weiteren holonomen Zwangsbedingungen enthalten, führt wie im obigen Beispiel auf partielle Differentialgleichungen für die Koeffizienten \mathbf{f}_κ und f_κ .

Während Lagrangegleichungen 1. Art für die Behandlung von Systemen mit nicht-holonomen differentiellen Zwangsbedingungen anwendbar sind, ist die Ableitung von Bewegungsgleichungen aus einer Lagrangefunktion nicht möglich.

10. Das Hamiltonsche Prinzip

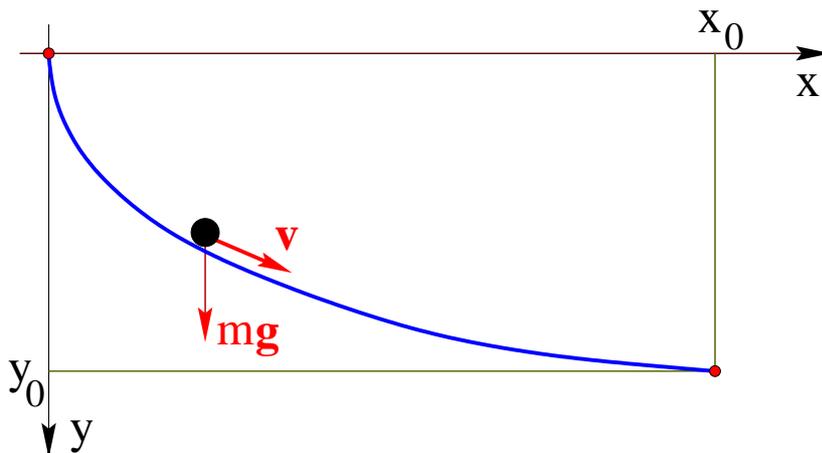
Nachdem wir im letzten Kapitel mit dem d'Alembertschen Prinzip ein **Differentialprinzip** zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen kennengelernt haben, werden wir in diesem Kapitel ein **Integralprinzip** besprechen, das gleichfalls ein grundlegendes Prinzip der analytischen Mechanik darstellt. Wir beginnen zunächst mit einem Exkurs in die mathematischen Grundlagen der **Variationsrechnung**.

Die Variationsrechnung behandelt die Problematik, Extrema von **Funktionalen** zu finden. Ein Funktional ist eine Abbildung einer Menge von Funktionen in eine Zahlenmenge, ordnet also jeder Funktion eine (bei den hier benutzten Anwendungen reelle) Zahl zu. Eine wichtige Klasse von Funktionalen läßt sich durch Integrale darstellen. Gehöre etwa die $y(x)$ zur Menge der auf dem Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$ stetig differenzierbaren Funktionen \mathcal{C} und sei $F(y, z, x)$ eine gegebene integrable Funktion ihrer Variablen, dann ist die Abbildung

$$I[y(x)] \doteq \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx \quad (10.1)$$

ein Funktional auf \mathcal{C} . Typische Variationsprobleme bestehen darin, diejenige Funktion $y(x)$ aus einer gewissen Untermenge von \mathcal{C} zu finden, die das Funktional I minimal oder maximal macht. Die Untermenge von \mathcal{C} wird dabei im allgemeinen durch Rand- oder Nebenbedingungen an die Funktion $y(x)$ gekennzeichnet.

Als historisch prominentes Beispiel für ein Variationsproblem sei das **Brachistochronenproblem** genannt, mit dem **Johann Bernoulli** 1696 die Variationsrechnung begründete. Gesucht ist bei diesem Problem die Bahn, die ein Massenpunkt im Schwerfeld der Erde durchlaufen soll, damit er bei verschwindender Anfangsgeschwindigkeit am schnellsten vom Anfangspunkt $(0, 0)$ zum Endpunkt (x_0, y_0) gelangt.



Ein Wegelement längs der Bahn ist $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + y'^2} \Delta x$ und die Geschwindigkeit ist aufgrund des Energiesatzes $\frac{m}{2}v^2 = mgy$ durch $v = \sqrt{2gy}$

gegeben. Daher gilt für die Fallzeit die Formel

$$\tau = \sum \frac{\Delta s}{v} = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx. \quad (10.2)$$

Dieses Funktional ist mit den Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y(x_0) = y_0$ zu minimieren.

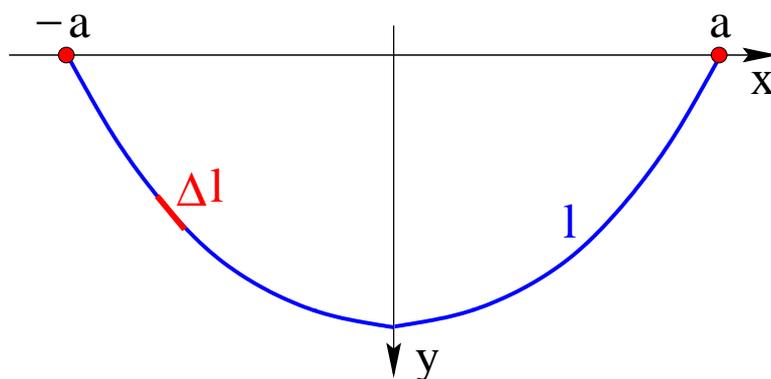
Ein zweites klassisches Variationsproblem ist das **Kettenlinienproblem**: Eine Kette (oder ein beliebig flexibles Seil) der Länge l ist an seinen Endpunkten im Schwerfeld der Erde aufgehängt. Welche Form nimmt die Kette im Gleichgewicht an?

Dieses Problem geht man am einfachsten an, indem man die potentielle Energie V der Kette minimiert. Wenn μ die Massendichte der Kette pro Längeneinheit ist, gilt für die in der folgenden Figur gezeigte Anordnung mit $\Delta l = \sqrt{1+y'^2} \Delta x$ sehr analog zu (10.2) die Formel

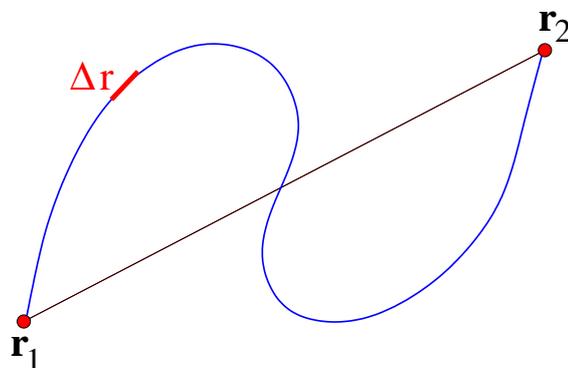
$$V = -\mu g \int_{-a}^a y \sqrt{1+y'^2} dx. \quad (10.3)$$

Hier ist auch eine der Nebenbedingungen, die die Kettenlänge festlegt, durch ein Funktional gegeben:

$$y(\pm a) = 0, \quad l = \int_{-a}^a \sqrt{1+y'^2} dx. \quad (10.4)$$



Mit dem dritten Beispiel wollen wir andeuten, daß das in (10.1) benutzte Symbol y auch mehrere Funktionen (oder eine vektorwertige Funktion) bezeichnen kann. Wir suchen die **kürzeste Kurve**, die zwei gegebene Punkte \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 verbindet.



Wenn $\mathbf{r}(s)$ eine beliebige differenzierbare Kurve ist, die die Nebenbedingungen $\mathbf{r}(s_1) = \mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}(s_2) = \mathbf{r}_2$ erfüllt, erhalten wir für die Länge L dieser Kurve das Funktional

$$L = \int_{s_1}^{s_2} |\mathbf{r}'(s)| ds = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} ds. \quad (10.5)$$

In entsprechender Verallgemeinerung von (10.1) betrachten wir im folgenden das Funktional

$$I[\mathbf{y}] \doteq \int_{x_1}^{x_2} F(\mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), x) dx \quad (10.6)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{y}(x_1) = \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}(x_2) = \mathbf{y}_2, \quad (10.7)$$

wobei das Fettschriftsymbol \mathbf{y} einen Vektor der Dimension n bezeichnen soll.

Wir werden jetzt eine notwendige Bedingung für ein Extremum des Funktionals (10.6) mit den Nebenbedingungen (10.7) ableiten. Wir betrachten dazu zu einer vorgegebenen Funktion $\mathbf{y}(x)$ benachbarte Funktionen

$$\tilde{\mathbf{y}}(x) \doteq \mathbf{y}(x) + \delta\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}(x) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(x). \quad (10.8)$$

Hier ist $\boldsymbol{\eta}$ ebenfalls eine vektorwertige Funktion und ϵ eine diagonale $n \times n$ -Matrix mit den Diagonalelementen $\epsilon_i|_{(i=1, \dots, n)}$, so daß $\delta y_i(x) = \epsilon_i \eta_i(x)$ gilt. Die Variationen $\delta\mathbf{y}(x)$ sind beliebige stetig differenzierbare Funktionen, die die Randbedingungen

$$\delta\mathbf{y}(x_1) = \delta\mathbf{y}(x_2) = 0, \quad d.h. \quad \boldsymbol{\eta}(x_1) = \boldsymbol{\eta}(x_2) = 0, \quad (10.9)$$

erfüllen müssen, damit mit \mathbf{y} auch $\tilde{\mathbf{y}}$ die Nebenbedingungen (10.7) erfüllt. Damit die Funktion $\mathbf{y}(x)$ ein Extremum des Funktionals (10.6) ist, sollte die gewöhnliche Funktion $I(\epsilon) \doteq I[\tilde{\mathbf{y}}]$ bei $\epsilon = 0$ ein Extremum haben. Wir erhalten daher die notwendigen Bedingungen

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \epsilon_i} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \eta_i(x) + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \eta'_i(x) \right) dx = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.10)$$

Um aus (10.10) weitere Schlußfolgerungen ziehen zu können, führen wir am zweiten Term im Integral eine partielle Integration durch:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'_i} \eta'_i(x) dx = \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \eta_i(x) \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) \right] \eta_i(x) dx. \quad (10.11)$$

Hier verschwindet der erste Term auf der rechten Seite wegen der Randbedingungen (10.9) und wir erhalten anstelle von (10.10)

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) \right) \eta_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.12)$$

Da die Variationen $\eta_i(x)$ bis auf die Einschränkungen (10.9) beliebig sind, kann man daraus auf das Verschwinden der Vorfaktoren schließen. Damit alle diese Schlüsse mathematisch korrekt sind, muß ausreichende stetige Differenzierbarkeit der beteiligten Funktionen \mathbf{y} und F vorausgesetzt werden. Als notwendige Bedingungen für ein Extremum des Funktionals (10.6) unter den Nebenbedingungen (10.7) erhalten wir daher die **Eulerschen Differentialgleichungen** (**Leonhard Euler, 1707-1783**)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.13)$$

Die Eulerschen Differentialgleichungen sind genau dann erfüllt, wenn das Funktional bei Variation der Funktionen \mathbf{y} um $\delta \mathbf{y}$ keine in $\delta \mathbf{y}$ lineare Änderung erfährt. Man nennt diese lineare Änderung

$$\delta I \doteq \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y}(x) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}'} \cdot \delta \mathbf{y}'(x) \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}'} \right) \cdot \delta \mathbf{y}(x) dx \quad (10.14)$$

auch die **erste Variation** des Funktionals. Dieser Begriff entspricht dem Begriff des **totalen Differentials** bei Funktionen von endlich vielen Variablen. Das Verschwinden der ersten Variation ist also eine notwendige, aber natürlich keine hinreichende Bedingung dafür, daß ein Funktional extremal ist. Man sagt auch, das Funktional sei **stationär**, wenn $\delta I = 0$ gilt.

Nach dieser mathematischen Einführung in die Grundlagen der Variationsrechnung können wir nun angesichts der offensichtlichen Verwandtschaft zwischen den Eulerschen Differentialgleichungen (10.13) und den Lagrangegleichungen 2. Art (9.36) das **Hamiltonsche Prinzip** für Systeme von Massenpunkten mit holonomen Zwangsbedingungen und konservativen Kräften (9.33) leicht formulieren (**William Rowan Hamilton, 1805-1865**). Seien \mathbf{q} der Vektor der generalisierten Koordinaten des Systems und $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - V$ seine Lagrangefunktion. Dann definieren wir das **Wirkungsintegral** I für die Bewegung des Systems über das Zeitintervall (t_1, t_2) durch

$$I[\mathbf{q}] \doteq \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt. \quad (10.15)$$

Wir betrachten nun alle denkbaren Bewegungen, die das System aus einer Anfangskonfiguration $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ in die Endkonfiguration $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2$ überführen. Wir fordern also die Nebenbedingungen

$$\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2. \quad (10.16)$$

Das Hamiltonsche Prinzip lautet dann:

Unter allen Bewegungen zwischen den durch (10.16) gegebenen Konfigurationen führt das System diejenige aus, die das Wirkungsintegral (10.15) stationär macht.

Nach den obigen mathematischen Vorbemerkungen folgt aus diesem Prinzip die Gültigkeit der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen (9.36), die in diesem Zusammenhang auch oft als **Euler–Lagrange–Gleichungen** bezeichnet werden. Anders als bei den bisherigen Formulierungen werden diese Bewegungsgleichungen nicht durch Anfangsbedingungen $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ und $\dot{\mathbf{q}}(t_1) = \dot{\mathbf{q}}_1$ zu einem **Anfangswertproblem** ergänzt, sondern durch Randbedingungen (10.16) zu einem **Randwertproblem**, das im allgemeinen aber ebenfalls eindeutig lösbar sein wird.

Das Hamiltonsche Prinzip stellt einen besonders eleganten und nützlichen Ausgangspunkt für die Formulierung der Gesetze der Mechanik dar. Ein Vorzug dieser Formulierung ist ihre Unabhängigkeit von der Wahl der generalisierten Koordinaten. Das Hamiltonsche Prinzip ist sehr verallgemeinerungsfähig und kann auch als Grundlage für Feldtheorien wie die Elektrodynamik sowie für die Quantentheorie benutzt werden.

Als alternatives Postulat zu Begründung der Mechanik verschleiert das Hamiltonsche Prinzip den **kausalen** Charakter der Newtonschen Mechanik. Die Stationarität des Wirkungsintegrals kann naturphilosophisch als eine **teleologische** Naturbeschreibung interpretiert werden. Wie schon in der Einleitung zu dieser Vorlesung erwähnt, kann man dies zum Anlaß nehmen, einem Absolutheitsanspruch des heute gebräuchlichen kausalen Naturverständnisses mit Skepsis zu begegnen.

Ein verallgemeinertes Variationsproblem besteht darin, die Stationarität der ersten Variation (10.14) unter k (nicht notwendig holonomen) Nebenbedingungen

$$\mathbf{f}_\kappa(\mathbf{y}, x) \cdot \delta\mathbf{y}(x) = 0 \quad (\kappa = 1, \dots, k) \quad (10.17)$$

mit k linear unabhängigen Vektoren \mathbf{f}_κ zu fordern. Da die $\delta\mathbf{y}$ nicht unabhängig gewählt werden können, kann man jetzt nicht auf die Gültigkeit der Eulerschen Differentialgleichungen (10.13) schließen, sondern erhält (wegen der Lokalität der Nebenbedingungen in der Variablen x) zunächst nur die Beziehungen

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}'} \right) \cdot \delta\mathbf{y}(x) = 0 \quad (x_1 \leq x \leq x_2). \quad (10.18)$$

Die Bedingungen (10.17) sagen, daß die k linear unabhängigen Vektoren \mathbf{f}_κ einen k -dimensionalen Unterraum aufspannen, in dem laut (10.18) der linke Faktor in (10.18) liegen muß. Es folgen daher die Gleichungen

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}'} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} = \sum_{\kappa=1}^k \lambda_\kappa(x) \mathbf{f}_\kappa(\mathbf{y}, x), \quad (10.19)$$

die offensichtlich Bezug zu Lagrangegleichungen 1. Art haben.

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch zeigen, wie das Hamiltonsche Prinzip aus dem d'Alembertschen Prinzip (9.7) abgeleitet werden kann. Wir müssen dazu jedem Zeitpunkt t im Zeitintervall $t_1 \leq t \leq t_2$ eine

virtuelle Verrückung zuordnen, die wir $\delta \mathbf{x}(t)$ nennen werden. Die so definierten zeitabhängigen virtuellen Verrückungen haben die Eigenschaft

$$\frac{d}{dt}(\delta \mathbf{x}) = \delta \dot{\mathbf{x}} = \delta \mathbf{v}, \quad (10.20)$$

die wir für die nachfolgende Umformung brauchen. Es gilt nämlich mit (10.20) die Identität

$$\delta \mathbf{x} \cdot \mathcal{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}(\delta \mathbf{x} \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2} \delta(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}), \quad (10.21)$$

wo rechts die kinetische Energie T des Systems (9.30) auftaucht. Mit der virtuellen Arbeit der eingepprägten Kräfte

$$\delta A \doteq \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{Y} \quad (10.22)$$

folgern wir daher aus dem d'Alembertschen Prinzip (9.7)

$$\delta T + \delta A = \frac{d}{dt}(\delta \mathbf{x} \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \quad (10.23)$$

oder nach Integration über das Zeitintervall $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A) dt = (\delta \mathbf{x} \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (10.24)$$

Damit haben wir eine verallgemeinerte Version des Hamiltonschen Prinzips abgeleitet, die sich folgendermaßen formulieren läßt:

Ein System bewege sich aus der Konfiguration $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ in die Konfiguration $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2$. An diesem System kann man virtuelle Verrückungen $\delta \mathbf{x}(t)$ vornehmen, die eventuell durch Zwangsbedingungen eingeschränkt sind und die natürlich die Bedingungen $\delta \mathbf{x}(t_1) = \delta \mathbf{x}(t_2) = 0$ erfüllen müssen. Die Bewegung verläuft dann so, daß für alle virtuellen Verrückungen das zeitliche Integral der Summe aus der virtuellen Arbeit und der Variation der kinetischen Energie verschwindet:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A) dt = 0. \quad (10.25)$$

Dieses allgemeine Prinzip ist kein richtiges Variationsprinzip, solange die virtuelle Arbeit δA im Gegensatz zu δT nicht das Differential einer dynamischen Funktion ist. Falls jedoch eine potentielle Energie V für die eingepprägten Kräfte existiert, mit der dann

$$\delta A = -\delta V \quad (10.26)$$

gilt, kann man mit der Lagrangefunktion $L \doteq T - V$ aus (10.25) das eigentliche Hamiltonsche Variationsprinzip

$$\delta I \doteq \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (10.27)$$

folgern.

Wie wir gezeigt haben, kann man aus diesem Prinzip für holonome Zwangsbedingungen sowohl Lagrangegleichungen 1. Art wie auch Lagrangegleichungen 2. Art herleiten. Im ersten Fall behält man die Zwangsbedingungen bei und verwendet die Argumentation, die auf Gleichung (10.19) führte. Im zweiten Fall führt man generalisierte Koordinaten ein und beschreitet den Weg, der auf Gleichung (10.13) führte.

11. Lagrangeformalismus und Noethertheorem

Wir haben im vorangehenden allgemeine Methoden kennengelernt, die es erlauben, die Bewegungsgleichungen für mechanische Systeme aufzustellen. Besonders bequem waren holonome Systeme zu handhaben, bei denen sich alle Zwangsbedingungen durch Einführung eines f -dimensionalen Vektors \mathbf{q} von generalisierten Koordinaten erfüllen lassen. Außerdem war es erfreulich, wenn die eingepprägten Kräfte des Systems sich aus einem Potential ableiten ließen. Wir wollen im folgenden Systeme mit diesen beiden Eigenschaften näher untersuchen. Es gibt für solche Systeme eine Lagrangefunktion

$$L = T - V, \quad (11.1)$$

die von den generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten und der Zeit abhängen kann und mit der sich die f Bewegungsgleichungen in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (11.2)$$

schreiben.

Wir wollen zunächst zeigen, daß man innerhalb dieses Formalismus auch die von elektromagnetischen Feldern erzeugten Kräfte auf ein geladenes Teilchen behandeln kann. Wenn $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ die elektrischen und magnetischen Felder am Ort \mathbf{r} zur Zeit t sind, erfährt ein Massenpunkt mit der elektrischen Ladung e bekanntlich die **Lorentz-Kraft**

$$\mathbf{F}_{\text{em}} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (11.3)$$

die von der Geschwindigkeit \mathbf{v} des Teilchens abhängt. Man zeigt im Rahmen der Theorie des Elektromagnetismus, daß sich die Felder aus einem **skalaren Potential** $\Phi(\mathbf{r}, t)$ und einem **Vektorpotential** $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ nach folgenden Formeln ableiten lassen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Wir werden uns jetzt davon überzeugen, daß sich die Kraft (11.3) im Rahmen der Lagrangegleichungen (11.2) aus dem geschwindigkeitsabhängigen Potential

$$V_{\text{em}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \doteq e \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v} \quad (11.5)$$

ergibt. Bei geschwindigkeitsunabhängigen Potentialen bestimmte sich die generalisierte Kraft Q_i nach Gleichung (9.34). Für geschwindigkeitsabhängige Potentiale ist die Kraft jedoch nach (11.2) durch den den Ausdruck

$$Q_i \doteq -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \quad (11.6)$$

gegeben. Wir müssen deshalb nachprüfen, ob die Identität

$$\mathbf{F}_{\text{em}} = -\frac{\partial V_{\text{em}}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{\text{em}}}{\partial \mathbf{v}} \quad (11.7)$$

gilt. Die Nachprüfung gelingt leicht, wenn man die Identität

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11.8)$$

benutzt. Wir haben damit die Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld als

$$L = \frac{m}{2} v^2 + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v} - e \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (11.9)$$

identifiziert.

Die Potentiale Φ und \mathbf{A} sind durch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} nicht eindeutig bestimmt. Sei nämlich $\chi(\mathbf{r}, t)$ eine beliebige (stetig differenzierbare) Funktion von \mathbf{r} und t , dann ergeben die Potentiale

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &\doteq \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \\ \tilde{\mathbf{A}} &\doteq \mathbf{A} + \nabla \chi, \end{aligned} \quad (11.10)$$

eingesetzt in (11.4), dieselben Felder wie die Potentiale Φ und \mathbf{A} . Man nennt die Transformation (11.10) der Potentiale eine **Eichtransformation**. Bei einer Umeichung (11.10) der Potentiale ändert sich jedoch auch die Lagrangefunktion (11.9) in

$$\tilde{L} = L + \frac{e}{c} (\nabla \chi \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \chi}{\partial t}) = L + \frac{d}{dt} \left(\frac{e}{c} \chi(\mathbf{r}, t) \right). \quad (11.11)$$

Aus unserer obigen Rechnung ist ersichtlich, daß die Lorentzkraft und damit die Lagrangesche Bewegungsgleichung nicht von der Eichung der Potentiale abhängt. Hinter dieser Beobachtung steht eine allgemeinere Aussage. Wenn wir für ein beliebiges System mit generalisierten Koordinaten \mathbf{q} eine Umeichung

$$\tilde{L} \doteq L + \frac{d\chi}{dt} \quad (11.12)$$

der Lagrangefunktion mit einer beliebigen Eichfunktion $\chi(\mathbf{q}, t)$ vornehmen, dann bleiben die Bewegungsgleichungen (11.2) unverändert. Daß der Zusatzterm $d\chi/dt$ in (11.12) keinen Beitrag in (11.2) liefert, kann man leicht nachrechnen, erscheint aber trotzdem auf den ersten Blick erstaunlich. Eine tiefere Einsicht in dieses Ergebnis gewinnt man mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips. Die Wirkungsintegrale der beiden Lagrangefunktionen L und \tilde{L} in (11.12) stehen nämlich in folgender Beziehung zueinander:

$$\tilde{I} = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \chi(\mathbf{q}(t_2), t_2) - \chi(\mathbf{q}(t_1), t_1) = I + c. \quad (11.13)$$

Sie unterscheiden sich also nur um eine Konstante, die völlig unabhängig von der Bewegung zwischen den beiden Randkonfigurationen ist. Daher sind die ersten Variationen $\delta\tilde{I}$ und δI natürlich identisch und die daraus folgenden Euler-Lagrangegleichungen müssen ebenfalls übereinstimmen.

Neben den generalisierten Koordinaten \mathbf{q} , Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ und Kräften \mathbf{Q} spielen die **generalisierten Impulse**

$$\mathbf{p} \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad (11.14)$$

die in unserer Notation ebenfalls einen Vektor mit f Komponenten bilden, eine wichtige Rolle. Für kartesische Koordinaten stimmen die generalisierten Impulse mit den kartesischen Komponenten des gewöhnlichen Impulses überein. Im allgemeinen haben die generalisierten Koordinaten jedoch nicht notwendig die physikalische Dimension einer Länge und die zugehörigen generalisierten Impulse haben dann auch nicht die physikalische Dimension eines Impulses. Wenn die generalisierte Koordinate q_i beispielsweise ein Winkel ist, hat der zugehörige generalisierte Impuls p_i die Dimension eines Drehimpulses. Da nach (9.26) und (9.30) die kinetische Energie T und damit auch die Lagrangefunktion L immer (auch im Falle (11.9)) eine quadratische Form in den generalisierten Geschwindigkeiten ist, sind die generalisierten Impulse \mathbf{p} lineare Funktionen der generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$.

Eine Lagrangegleichung aus dem Gleichungssystem (11.2) wird besonders einfach, wenn die Lagrangefunktion L nicht von der betreffenden generalisierten Koordinate q_i abhängt,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv 0. \quad (11.15)$$

Dann lautet die zugehörige Lagrangegleichung nämlich einfach

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = 0 \quad (11.16)$$

und der Impuls p_i ist eine **Erhaltungsgröße**. Wenn eine generalisierte Koordinate q_i die Eigenschaft (11.15) besitzt, nennt man sie eine **zyklische Koordinate**:

Wenn eine generalisierte Koordinate q_i zyklisch ist, ist der zugehörige generalisierte Impuls p_i erhalten.

Zyklische Koordinaten und die zugehörigen Erhaltungssätze sind uns schon in einer Reihe von Fällen begegnet. So hatten wir aus der Unabhängigkeit des Potentials vom Massenmittelpunkt (7.45) auf die Erhaltung des Impulses geschlossen und aus der Unabhängigkeit der Lagrangefunktion (9.42) vom Polarwinkel φ auf die Erhaltung des Drehimpulses (9.44). Diese Art von Schlußfolgerung ist ein Beispiel für eine Aussage des **Noetherschen Theorems**, die wir im folgenden näher betrachten werden.

Wir nehmen an, wir haben eine einparametrische Abbildung des f -dimensionalen Konfigurationsraumes \mathcal{C} der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} auf sich,

$$\mathcal{C} \ni \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, s) \in \mathcal{C} \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}(\mathbf{q}, 0) = \mathbf{q}. \quad (11.17)$$

Diese Abbildung erzeugt (bei festem Parameter s) eine lineare Abbildung der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ und $\dot{\mathbf{g}}$ aufeinander,

$$\dot{\mathbf{g}} = \frac{d}{dt} \mathbf{g}(\mathbf{q}(t), s) = (\dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}}) \mathbf{g}(\mathbf{q}, s). \quad (11.18)$$

Unter der so definierten Abbildung der Koordinaten und Geschwindigkeiten sei die Lagrangefunktion des betrachteten Systems invariant,

$$L(\mathbf{g}(\mathbf{q}, s), \dot{\mathbf{g}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, s), t) \equiv L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (11.19)$$

Für die Herleitung des Noethertheorems werden wir allerdings nur den Grenzfall kleiner Werte des Parameters s brauchen, in dem die Abbildung (11.17) durch ihre **infinitesimale Erzeugende**

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) \doteq \left. \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{g}(\mathbf{q}, s) \right|_{s=0} \quad (11.20)$$

bestimmt ist. Es gelte damit also

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, s) = \mathbf{q} + \mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot s + O(s^2). \quad (11.21)$$

Aus (11.19) können wir jetzt die folgende Gleichung ableiten:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{ds} L(\mathbf{g}(\mathbf{q}(t), s), \dot{\mathbf{g}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), s), t) \right|_{s=0} = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{g}} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{g}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{g}}}{\partial s} \right) \Big|_{s=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} \right) \right) \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{q}) \right). \end{aligned} \quad (11.22)$$

Hier wurde in der zweiten Zeile die Gültigkeit der Euler-Lagrangegleichung (11.2) benutzt sowie die aus (11.18) ersichtliche Identität

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{g}}}{\partial s} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} \right). \quad (11.23)$$

Wir folgern damit aus (11.22) den **Erhaltungssatz**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{q}) \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{q})) = 0. \quad (11.24)$$

Die Aussage des Noetherschen Theorems besteht darin, für eine Koordinatentransformation (11.17), unter der die Lagrangefunktion invariant ist und die durch die infinitesimale Erzeugende (11.20) erzeugt wird, die Erhaltungsgröße

$$F_{\mathbf{h}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{q}) \quad (11.25)$$

explizit anzugeben.

Eine **zyklische Koordinate** entspricht dem einfachen Fall einer Konfigurationsabbildung $\mathbf{g} = \mathbf{q} + s \mathbf{a}$ mit einem festen Vektor \mathbf{a} . In diesem Falle gilt $\dot{\mathbf{g}} = \dot{\mathbf{q}}$ und die Invarianz der Lagrangefunktion unter den Translationen $s \mathbf{a}$ hat nach (11.25) die Erhaltung der Komponente $\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}$ des generalisierten Impulses zur Folge.

Im Falle einer **Rotationsinvarianz** beschreiben wir eine infinitesimale Rotation um eine durch den Einheitsvektor \mathbf{e} gekennzeichnete Achse um den Winkel s durch die Abbildung

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{r}_i + s \mathbf{e} \times \mathbf{r}_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (11.26)$$

wenn \mathbf{r}_i der Ortsvektor des i -ten Massenpunktes ist. Hier werden die Geschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{g}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i + s \mathbf{e} \times \dot{\mathbf{r}}_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (11.27)$$

in analoger Weise transformiert. Wenn die Lagrangefunktion unter der Transformation (11.26,27) invariant ist, liefert (11.25) den Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{e} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \frac{d}{dt} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}) \quad (11.28)$$

für die \mathbf{e} -Komponente des Drehimpulses \mathbf{L} .

Ein Massenpunkt in einem **homogenen Gravitationsfeld** ist insofern ein translationsinvariantes System, als die Erdbeschleunigung \mathbf{g} nicht vom Ort \mathbf{r} des Massenpunktes abhängt und deshalb die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\mathbf{r}} = m \mathbf{g} \quad (11.29)$$

translationsinvariant ist. Die übliche Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + m \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}, \quad (11.30)$$

die man für dieses Problem verwendet, ist allerdings nicht invariant gegenüber vertikalen Translationen. Man kann sie jedoch durch eine Eichtransformation (11.12) translationsinvariant machen. Mit dem Eichfeld $\chi \doteq -mt(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})$ erhält man nämlich die völlig äquivalente Lagrangefunktion

$$\tilde{L} = L + \frac{d}{dt} \chi(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - mt \mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (11.31)$$

Hier wurde die Translationsinvarianz der Lagrangefunktion durch eine Zeitabhängigkeit erkaufte. Das Noethersche Theorem liefert uns jetzt die Erhaltungsgröße

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m \dot{\mathbf{r}} - mt \mathbf{g}, \quad (11.32)$$

die man bei diesem einfachen Problem natürlich auch durch direkte Integration der Bewegungsgleichung (11.29) erhält.

Durch eine Eichtransformation gelingt es auch, die Konsequenzen der **Galilei-Invarianz** aus dem Noethertheorem abzuleiten. Wir betrachten dazu ein System von n Massenpunkten mit den Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (11.33)$$

dessen Kräfte \mathbf{F}_i invariant unter beliebigen Translationen des Systems

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (11.34)$$

sein sollen. Die Bewegungsgleichungen (11.33) sind hier auch unter den Galilei-Transformationen

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} \cdot t, \quad \mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}_i + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (11.35)$$

invariant, wo $\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}$ die Relativgeschwindigkeit der betrachteten Bezugssysteme ist. In diesem Fall ist in der üblichen Lagrangefunktion

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (11.36)$$

zwar die potentielle Energie V invariant unter der Transformation (11.35), aber die kinetische Energie T nicht. Hier verhilft das Eichfeld

$$\chi = -\frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \mathbf{r}_i^2 \quad (11.37)$$

zu einer neuen Lagrangefunktion

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left(\mathbf{v}_i - \frac{1}{t} \mathbf{r}_i \right)^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n), \quad (11.38)$$

die offensichtlich unter der Transformation (11.35) invariant ist. Die zu (11.35) gehörigen infinitesimalen Erzeugenden sind die Vektoren

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{v} \cdot t, \quad (11.39)$$

so daß, weil \mathbf{v} ein beliebiger Geschwindigkeitsvektor ist, das Noethersche Theorem die Erhaltungsgröße

$$t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{v}_i} = t \cdot \sum_{i=1}^n m_i \left(\mathbf{v}_i - \frac{1}{t} \mathbf{r}_i \right) = \mathbf{P} \cdot t - M \mathbf{R} \quad (11.40)$$

ergibt, die die Bewegung des Massenmittelpunktes beschreibt.

Es gibt einen weiteren wichtigen Erhaltungssatz, der sich nicht aus der Invarianz (11.19) der Lagrangefunktion unter Koordinatentransformationen herleitet. Er gilt, wenn die **Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit** abhängt,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (11.41)$$

Unter Benutzung der Bewegungsgleichungen (11.2) erhalten wir in diesem Falle die Identität

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right). \quad (11.42)$$

Aus dieser Identität folgt die Erhaltungsgröße

$$H \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L. \quad (11.43)$$

Zeitunabhängige Lagrangefunktionen mit der Eigenschaft (11.41) findet man insbesondere für skleronome Zwangsbedingungen $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ und zeitunabhängige Potentiale $V(\mathbf{x})$. Nach (9.26) und (9.30) ist dann die kinetische Energie T ein **homogenes Polynom zweiten Grades** in den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$. Man überzeugt sich dann leicht von der Gültigkeit der Beziehung

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 2T. \quad (11.44)$$

(Dies ist ein triviales Beispiel für den **Eulerschen Satz über homogene Funktionen**.) Wir identifizieren damit die Erhaltungsgröße (11.43) im Falle der Gültigkeit von (11.44) als die **Gesamtenergie** des Systems. Die dynamische Funktion

$$H = T + V \quad (11.45)$$

heißt die **Hamiltonfunktion** des Systems, die im Zentrum des folgenden Kapitels stehen wird.

12. Hamiltonformalismus und Phasenraum

Im Lagrangeformalismus sind die generalisierten Koordinaten und ihre Geschwindigkeiten die natürlichen Variablen zur Beschreibung eines dynamischen Systems. Wir haben im letzten Kapitel jedoch gesehen, daß die **generalisierten Impulse** ebenfalls eine herausgehobene Rolle spielen. Dieser Rolle wird im **Hamiltonformalismus** entsprochen, in dem die Impulse anstelle der Geschwindigkeiten als natürliche Variable wirken. Der Übergang zwischen den beiden Beschreibungen ist eine einfache Anwendung der **Legendretransformation**, deren allgemeines Prinzip wir zunächst kurz skizzieren werden, weil sie auch in anderen Bereichen der Physik (insbesondere in der Thermodynamik) Anwendung findet.

Die Legendretransformation ist eine duale Transformation zwischen Paaren von **konvexen** Funktionen. Wir nehmen an, die Funktion $f(x)$ sei eine konvexe Funktion. Ihre Legendretransformierte ist dann durch die Gleichung

$$g(y) \doteq \max_x (y \cdot x - f(x)) \quad (12.1)$$

gegeben. Für die uns hier interessierende Anwendung machen wir die starke zusätzliche Annahme, daß die Funktion $f(x)$ zweimal differenzierbar ist. Die Konvexitätsannahme bedeutet dann $f''(x) > 0$ und die Bestimmung des Maximums in (12.1) führt auf die Bestimmungsgleichung

$$y = f'(x), \quad (12.2)$$

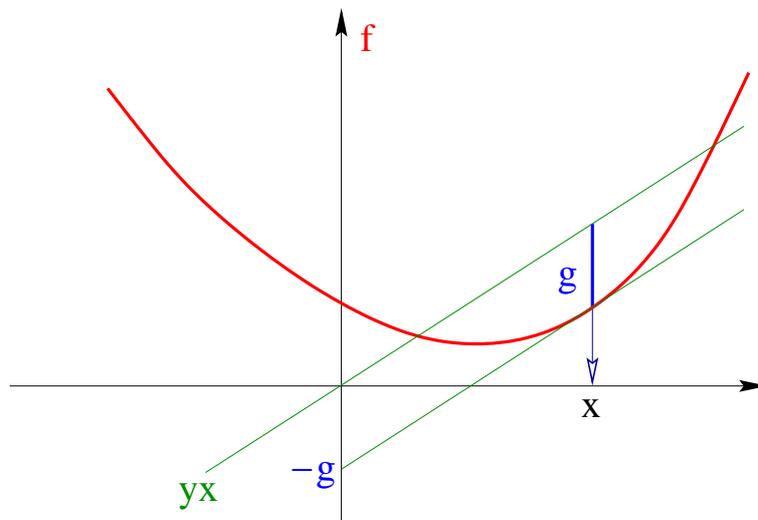
die wegen der Monotonität von $f'(x)$ für alle y im Wertebereich der Funktion $f'(x)$ eine eindeutige Lösung $x(y)$ besitzt, mit der die Legendretransformierte sich als

$$g(y) = y \cdot x(y) - f(x(y)) \quad (12.3)$$

angeben läßt. Unter Benutzung von (12.2) finden wir nunmehr

$$g'(y) = x + y \cdot \frac{dx}{dy} - f'(x) \cdot \frac{dx}{dy} = x(y). \quad (12.4)$$

Die Gleichung $g'(y) = x$ ist also die Umkehrung der Gleichung (12.2) und aufgrund der Symmetrie von (12.3) identifizieren wir die Funktion $f(x)$ als die Legendretransformierte von $g(y)$ (**Dualität**).



Falls die Funktion f von einem weiteren Parameter a abhängt, $f = f(x, a)$, erhält auch die Lösung $x = x(y, a)$ von (12.2) und damit $g(y, a)$ nach (12.3) eine entsprechende Abhängigkeit. Eine Kompensation in Analogie zu (12.4) führt dann auf die einfache Beziehung

$$\frac{\partial g}{\partial a} = y \cdot \frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{\partial f}{\partial a} \quad (12.5)$$

zwischen den partiellen Ableitungen der dualen Partnerfunktionen.

Die Verallgemeinerung der Legendretransformation auf Funktionen mehrerer Variablen $f(\mathbf{x})$ geschieht in völliger Analogie zur obigen Definition, wobei die Forderung der Konvexität durch die **positive Definitheit der Jacobi-Matrix** von f zu ersetzen ist.

Bei unserer Anwendung der Legendretransformation auf die Lagrangesche Dynamik spielen die Lagrangefunktion L die Rolle der obigen Funktion f und die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ die Rolle der obigen Variablen x . Nach (9.26) und (9.30) ist die Lagrangefunktion ein Polynom zweiten Grades in den generalisierten Geschwindigkeiten. Dies gilt auch, wenn das Potential geschwindigkeitsabhängige Terme wie in (11.5) enthält. Wir haben daher immer eine lineare Beziehung

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathcal{A}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \quad (12.6)$$

zwischen den Impulsen und den Geschwindigkeiten, die der Beziehung (12.2) entspricht. Die Jacobische Matrix in (12.6) ist dabei durch die Matrixelemente

$$(\mathcal{A})_{i,j} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \mathcal{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \quad (i, j = 1, \dots, f) \quad (12.7)$$

gegeben. Da die f Tangentenvektoren $\partial \mathbf{x} / \partial q_i$ an die Zwangsmannigfaltigkeit linear unabhängig sein sollen und da die Massen m_i positiv sind, ist die Jacobimatrix \mathcal{A} positiv definit. Um dies einzusehen, schreiben wir die quadratische Form

$$\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathcal{A} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \left| \sum_{i=1}^f \sqrt{\mathcal{M}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right|^2 = |\mathbf{w}|^2 \quad (12.8)$$

als Betragsquadrat des Vektors \mathbf{w} . Mit den f Vektoren $\partial \mathbf{x} / \partial q_i$ sind auch die f Vektoren $\sqrt{\mathcal{M}} \cdot \partial \mathbf{x} / \partial q_i$ linear unabhängig. Denn die $(3n \times f)$ -Matrizen $(\partial x_\mu / \partial q_i)$ und $(\sqrt{m_\mu} \partial x_\mu / \partial q_i)$ haben denselben (Spalten- und Zeilen-)Rang f . Daher kann der Vektor \mathbf{w} nur dann der Nullvektor sein, wenn alle \dot{q}_i verschwinden.

Wegen der Definitheit der Matrix \mathcal{A} ist die Beziehung (12.6) zwischen den Impulsen und Geschwindigkeiten eindeutig umkehrbar:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathcal{A}^{-1} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{b}). \quad (12.9)$$

Damit können wir die Legendretransformierte der Lagrangefunktion L als **Hamiltonfunktion**,

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \doteq \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (12.10)$$

definieren. Hierbei sind auf der rechten Seite die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ mittels (12.9) durch die Impulse \mathbf{p} auszudrücken.

An die Stelle der Lagrangeschen (11.2) treten im Hamiltonformalismus die **Hamiltonschen Bewegungsgleichungen**

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Die erste Bewegungsgleichung in (12.11) entspricht der allgemeinen Beziehung (12.4) für Legendretransformierte und gibt hier einfach die Beziehung (12.9) zwischen Geschwindigkeiten und Impulsen wieder. Zur Verdeutlichung leiten wir sie noch einmal in völliger Analogie zu (12.4) durch Differentiation von (12.10) unter Benutzung der Definition der Impulse (11.14) ab:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial p_i} = \dot{q}_i. \quad (12.12)$$

Die zweite Bewegungsgleichung in (12.11) ergibt sich durch Differentiation von (12.10) nach \mathbf{q} , wenn man die Gültigkeit der Lagrangeschen Bewegungsgleichung (11.2) voraussetzt (und auch (11.14) wieder benutzt). Um bei der Herleitung dieser Gleichung die Bedeutung der auftretenden partiellen Ableitungen unmißverständlich zu machen, werden wir die festzuhaltenden Größen in Zweifelsfällen als Index hinzufügen. Die Ableitung der zweiten Gleichung in (12.11) sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial q_i} \right)_{\mathbf{p}} - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right)_{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial q_i} \right)_{\mathbf{p}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial q_i} \right)_{\mathbf{p}} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \\ &= -\dot{p}_i. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Hier wurde in der ersten Zeile die Ableitung der allgemeinen Beziehung (12.5) wiederholt, während die zweite Zeile durch Anwendung der Lagrangegleichung folgte. Als eine zusätzliche Beziehung halten wir noch die Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (12.14)$$

fest, die ebenfalls ein Beispiel für die allgemeine Beziehung (12.5) ist. Auch hier fügen wir zum besseren Verständnis noch einmal die Ableitung bei:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} - \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (12.15)$$

Wir geben im folgenden einige einfache Beispiele für den Übergang von den Lagrangeschen zu den Hamiltonschen Gleichungen. Als erstes Beispiel betrachten wir einen Massenpunkt mit der Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}, t), \quad (12.16)$$

wobei wir als generalisierte Koordinaten die kartesischen Koordinaten $\mathbf{r} = (x, y, z)$ wählen. Die generalisierten Impulse

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m \dot{\mathbf{r}} \quad (12.17)$$

sind dann im wesentlichen (d.h. bis auf den multiplikativen Faktor m) identisch mit den Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{r}}$ und die Hamiltonfunktion ist durch

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}, t) \quad (12.18)$$

gegeben. Für dieses Beispiel ist die Beziehung zwischen den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \quad (12.19)$$

und den Lagrangegleichungen

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \quad (12.20)$$

natürlich völlig trivial.

Dies ändert sich jedoch, wenn man für dieselbe Lagrangefunktion (12.16) Kugelkoordinaten als generalisierte Koordinaten wählt. Sie lautet dann

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - V(r, \vartheta, \varphi, t), \quad (12.21)$$

die generalisierten Impulse sind

$$p_r = m \dot{r}, \quad p_{\vartheta} = m r^2 \dot{\vartheta}, \quad p_{\varphi} = m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \quad (12.22)$$

und die Hamiltonfunktion ist

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_{\vartheta}^2}{r^2} + \frac{p_{\varphi}^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r, \vartheta, \varphi, t). \quad (12.23)$$

Die generalisierten Impulse p_{ϑ} und p_{φ} haben hier die Bedeutung von Drehimpulsen.

Als drittes Beispiel betrachten wir die Lagrangefunktion (11.9) eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld. In kartesischen Koordinaten erhalten wir für den Impuls

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad \text{oder} \quad \mathbf{v} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \quad (12.24)$$

und damit die wichtige Hamiltonfunktion

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi. \quad (12.25)$$

Am Ende von Kapitel 11 hatten wir gezeigt, daß die Hamiltonfunktion eine Erhaltungsgröße ist, wenn die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt (siehe (11.43) und (11.41)). Wegen (12.14) können wir daraus die folgende Aussage ableiten:

Die Hamiltonfunktion ist eine Erhaltungsgröße, wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängt:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0. \quad (12.26)$$

Außerdem konnten wir die erhaltene Hamiltonfunktion mit der Energie identifizieren, wenn die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ und die Parametrisierung $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ durch die generalisierten Koordinaten zeitunabhängig sind (siehe (11.45)). Wir betonen, daß die Gleichung (12.26) nicht ausreicht, um die Hamiltonfunktion mit der Energie identifizieren zu können. Man muß zusätzlich die Zeitunabhängigkeit der Parametrisierung $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ voraussetzen. Dies soll durch das folgende Gegenbeispiel belegt werden. Wir betrachten dazu wieder einen Massenpunkt mit der Lagrangefunktion (12.16) und verschwindendem Potential V und definieren die generalisierten Koordinaten \mathbf{q} durch die zeitabhängige Beziehung

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + \mathbf{v} \cdot t \quad (12.27)$$

mit einem festen Vektor \mathbf{v} . Die Lagrangefunktion

$$L = T = \frac{m}{2} (\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{v})^2 \quad (12.28)$$

ist dann identisch mit der Energie des Systems. Mit den generalisierten Impulsen

$$\mathbf{p} = m(\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{v}) \quad (12.29)$$

bleibt die Hamiltonfunktion

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L = \mathbf{p} \cdot (\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{v} - \mathbf{v}) - L = T - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \quad (12.30)$$

wie die Lagrangefunktion zeitunabhängig und damit erhalten, hat aber nicht die Bedeutung der Energie.

Ob die Hamiltonfunktion (12.25) eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld als die Energie des Teilchens interpretiert werden kann, kann man erst im Rahmen der Elektrodynamik entscheiden, indem man die Energie des elektromagnetischen Feldes mitbetrachtet.

Eine **zyklische Koordinate** q_i , die wir im Lagrangeformalismus durch die Gleichung (11.15) definiert hatten, kann anhand der ersten Zeile der Gleichung (12.13) im Hamiltonformalismus durch die Bedingung

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} \equiv 0 \quad (12.31)$$

identifiziert werden. Die zweite Hamiltongleichung in (12.11) liefert uns für jede zyklische Koordinate q_i in völliger Übereinstimmung mit (11.16) einen Erhaltungssatz für den zugehörigen generalisierten Impuls p_i :

$$\mathbf{p}_i(t) = \alpha_i. \quad (12.32)$$

Die Handhabung zyklischer Koordinaten ist im Hamiltonformalismus besonders bequem, weil in der Hamiltonfunktion der Impuls p_i durch die Konstante α_i ersetzt werden kann und damit die Zahl der Freiheitsgrade explizit um 1 erniedrigt ist. Die explizite Bestimmung der Geschwindigkeit \dot{q}_i über die erste Hamiltonsche Gleichung in (12.11) und damit der zeitlichen Entwicklung $q_i(t)$ erfordert allerdings die Kenntnis der zeitlichen Entwicklung der anderen Koordinaten. Eine komplette Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ist jedoch sofort erreichbar, wenn die generalisierten Koordinaten so gewählt werden können, daß sie allesamt zyklisch sind. Dann kann der ganze Impulsvektor $\mathbf{p}(t)$ durch den konstanten Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ ersetzt werden und die erste Zeile in (12.11)

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \doteq \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha}, t) \quad (12.33)$$

liefert nach Zeitintegration die explizite Lösung

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha}, t') dt'. \quad (12.34)$$

Die Integrationskonstanten $\boldsymbol{\alpha}$ können über die Gleichung (12.33) mit den Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$ verknüpft werden.

Mit den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (12.11) sind die f Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung (11.2) durch $2f$ Bewegungsgleichungen erster Ordnung ersetzt worden. Die auf diesen Bewegungsgleichungen fußende Beschreibung mechanischer Systeme betrachtet die generalisierten Koordinaten und Impulse (\mathbf{q}, \mathbf{p}) als $2f$ unabhängige Größen, die den Zustand des Systems zu jedem Zeitpunkt festlegen. Der $2f$ -dimensionale Raum, in dem die Vektoren (\mathbf{q}, \mathbf{p}) liegen, wird der **Phasenraum** des Systems genannt. Jeder mögliche Zustand des Systems entspricht damit einem Punkt im Phasenraum. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (12.11) definieren in jedem Punkt des Phasenraums einen Vektor $(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}})$ der **Phasenraumgeschwindigkeit** und ihre eindeutige Lösung erzeugt eine **Trajektorie** $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ im Phasenraum, die ein Bild der Bewegung des Systems

im Laufe der Zeit ist. Durch (12.11) wird im Phasenraum ein **Geschwindigkeitsfeld**

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \doteq \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) \quad (12.35)$$

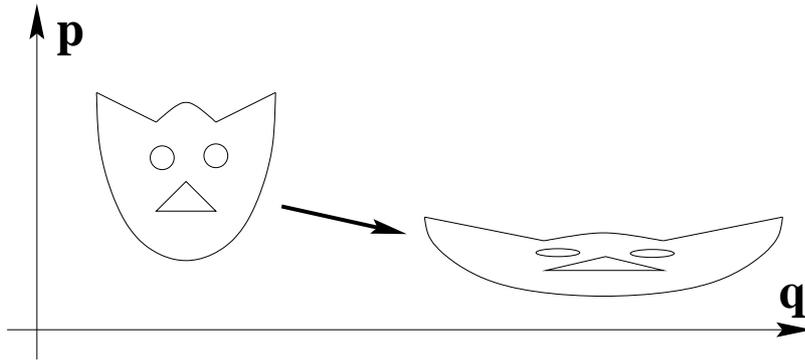
definiert, das zeitabhängig sein kann, aber für stationäre Hamiltonfunktionen (12.26) zeitunabhängig ist. Das Geschwindigkeitsfeld (12.35) hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß seine $2f$ -dimensionale Divergenz verschwindet:

$$\operatorname{div} \mathcal{V} \doteq \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0. \quad (12.36)$$

Aus dieser Eigenschaft folgt das interessante **Liouville-Theorem**:

Die durch die Hamiltonschen Gleichungen bestimmte Bewegung im Phasenraum ist volumenerhaltend.

Phasenraumgebiete werden bei der Bewegung zwar verzerrt, wie in der folgenden Figur angedeutet, ihr Volumen bleibt dabei jedoch unverändert. Die Phasenraum-bewegung gleicht daher derjenigen einer **inkompressiblen Flüssigkeit**.



Zum Beweis des Liouville-Theorems bezeichnen wir Phasenraumpunkte durch $2f$ -dimensionale Vektoren \mathbf{x} bzw. \mathbf{y} . Wir nehmen an, das System bewege sich vom Punkt \mathbf{x} zur Zeit t in den Punkt \mathbf{y} zur Zeit $t + \Delta t$. Dann gilt

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathcal{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \Delta t + O((\Delta t)^2). \quad (12.37)$$

Ein Phasenraumgebiet $G(t)$ geht dementsprechend nach dem Zeitintervall Δt in das Gebiet $G(t + \Delta t)$ über. Die Berechnung des Volumens des Gebietes $G(t + \Delta t)$ durch ein $2f$ -dimensionales Integral über das Gebiet $G(t + \Delta t)$ kann in ein Integral über das Gebiet $G(t)$ überführt werden, wenn man die Gleichung (12.37) als Variablentransformation benutzt. Unter Verwendung der Jacobi-Matrix dieser Transformation ergibt sich die Beziehung

$$V(t + \Delta t) \doteq \int_{G(t+\Delta t)} d^{2f} \mathbf{y} = \int_{G(t)} \det \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right) d^{2f} \mathbf{x}. \quad (12.38)$$

Die Jacobi-Matrix der Transformation (12.37) hat die Gestalt

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = I + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta t + O((\Delta t)^2) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} \Delta t & \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \Delta t & \cdots \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_1} \Delta t & 1 + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \Delta t & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + O((\Delta t)^2). \quad (12.39)$$

Zur Determinante dieser Matrix tragen in der Ordnung Δt nur ihre Diagonalelemente bei und man erhält

$$\det \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = 1 + \operatorname{div} \mathcal{V} \cdot \Delta t + O((\Delta t)^2) = 1 + O((\Delta t)^2). \quad (12.40)$$

Aus (12.38) folgern wir daher

$$V(t + \Delta t) = V(t) + O((\Delta t)^2) \quad \text{oder} \quad V'(t) = 0. \quad (12.41)$$

Dies beweist das Liouville-Theorem, das interessante Konsequenzen hat und insbesondere in der statistischen Mechanik eine bedeutende Rolle spielt.

Als Beispiel für die Nützlichkeit des Liouville-Theorems erwähnen wir das **Poincarésche Wiederkehrtheorem**:

Jedes Hamiltonsche System, das auf ein endliches Gebiet des Phasenraums beschränkt ist, kehrt irgendwann beliebig nahe an seinen Ausgangspunkt zurück.

Dieses Theorem bezieht sich zum Beispiel auf Systeme mit erhaltener Energie, die durch ein geeignetes Potential räumlich eingeschränkt sind, also etwa auf ein Gas in einem Behälter. Ein durch die Bedingung $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \leq E$ definiertes Gebiet Ω des Phasenraums, in dem sich alle Trajektorien des Systems mit Energien $\leq E$ bewegen, hat dann ein endliches Volumen $\mu(\Omega) < \infty$. Man betrachtet ein Teilgebiet $B \subset \Omega$, das ein beliebig kleines Volumen $\mu(B)$ haben darf. Die oben etwas leger formulierte Aussage des Wiederkehrtheorems ist dann, daß fast alle Trajektorien (im Sinne der Maßtheorie), die von einem Punkt in B ausgehen, nach genügend langer Zeit nach B zurückkehren (und zwar sogar beliebig oft).

Aufgrund der Hamiltonschen Bewegung geht jeder Punkt des Gebietes Ω nach einem beliebigen festen Zeitintervall τ in einen anderen Punkt des Gebietes Ω über. Wir nennen die dadurch definierte stetige, umkehrbar eindeutige und volumenerhaltende Abbildung von Ω auf sich g . Zum Beweis des Wiederkehrtheorems betrachten wir die Gebiete in Ω , die nach j Zeitschritten τ in das oben genannte Gebiet B übergehen, d.h. die Urbilder $g^{-j}B$ des Gebietes B unter der wiederholten Anwendung der Abbildung g^{-1} . Wir konstruieren daraus die Folge U_n von Mengen

$$U_n \doteq \bigcup_{j=n}^{\infty} g^{-j}B \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (12.42)$$

U_n ist die Menge aller Punkte in Ω , die nach n oder mehr Zeitschritten τ nach B gelangen. Es gelten dann offensichtlich die Untermengenrelationen

$$B \subset U_0 \tag{12.43}$$

und

$$U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots \tag{12.44}$$

Schließlich bilden wir daraus die Durchschnittsmenge (Wiederkehrmenge)

$$W \doteq B \cap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n \right), \tag{12.45}$$

die aus allen Punkten in B besteht, die nach beliebig langer Zeit noch einmal nach B zurückkehren. Wir werden zeigen, daß die Menge W dasselbe Volumen wie die Menge B hat.

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Beobachtung, daß wegen $gU_n = U_{n-1}$ und der Volumenerhaltung unter der Abbildung g die Mengen U_n alle das gleiche endliche Volumen haben:

$$\mu(U_0) = \mu(U_1) = \mu(U_2) = \dots \leq \mu(\Omega) < \infty. \tag{12.46}$$

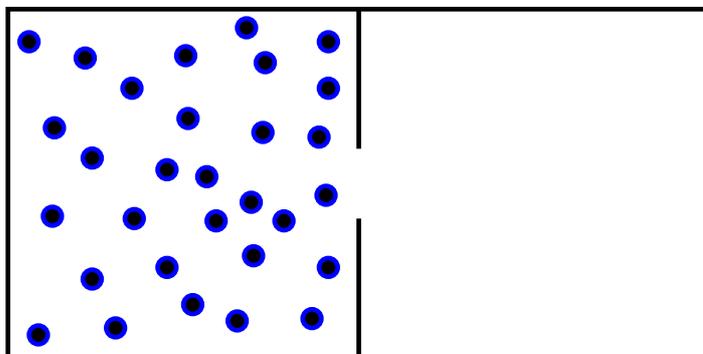
Wegen der Schachtelungseigenschaft (12.44) folgt dann aber für die Differenzmengen $U_{n-1} \setminus U_n$ das Volumen

$$\mu(U_{n-1} \setminus U_n) = 0 \tag{12.47}$$

und damit wegen (12.43) für das Volumen der Wiederkehrmenge

$$\mu(W) = \mu(B \cap U_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_{n-1} \setminus U_n) = \mu(B). \tag{12.48}$$

Das Wiederkehrtheorem hat historisch eine wichtige Rolle bei der Diskussion der **Irreversibilität** in der statistischen Mechanik gespielt. Wenn ein Gas sich zu Anfang wie unten gezeigt in der linken Hälfte einer Doppelkammer aufhält, wird es sich erfahrungsgemäß irreversibel in die ganze Doppelkammer ausdehnen und nie wieder ausschließlich in der linken Hälfte angetroffen werden. Das durch das Wiederkehrtheorem erzeugte Paradoxon wird durch die kosmische Länge der Wiederkehrzeiten aufgelöst.



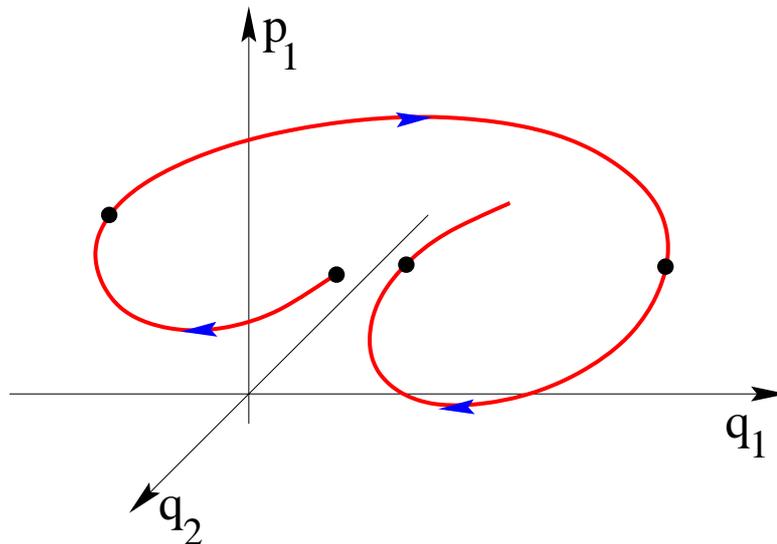
Die Hamiltonsche Bewegung im Phasenraum kann sehr komplex sein. Es gibt deshalb nur wenige Aussagen von allgemeiner Gültigkeit darüber. Für den Fall eines einzigen Freiheitsgrades hatten wir schon am Ende von Kapitel 3 gezeigt, daß jedes Kraftfeld ein Potential besitzt und daß die daraus resultierende Energieerhaltung immer eine vollständige Lösung der Bewegungsgleichung durch Integration ermöglicht. Schon für nur zwei Freiheitsgrade gilt eine analoge Aussage nicht. Selbst wenn aufgrund konservativer Kräfte die Energie erhalten ist und die Hamiltonfunktion die einfache Form

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(q_1, q_2) \quad (12.49)$$

hat, kann die Bewegung im allgemeinen nicht durch Integrationen gewonnen werden. Die Flächen konstanter Energie im 4-dimensionalen Phasenraum sind 3-dimensionale Hyperflächen, die sich der direkten Anschauung entziehen. Zur Verdeutlichung der Bewegung auf diesen Hyperflächen kann man anstelle der vollständigen Trajektorien nur diejenigen Punkte auf den Trajektorien betrachten, für die z.B. eine der Koordinaten verschwindet. Bei vorgegebener Energie E kann man z.B. jedem Punkt der zweidimensionalen (q_1, p_1) -Ebene, für den der Phasenraumpunkt (q_1, q_2, p_1, p_2) mit $q_2 = 0$ und $p_2 \geq 0$ ($|p_2|$ durch die Energie festgelegt) auf der Hyperfläche der Energie E liegt, die Projektion

$$(q'_1, p'_1) = \mathcal{P}(q_1, p_1) \quad (12.50)$$

desjenigen Phasenraumpunktes auf die (q_1, p_1) -Ebene zuordnen, für den die Trajektorie das nächste Mal die Hyperebene $q_2 = 0$ schneidet. Die dadurch definierte Abbildung \mathcal{P} heißt **Poincaré-Abbildung**.



Den Spezialfall zweier harmonischer Oszillatoren

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{m_1\omega_1^2}{2}q_1^2 + \frac{m_2\omega_2^2}{2}q_2^2 \quad (12.51)$$

von (12.29) hatten wir im wesentlichen schon in Kapitel 4 diskutiert. Hier lautet die allgemeine Lösung

$$q_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad q_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (12.52)$$

Bei vorgegebener Energie E_1 des ersten Oszillators liegen alle Punkte (q_1, p_1) auf der Ellipse

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{m_1 \omega_1^2}{2} q_1^2 = E_1. \quad (12.53)$$

Die Durchstoßpunkte mit $q_2(t_n) = 0$ werden für die Zeiten $t_n = (\pi n - \varphi_2)/\omega_2$ erreicht. Sie bilden eine endliche Punktmenge auf der Ellipse (12.53), falls das Verhältnis ω_1/ω_2 rational ist, ansonsten eine unendliche dichte Punktmenge.

Das bei diesem einfachen Beispiel gefundene Verhalten erweist sich als typisch für den Fall, daß das System (12.49) eine zweite Erhaltungsgröße besitzt. Bei willkürlicher Wahl der potentiellen Energie $V(q_1, q_2)$ gibt es jedoch im allgemeinen keine zweite Erhaltungsgröße. Wenn man z.B. die harmonische Hamiltonfunktion durch nichtharmonische Terme ergänzt, kann man im allgemeinen nicht mit der Existenz einer zweiten Erhaltungsgröße rechnen. Ein viel untersuchtes Beispiel dafür ist das **Hénon–Heiles–System** mit der Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \left(q_2 + \frac{1}{2}\right) \left(q_1^2 - \frac{(q_2 - 1)^2}{3}\right) + \frac{1}{6} \\ &= \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} + q_1^2 q_2 - \frac{q_2^3}{3}. \end{aligned} \quad (12.54)$$

Die zugehörigen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_1 = -q_1 - 2q_1 q_2, \quad \dot{p}_2 = -q_2 - q_1^2 + q_2^2. \quad (12.55)$$

Solche Systeme zeigen in weiten Teilen des Phasenraums eine extrem empfindliche Abhängigkeit der Bewegung von den Anfangsbedingungen nach langen Zeiten, die man mit dem Schlagwort **deterministisches Chaos** beschreibt. Die Dynamik dieser Systeme ist nicht als Kuriosität zu betrachten, sondern stellt vielmehr im Gegenteil den Normalfall des Verhaltens dynamischer Systeme dar.

13. Kanonische Transformationen

Wir hatten schon früher gesehen, daß ein Problem durch geschickte Wahl der generalisierten Koordinaten sehr vereinfacht werden kann. Insbesondere konnte die Zahl der zyklischen Koordinaten, z.B. durch Benutzung von Massenmittelpunktkoordinaten oder geeigneter Winkelkoordinaten, erhöht werden. Es stellt sich die Frage, wie weit man auf diese Weise kommen kann. Für welche Systeme und mit welchen Methoden kann man etwa erreichen, daß alle Koordinaten zyklisch sind?

Mit einer **Punkttransformation**

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \quad (13.1)$$

mit der man die Koordinaten \mathbf{q} im Konfigurationsraum durch neue Koordinaten \mathbf{Q} ersetzt, kann man selbst im Falle eines einzigen Freiheitsgrades $f = 1$ eine nichtzyklische Koordinate nicht zyklisch machen. Die Hamiltonsche Dynamik im Phasenraum erlaubt es jedoch, eine erweiterte Klasse von Transformationen, die **kanonischen Transformationen**, zu betrachten.

Bevor wir uns den kanonischen Transformationen zuwenden, werden wir ein **modifiziertes Hamiltonsches Prinzip** aufstellen, aus dessen Stationarität die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (12.11) folgen. In Analogie zum Wirkungsintegral (10.15) betrachten wir hier unter Beachtung der Beziehung (12.10) zwischen der Lagrangefunktion und der Hamiltonfunktion das **modifizierte Wirkungsintegral**

$$I[\mathbf{q}, \mathbf{p}] \doteq \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)] dt. \quad (13.2)$$

Dieses Wirkungsintegral ist als Funktion der $2f$ unabhängigen Zeitfunktionen $\mathbf{q}(t)$ und $\mathbf{p}(t)$ im Zeitintervall (t_1, t_2) zu betrachten, wobei man den Anfangs- und den Endpunkt der Phasenraumbewegung durch die Nebenbedingungen

$$\mathbf{q}(t_i) = \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{p}(t_i) = \mathbf{p}_i \quad (i = 1, 2) \quad (13.3)$$

fixiert. Man betrachtet also im Zeitintervall (t_1, t_2) alle Trajektorien im Phasenraum zwischen den beiden durch (13.3) gegebenen Punkten. Das Variationsprinzip fordert dann die Stationarität des Wirkungsintegrals (13.2).

In Analogie zu Kapitel 10 erhalten wir für die erste Variation von I

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{p}(t) \cdot \delta \dot{\mathbf{q}}(t) - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{p}(t) - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q}(t) \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) \cdot \delta \mathbf{p}(t) - \left(\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) \cdot \delta \mathbf{q}(t) \right] dt + \mathbf{p}(t) \cdot \delta \mathbf{q}(t) \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Da der Randterm am Ende der zweiten Zeile von (13.4) wegen der Nebenbedingung $\delta \mathbf{q}(t_i) = 0$ aus (13.3) verschwindet, folgt aus $\delta I = 0$ die Gültigkeit der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (12.11).

Die zweite Nebenbedingung $\delta \mathbf{p}(t_i) = 0$ aus (13.3) wurde bei der obigen Herleitung gar nicht verwendet, da das Wirkungsintegral (13.2) nicht symmetrisch in den Variablen \mathbf{q} und \mathbf{p} ist. Unter Verwendung der vollen Nebenbedingungen (13.3) findet man jedoch, daß das alternative Wirkungsintegral

$$\tilde{I}[\mathbf{q}, \mathbf{p}] \doteq \int_{t_1}^{t_2} [-\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \mathbf{q}(t) - H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)] dt = I - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (13.5)$$

bis auf eine additive Konstante identisch mit I ist. Die Stationarität beider Wirkungsintegrale führt deshalb auf dieselben Bewegungsgleichungen.

Wir wollen jetzt nach allgemeinen Phasenraumtransformationen suchen, die die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (12.11) invariant lassen. Dazu nehmen wir an, wir hätten neue generalisierte Koordinaten \mathbf{Q} und Impulse \mathbf{P} , aus denen die alten mittels der eindeutig umkehrbaren Abbildung

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \quad (13.6)$$

hervorgehen. Wenn

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), t) \quad (13.7)$$

die Hamiltonfunktion als Funktion der neuen Koordinaten und Impulse ist, sollen die Bewegungsgleichungen in den neuen Variablen wieder die Hamiltonsche Form

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}}, \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}} \quad (13.8)$$

haben. Diese Bewegungsgleichungen lassen sich auch aus einem modifizierten Hamiltonschen Prinzip mit dem Wirkungsintegral

$$J[\mathbf{Q}, \mathbf{P}] \doteq \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(t) - K(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t), t)] dt \quad (13.9)$$

in Analogie zu (13.2) oder dem Wirkungsintegral

$$\tilde{J}[\mathbf{Q}, \mathbf{P}] \doteq \int_{t_1}^{t_2} [-\dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) - K(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t), t)] dt = J - \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (13.10)$$

in Analogie zu (13.5) ableiten.

Bei vorgegebenen Randbedingungen (13.3), die nach (13.6) entsprechende Randbedingungen für die neuen Variablen festlegen, soll nun das Wirkungsintegral I genau dann stationär sein, wenn das Wirkungsintegral J stationär ist. Dies soll für alle Hamiltonfunktionen H und die nach (13.7) zugehörigen Hamiltonfunktionen K gelten. Das ist aber nur möglich, wenn das Differenzintegral

$$I - J = \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(t)] dt, \quad (13.11)$$

in dem die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ und $\dot{\mathbf{Q}}$, die ja durch die Hamiltonfunktionen bestimmt sind, beliebige Funktionen der Zeit sein können, nur von den Randbedingungen abhängt. Dazu muß aber der Integrand in (13.11) eine totale Zeitableitung sein, d.h. es muß eine Funktion $S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ mit

$$\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(t) = \frac{d}{dt} S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{Q}} \dot{\mathbf{Q}} \quad (13.12)$$

geben. Damit hängt

$$I - J = S_1(\mathbf{q}(t_2), \mathbf{Q}(t_2)) - S_1(\mathbf{q}(t_1), \mathbf{Q}(t_1)) \quad (13.13)$$

tatsächlich nur von den Randbedingungen ab. Die Funktion S_1 spielt die Rolle einer **erzeugenden Funktion** für die gesuchten kanonischen Transformationen (13.6), die sich wegen (13.12) aus den partiellen Ableitungen

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{Q}} \quad (13.14)$$

der erzeugenden Funktion ergeben, indem man die zweite Gleichung in (13.14) nach $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ auflöst und dies dann in die erste Gleichung einsetzt.

Offenbar erhält man alternative erzeugende Funktionen, indem man anstelle der Wirkungsintegrale I und J die gleichwertigen Integrale \tilde{I} und \tilde{J} verwendet. So führt z.B. die zu (13.11) analoge Forderung nach der Konstanz des Differenzintegrals

$$I - \tilde{J} = \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] dt \quad (13.15)$$

auf die Beziehung

$$\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) = \frac{d}{dt} S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{P}} \dot{\mathbf{P}} \quad (13.16)$$

mit einer erzeugenden Funktion $S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P})$, aus der man die kanonische Transformation

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{P}} \quad (13.17)$$

gewinnt. Analog liefert die Betrachtung des Differenzintegrals $\tilde{I} - J$ eine Beziehung

$$-\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \mathbf{q}(t) - \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(t) = \frac{d}{dt} S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) = \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{Q}} \dot{\mathbf{Q}} \quad (13.18)$$

mit einer erzeugenden Funktionen vom Typ $S_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q})$ und kanonischen Transformationen

$$\mathbf{q} = -\frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{Q}} \quad (13.19)$$

und schließlich $\tilde{I} - \tilde{J}$ mittels

$$-\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \mathbf{q}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) = \frac{d}{dt} S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}) = \frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{P}} \dot{\mathbf{P}} \quad (13.20)$$

einen vierten Funktionstyp $S_4(\mathbf{p}, \mathbf{P})$ mit den kanonischen Transformationen

$$\mathbf{q} = -\frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{P}}. \quad (13.21)$$

Die verschiedenen Typen von erzeugenden Funktionen sind grundsätzlich äquivalent zueinander, weil sie (bei geeigneter Anpassung von Vorzeichenkonventionen) **Legendretransformierte** voneinander sind. So findet man z.B. für das totale Differential

$$d(S_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} - S_2) = (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q}) + (\mathbf{Q} \cdot d\mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q}) - (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{P}) = 0, \quad (13.22)$$

so daß S_2 mit $S_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ identifiziert werden kann, bis auf eine additive Konstante, die man aber ignorieren kann, weil sie die kanonische Transformation nicht beeinflusst. In praktischer Hinsicht kann ein bestimmter Typ von erzeugender Funktion vorzuziehen sein, wenn die für die Legendretransformation notwendige Umkehrfunktion nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann. Im übrigen kann man für jeden Freiheitsgrad unabhängig voneinander einen der vier Typen auswählen, so daß es insgesamt 4^f Typen von erzeugenden Funktionen gibt.

Wir werden im folgenden einige einfache Beispiele für kanonische Transformationen vorstellen. Als erstes Beispiel betrachten wir die erzeugte Funktion

$$S_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \pm c(\mathbf{q} + \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{b}), \quad (13.23)$$

die die kanonische Transformation

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{q}} = \pm c(\mathbf{P} + \mathbf{b}), \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{P}} = \pm c(\mathbf{q} + \mathbf{a}) \quad (13.24)$$

erzeugt, also eine **Translation** der generalisierten Koordinaten und Impulse, die auch die identische Transformation ($\mathbf{a} = 0, \mathbf{b} = 0$) enthält, eine **Skalentransformation**, die Koordinaten und Impulse reziprok zueinander skaliert, für $0 < c \neq 1$ sowie eine **Inversion** im Falle des Minuszeichens.

Die erzeugende Funktion

$$S = q_r Q_r + \sum_{i=1, \dots, f}^{i \neq r} q_i P_i \quad (13.25)$$

läßt, wie wir mit dem ersten Beispiel gelernt haben, die generalisierten Koordinaten und Impulse aller Freiheitsgrade unverändert bis auf diejenigen des r -ten

Freiheitsgrades, in dem S vom Typus S_1 ist. Anhand von (13.14) erhalten wir in diesem Freiheitsgrad die kanonische Transformation

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r} = Q_r, \quad P_r = -\frac{\partial S}{\partial Q_r} = -q_r, \quad (13.26)$$

die die Koordinate mit dem zugehörigen Impuls vertauscht, wobei die Vorzeichenumkehr in einer der beiden Beziehungen in (13.26), wie wir noch sehen werden, unverzichtbar ist.

Die erzeugende Funktion

$$S_3 = -\mathbf{g}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{p} \quad (13.27)$$

erzeugt nach (13.19) die **Punkttransformation** (siehe (13.1))

$$\mathbf{q} = -\frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{g}(\mathbf{Q}), \quad P_i = -\frac{\partial S_3}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial g_j}{\partial Q_i} p_j. \quad (13.28)$$

Hier sollte die Funktionalmatrix der Abbildung $\mathbf{g}(\mathbf{Q})$ invertierbar sein. Die lineare Transformation zwischen den alten und den neuen Impulsen in (13.28), die zwingend mit der Punkttransformation verbunden ist, kann man auch leicht im Rahmen des Lagrangeformalismus erhalten.

Mit dem nächsten Beispiel werden wir eine kanonische Transformation angeben, die die Hamiltonfunktion des **harmonischen Oszillators**

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad (13.29)$$

zyklisch macht. Eine dafür geeignete erzeugende Funktion ist

$$S_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2}q^2 \operatorname{ctg} Q. \quad (13.30)$$

Sie erzeugt nach (13.14) die kanonische Transformation

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q, \quad P = -\frac{\partial S_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}, \quad (13.31)$$

die, aufgelöst nach den alten Variablen, durch die Gleichungen

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \quad (13.32)$$

gegeben ist. Die Hamiltonfunktion hat in den neuen Variablen die Gestalt

$$K = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P, \quad (13.33)$$

die Koordinate Q ist also tatsächlich zyklisch und der Impuls P ist damit erhalten. Wir setzen $P(t) = \alpha$. Die Bewegungsgleichung für die neue Koordinate $\dot{Q} = \partial K / \partial P = \omega$ hat die allgemeine Lösung $Q = \omega t + \beta$, so daß wir anhand von (13.32) in der alten Koordinate die allgemeine Lösung

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta) \quad (13.34)$$

wiedergewonnen haben.

Im folgenden wollen wir kanonische Transformationen durch eine Reihe von weiteren Kriterien charakterisieren. Wir führen dazu den wichtigen Begriff der **Poissonklammer** ein. Zu je zwei Phasenraumfunktionen $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ und $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ definieren wir eine Poissonklammer als die Phasenraumfunktion

$$[F, G] \doteq \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}. \quad (13.35)$$

Wir notieren zunächst als offensichtliche Eigenschaften der Poissonklammer ihre **Antisymmetrie**

$$[F, G] = -[G, F], \quad (13.36)$$

die das generelle Verschwinden

$$[F, F] = 0 \quad (13.37)$$

der Poissonklammer jeder Phasenraumfunktion mit sich selbst zur Folge hat, sowie ihre **Linearität** (mit Konstanten α_i)

$$[F, \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2] = \alpha_1 [F, G_1] + \alpha_2 [F, G_2], \quad (13.38)$$

die sich wegen (13.36) auch auf die erste Variable F überträgt. Desweiteren gilt die **Produktregel**

$$[F, G_1 \cdot G_2] = [F, G_1] \cdot G_2 + G_1 \cdot [F, G_2], \quad (13.39)$$

die aus der Anwendung der Produktregel der Differentialrechnung auf die Ableitungen in (13.35) folgt und die ebenfalls auf die erste Variable übertragen werden kann. Die auf Phasenraumfunktionen anwendbare Operation

$$D_F \dots = [F, \dots] \quad (13.40)$$

hat nach (13.38) und (13.39) offenbar genau die Eigenschaften einer Differentiation und wird deshalb auch eine **Derivation** genannt.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Poissonklammer ist die **Jacobische Identität**

$$[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0, \quad (13.41)$$

deren Gültigkeit nicht auf den ersten Blick ersichtlich ist und deren Beweis wir hier nicht vorstellen werden.

Die Nützlichkeit der Poissonklammer für die Hamiltonsche Dynamik wird deutlich anhand der Identitäten

$$[\mathbf{q}, F] = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{und} \quad [\mathbf{p}, F] = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}, \quad (13.42)$$

aufgrund derer die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (12.11) sich sehr suggestiv als

$$\dot{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}, H], \quad \dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}, H] \quad (13.43)$$

schreiben lassen. Allgemeiner kann die totale Zeitableitung jeder Phasenraumfunktion $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ längs einer Trajektorie sehr elegant durch die Poissonklammer $[F, H]$ ausgedrückt werden. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}. \end{aligned} \quad (13.44)$$

Bemerkenswert einfach sind die folgenden speziellen Poissonklammern:

$$[q_i, p_j] = \delta_{i,j}, \quad [q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0. \quad (13.45)$$

Im folgenden werden wir Transformationen (13.6) auf neue Variable betrachten. Um für die Poissonklammern eine eindeutige Notation zu erzielen, werden wir in diesem Zusammenhang die Variablen, nach denen in den Poissonklammern (13.35) zu differenzieren ist, durch einen entsprechenden Index an die Klammern anhängen. Da die alten Variablen nach (13.6) Phasenraumfunktionen der neuen sind, gelten für sie nach (13.44) die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}, H]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}, \quad \dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}, H]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}. \quad (13.46)$$

Hier haben wir, abweichend von (13.7), aber im Sinne der Zwischenbemerkung zu den Gepflogenheiten physikalischer Notation in Kapitel 5, die Hamiltonfunktion in den neuen Variablen einfach wieder H genannt. Die Variablentransformation (13.6) ist jedoch kanonisch genau dann, wenn diese Bewegungsgleichungen für alle Hamiltonfunktionen identisch mit denen in (13.43) sind, d.h. wenn für alle Hamiltonfunktionen die Identitäten

$$[\mathbf{q}, H]_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = [\mathbf{q}, H]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}, \quad [\mathbf{p}, H]_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = [\mathbf{p}, H]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})} \quad (13.47)$$

gelten. Wir nehmen jetzt die nach kurzer Rechnung durch Anwendung der Kettenregel folgende Gleichung

$$\begin{aligned} [F, G]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})} &= \sum_{i,j=1}^f \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right) [q_i, p_j]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial q_j} [q_i, q_j]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial p_j} [p_i, p_j]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})} \right\} \end{aligned} \quad (13.48)$$

zur Hilfe. Aus ihr leitet man leicht angesichts des mit der Gleichung (13.47) formulierten Kriteriums die Äquivalenz der folgenden drei **Kriterien für kanonische Transformationen** ab:

Eine Phasenraumtransformation (13.6) ist kanonisch genau dann, wenn sie eine der drei folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) Invarianz der Poissonklammern

$$[F, G]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})} = [F, G]_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}, \quad (13.49)$$

für alle Paare von Phasenraumfunktionen F und G ,

(b) Invarianz der Poissonklammern (13.47) für alle Hamiltonfunktionen H ,

(c) Invarianz der speziellen Poissonklammern (13.45),

$$\begin{aligned} [q_i, p_j]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})} &= [q_i, p_j]_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = \delta_{i,j}, \\ [q_i, q_j]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})} &= [q_i, q_j]_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = 0, \\ [p_i, p_j]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})} &= [p_i, p_j]_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = 0. \end{aligned} \quad (13.50)$$

Da Poissonklammern also invariant unter kanonischen Transformationen sind, erübrigt sich im weiteren die für die obige Untersuchung kurzzeitig eingeführte Indizierung durch die verwendeten Phasenraumvariablen. Die speziellen Poissonklammern (13.45) geben eine besonders einfache Charakterisierung von Variablen, die durch kanonische Transformationen eingeführt werden können. Man nennt solche Variablen deshalb auch **kanonische Phasenraumvariable** und bezeichnet die Paare von Koordinaten und Impulsen, deren Poissonklammern den Wert 1 haben, als zueinander **kanonisch konjugiert**. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (12.11) bezeichnet man entsprechend als **kanonische Bewegungsgleichungen**.

Das Kriterium (13.50) erlaubt es leicht, für jede vorgegebene Phasenraumtransformation (13.6) nachzuprüfen, ob sie kanonisch ist. Wir erkennen jetzt anhand dieses Kriteriums, daß bei einer Vertauschung (13.26) von Koordinate und Impuls der Wechsel eines Vorzeichens essentiell ist, weil ohne diesen Vorzeichenwechsel die Poissonklammer $[q, p]$ den Wert -1 erhalten würde.

Mittels (13.50) können wir auch die Kanonizität einer Phasenraumtransformation (13.6) durch eine Eigenschaft ihrer Funktionalmatrix charakterisieren. Wir fassen dazu den f -dimensionalen Koordinatenvektor \mathbf{q} und den f -dimensionalen Impulsvektor \mathbf{p} zu einem $2f$ -dimensionalen Phasenraumvektor $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ zusammen und bilden analog $\mathbf{X} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Die Funktionalmatrix hat dann die Blockgestalt

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}} \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}} \end{pmatrix}, \quad (13.51)$$

deren vier Einträge jeweils $(f \times f)$ -Matrizen sind. Die transponierte Funktionalmatrix ist dann durch

$$\mathbf{J}^t = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)^t = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \right)^t & \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}} \right)^t \\ \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}} \right)^t & \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}} \right)^t \end{pmatrix} \quad (13.52)$$

gegeben. Wir definieren außerdem die Matrix

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (13.53)$$

wo $\mathbf{0}$ die $(f \times f)$ -Nullmatrix und \mathbf{I} die $(f \times f)$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Mit diesen drei Matrizen bilden wir nun ein Matrixprodukt und finden

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{J}^t = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^t + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}}\right)^t & -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^t + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}}\right)^t \\ -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^t + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}}\right)^t & -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^t + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}}\right)^t \end{pmatrix}. \quad (13.54)$$

Die Auswertung der entstandenen Matrizenprodukte führen wir am Beispiel des i, j -Matrixelementes der oberen rechten Teilmatrix vor:

$$\left\{ -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^t + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}}\right)^t \right\}_{i,j} = \sum_{k=1}^f \left(-\frac{\partial q_i}{\partial P_k} \frac{\partial p_j}{\partial Q_k} + \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \frac{\partial p_j}{\partial P_k} \right) = [q_i, p_j]. \quad (13.55)$$

Die rechte obere Teilmatrix ist also wegen (13.45) gleich der Einheitsmatrix \mathbf{I} . Die anderen drei Teilmatrizen berechnen sich ganz analog durch Austausch zwischen alten Koordinaten q und Impulsen p . Insgesamt erhalten wir somit die charakterisierende Gleichung

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{J}^t = \mathbf{G} \quad (13.56)$$

für die Funktionalmatrix kanonischer Transformationen. Matrizen mit der Eigenschaft (13.56) nennt man **symplektisch**.

Mit Hilfe des Determinantenmultiplikationssatzes bestimmt sich die Determinante der Funktionalmatrix einer kanonischen Transformation aus (13.56) zu $|\det \mathbf{J}| = 1$. Wenn die kanonische Transformation $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$ ein Gebiet B im \mathbf{X} -Phasenraum auf ein Gebiet b im \mathbf{x} -Phasenraum abbildet, gilt für die Volumina der beiden Gebiete

$$V(b) = \int_b d^{2f} \mathbf{x} = \int_B \left| \det \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right| d^{2f} \mathbf{X} = \int_B d^{2f} \mathbf{X} = V(B). \quad (13.57)$$

Wir haben also gezeigt:

Kanonische Transformationen erhalten das Phasenraumvolumen.

Angesichts des Liouvilleschen Theorems über die Erhaltung des Phasenraumvolumens bei der Hamiltonschen Bewegung eines Systems mit der Zeit (siehe Kapitel 12) wird man einen Zusammenhang zwischen dieser Bewegung und kanonischen Transformationen vermuten. Wenn das System zur Zeit t_0 die Anfangsbedingung $(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0)) = \mathbf{X}$ erfüllt, wird es sich zur Zeit t am Punkt $\mathbf{x} = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ im Phasenraum befinden. Die dadurch definierte Abbildung des Phasenraums $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$ auf sich ist tatsächlich eine kanonische Transformation. Um dies zu zeigen, führen wir eine infinitesimale Bewegung vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ durch. Wir nennen den Phasenraumpunkt, an dem sich das System zur

Zeit t befindet, (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) und den zur Zeit $t + \Delta t$ nennen wir (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Dann gilt mit den Bewegungsgleichungen (13.43)

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + ([\mathbf{Q}, H], [\mathbf{P}, H])\Delta t + O((\Delta t)^2). \quad (13.58)$$

Indem wir dies in die Gleichung (13.55) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} [q_i, p_j] &= [Q_i + [Q_i, H]\Delta t, P_j + [P_j, H]\Delta t] \\ &= \delta_{ij} + ([Q_i, [P_j, H]] + [[Q_i, H], P_j])\Delta t + O((\Delta t)^2) \\ &= \delta_{ij} + ([Q_i, [P_j, H]] + [P_j, [H, Q_i]])\Delta t + O((\Delta t)^2) \\ &= \delta_{ij} - [H, [Q_i, P_j]]\Delta t + O((\Delta t)^2) \\ &= \delta_{ij} + O((\Delta t)^2). \end{aligned} \quad (13.59)$$

Hier haben wir beim Übergang von der dritten auf die vierte Zeile die Jacobi-Identität (13.41) und das Verschwinden der Poissonklammer $[H, \delta_{i,j}]$ verwendet. Mit dem analogen Ergebnis für die drei anderen Teilmatrizen haben wir hiermit gezeigt, daß für die betrachtete infinitesimale Bewegung, deren Funktionalmatrix wir mit \mathbf{J}_i bezeichnen,

$$\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{J}_i^t = \mathbf{G} + O((\Delta t)^2) \quad (13.60)$$

gilt. Dies genügt aber, um die Kanonizität der Bewegungsabbildung für endliche Zeitintervalle (t_1, t_2) zu zeigen. Wir zerlegen dazu das Zeitintervall (t_1, t_2) in n gleiche Abschnitte der Länge Δt (mit $n\Delta t = t_2 - t_1$) und denken uns die Zeitentwicklung als Folge von n infinitesimalen Phasenraumabbildungen dargestellt. Für die Funktionalmatrix J der Gesamtabbildung machen wir dann mittels (13.60) die Abschätzung

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{J}^t = \mathbf{G} + n \cdot O((\Delta t)^2) = \mathbf{G} + O(\Delta t), \quad (13.61)$$

die sie für $\Delta t \rightarrow 0$ als symplektisch ausweist.

Wir fassen den damit gewonnenen Sachverhalt noch einmal zusammen. Wenn $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ die Lösung der Bewegungsgleichungen (12.11) bzw. (13.43) mit den Anfangsbedingungen $(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0)) = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ist, dann ist die durch $C_t(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ definierte Phasenraumabbildung für jede Zeit t eine kanonische Transformation.

Die Phasenraumabbildung $C_t(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ hängt von der Zeit ab und muß deshalb in leichter Abwandlung von (13.6) durch die Gleichungen

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \quad (13.62)$$

beschrieben werden. Die neue Hamiltonfunktion kann dann aber nicht mehr einfach identisch mit der alten sein wie in (13.7), weil die erzeugende Funktion für eine zeitabhängige kanonische Transformation (13.62) auch explizit von der Zeit abhängen muß. Anstelle von (13.11) lautet die Differenz der Wirkungsintegrale I und J jetzt

$$I - J = \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - H - \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(t) + K] dt \quad (13.63)$$

und anstelle von (13.12) muß die erzeugende Funktion die Bedingung

$$\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - H - \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(t) + K = \frac{d}{dt} S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \frac{\partial S_1}{\partial t} \quad (13.64)$$

erfüllen. Aus dieser Bedingung folgen für die kanonische Transformation der Phasenraumvariablen auch hier die Gleichungen (13.14), anstelle von (13.7) erhalten wir hier jedoch offenbar

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), t) + \frac{\partial S_i}{\partial t}. \quad (13.65)$$

Hier haben wir der erzeugenden Funktion den allgemeinen Index $i = 1, \dots, 4$ gegeben, weil der additive Zusatz $\partial S_i / \partial t$ für alle vier Typen von erzeugenden Funktionen von derselben Form ist. Mit der durch (13.65) definierten neuen Hamiltonfunktion K gelten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (13.8) für die neuen Variablen \mathbf{Q} und \mathbf{P} .

Für die oben diskutierte kanonische Transformation $C_t(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, die als neue Variable die Anfangswerte aller Trajektorien zu einer festen Zeit t_0 einführt, sind alle neuen Variablen \mathbf{Q} und \mathbf{P} unabhängig von der Zeit t . Daher kann nach (13.8) die neue Hamiltonfunktion nur noch von der Zeit abhängen. Eine solche Hamiltonfunktion $K = K(t)$ kann aber mittels einer Eichtransformation (11.12), die sich nach (12.10) von der Lagrangefunktion auf die Hamiltonfunktion überträgt, auf $K \equiv 0$ transformiert werden. Damit erhalten wir aus (13.65) unter Benutzung der ersten Gleichung in (13.14) die partielle Differentialgleichung

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{q}}, t\right) + \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0 \quad (13.66)$$

für die erzeugende Funktion $S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$, die unter dem Namen **Hamilton–Jacobi–Gleichung** bekannt ist.

Die Variablen \mathbf{Q} kommen in der Differentialgleichung (13.66) ja nicht explizit vor und sind deshalb als Parameter aufzufassen, die eine f -dimensionale Schar von Lösungen $S_1(\mathbf{q}, t)$ parametrisieren. Wir wollen annehmen, wir hätten eine Lösungsschar $S_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ der Hamilton–Jacobi–Gleichung (13.66) mit der Eigenschaft

$$\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{Q}} \neq 0 \quad (13.67)$$

für die $(f \times f)$ -Funktionalmatrix der erzeugenden Funktion S_1 gefunden, die garantieren soll, daß die Schar wirklich f -dimensional ist. Wir benutzen diese Lösung als erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation. Dann ist nach (13.65) und (13.66) die neue Hamiltonfunktion durch $K = 0$ gegeben und die neuen Koordinaten \mathbf{Q} und Impulse \mathbf{P} sind nach (13.8) alle zeitunabhängig. Um die rechte Gleichung in (13.14) nach den alten Koordinaten $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ auflösen zu können, brauchen wir die Bedingung (13.67) und die linke Gleichung in (13.14) gibt uns

dann die alten Impulse $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{Q})$ als Funktion der neuen Variablen. Wir haben damit den **Satz von Jacobi** bewiesen, nach dem jede wie oben spezifizierte Lösung der Hamilton–Jacobi–Gleichung eine kanonische Transformation erzeugt, die die Hamiltonschen Gleichungen löst.

Die Hamilton–Jacobi–Gleichung ist von großer Bedeutung für das Verständnis des Zusammenhangs zwischen quantenmechanischer **Wellenmechanik** und klassischer **Punktmechanik**.

Wir wollen im folgenden **Erhaltungsgrößen** dazu benutzen, dynamische Systeme mittels kanonischer Transformationen auf zyklische Koordinaten zu transformieren. Das Konstruktionsprinzip erläutern wir zunächst anhand eines Systems mit nur einem Freiheitsgrad, dessen Energie erhalten ist, so daß

$$H(q, p) = E \quad (13.68)$$

gilt. Wir betrachten die Erhaltungsgröße als den neuen Impuls $P \doteq E$ und denken uns die Gleichung (13.68) nach $p = p(q, P)$ aufgelöst. Mit der so erhaltenen Funktion $p(q, P)$ als Integranden bilden wir durch Integration nach q die erzeugende Funktion

$$S_2(q, P) \doteq \int_{q_0}^q p(q', P) dq', \quad (13.69)$$

die man auch als **Wirkungsintegral** bezeichnet. Durch diese Konstruktion garantieren wir die Gütigkeit der ersten Gleichung in (13.17),

$$p = \partial S_2 / \partial q, \quad (13.70)$$

und die zweite Gleichung in (13.17),

$$Q = \frac{\partial S_2}{\partial P}, \quad (13.71)$$

liefert uns die neue Koordinate Q . Da per Konstruktion die Hamiltonfunktion als Funktion der neuen Variablen durch $H = P$ gegeben und Q daher zyklisch ist, bleibt nur die Lösung der Bewegungsgleichung $\dot{Q} = \partial H / \partial P = 1$, die aber einfach $Q(t) = Q_0 + t$ lautet.

Zur praktischen Durchführung dieser Konstruktion muß man nur das Wirkungsintegral (13.69) berechnen und die Differentiation (13.71) ausführen. Wir führen die Rechnung wieder am Beispiel des harmonischen Oszillators vor und beginnen also mit

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = P. \quad (13.72)$$

Die erzeugende Funktion wird dann

$$\begin{aligned} S_2(q, P) &= \int_0^q \sqrt{2m(P - \frac{m\omega^2}{2} q'^2)} dq' = \frac{2P}{\omega} \int_0^{\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q} \sqrt{1 - x^2} dx \\ &= \frac{P}{\omega} (x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x) \Big|_{x=\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q}. \end{aligned} \quad (13.73)$$

Die neue Koordinate ist schließlich durch

$$Q = \frac{\partial S_2}{\partial P} = \left[\frac{1}{\omega} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + \frac{2P}{\omega} \sqrt{1-x^2} \left(\frac{x}{-2P} \right) \right] \Big|_{x=\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}q}} \quad (13.74)$$

$$= \frac{1}{\omega} \arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}q} \right)$$

gegeben, so daß

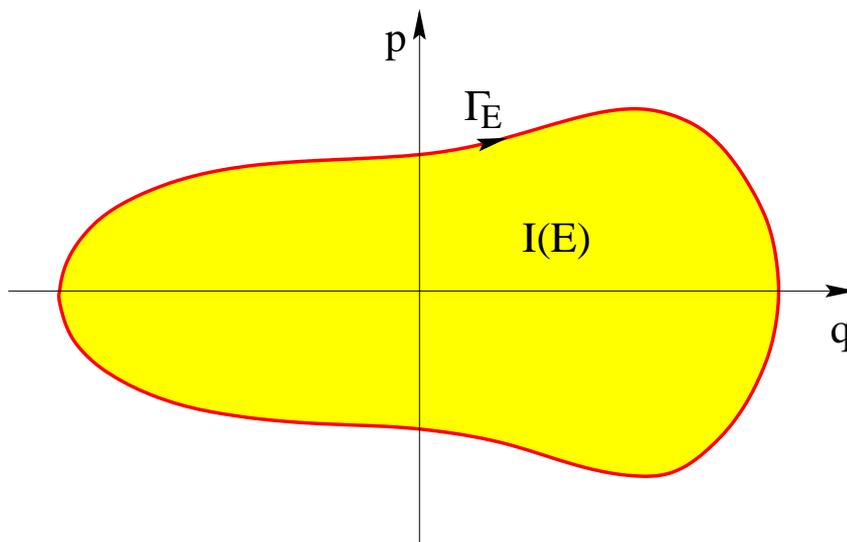
$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \sin \omega Q \quad (13.75)$$

gilt (siehe (13.32)).

Falls die durch (13.68) definierte Trajektorie Γ_E geschlossen ist, kann man anstelle der Energie E auch die **Wirkungsvariable** I , die durch das Integral

$$I(E) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_E} p(q, E) dq \quad (13.76)$$

gegeben ist, als neuen Impuls $P = I$ einführen. Hier ist zu berücksichtigen, daß $p(q, E)$ längs der Trajektorie keine eindeutige Funktion von q ist. Das Wirkungsintegral (13.76) ist dann gleich der in der folgenden Figur gezeigten von der Trajektorie Γ_E eingeschlossenen Fläche.



Wenn man bei der Definition der erzeugenden Funktion (13.69) die Integration von q_0 nach q in demselben Sinne durchführt, gelangt man nach n zusätzlichen Umläufen um Γ_E wieder nach q und die erzeugende Funktion wird eine mehrdeutige Funktion von q , deren Werte aber nach

$$S_2^{(n)}(q, I) = S_2^{(0)}(q, I) + 2\pi n I \quad (13.77)$$

durch das Wirkungsintegral I verknüpft sind. Die zur Wirkungsvariablen I gehörige Koordinate Q ist die **Winkelvariable**

$$\Theta = \frac{\partial S_2}{\partial I}. \quad (13.78)$$

Sie wächst bei jedem Umlauf um die Trajektorie Γ_E um 2π an und ist deshalb ebenfalls keine eindeutige Funktion von q , die alte Koordinate q ist jedoch eine 2π -periodische Funktion

$$q(\Theta + 2\pi, I) = q(\Theta, I) \quad (13.79)$$

der neuen Koordinate Θ . Da die Hamiltonfunktion

$$H = E(I) \quad (13.80)$$

zyklisch ist, definiert die Bewegungsgleichung für die neue Koordinate

$$\dot{\Theta} = \frac{\partial E}{\partial I} \doteq \omega(I) \quad (13.81)$$

eine Kreisfrequenz $\omega(I)$. Mit der Lösung $\Theta(t) = \Theta_0 + \omega(I)t$ von (13.81) führt die alte Koordinate q eine wegen (13.79) zeitlich periodische Bewegung mit dieser Kreisfrequenz aus.

Für unser obiges Beispiel des harmonischen Oszillators bringt die Einführung von Wirkungs- und Winkelvariablen nur geringfügige Änderungen gegenüber der Einführung der Energie als neuem Impuls. Aus (13.73) erhalten wir für das Wirkungsintegral (13.76) die Formel

$$I = \frac{1}{2\pi} \cdot 4 \cdot S_2\left(\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}, E\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot 4 \cdot \frac{E}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{E}{\omega}. \quad (13.82)$$

Energie E und Wirkungsvariable I sind also einfach proportional zueinander. Daher erhalten wir anstelle von (13.74) hier für die Winkelvariable

$$\Theta = \frac{\partial S_2}{\partial I} = \omega \frac{\partial S_2}{\partial E} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2I}}q\right) \quad (13.83)$$

und daher anstelle von (13.69) die kanonische Transformation (siehe (13.32))

$$q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin \Theta. \quad (13.84)$$

Die oben anhand eines Systems mit einem Freiheitsgrad diskutierten Konzepte lassen sich verallgemeinern. Wir betrachten daher jetzt ein System mit f Freiheitsgraden, das wir wieder durch f -dimensionale Koordinatenvektoren \mathbf{q} und Impulsvektoren \mathbf{p} beschreiben. Wir nehmen an, für dieses System seien f Erhaltungsgrößen $F_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ($\mu = 1, \dots, f$) bekannt, die wir in den f -dimensionalen Vektor \mathbf{F} zusammenfassen, so daß die Erhaltungssätze die Gestalt

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{F} \quad (13.85)$$

haben. Den Vektor \mathbf{F} wollen wir als neuen Impulsvektor \mathbf{P} einführen. Dies ist wegen der kanonischen Poissonklammern (13.45) nur möglich, wenn die Erhaltungsgrößen die Bedingungen

$$[F_\mu, F_\nu] = 0 \quad (\mu, \nu = 1, \dots, f) \quad (13.86)$$

erfüllen. Man sagt in diesem Falle, die f Erhaltungsgrößen seien **in Involution zueinander**.

Zur Berechnung einer erzeugenden Funktion wollen wir das Gleichungssystem (13.85) nach den Impulsen \mathbf{p} auflösen. Dazu müssen die Erhaltungsgrößen unabhängig voneinander sein, eine Eigenschaft, die wir durch die Forderung

$$\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}} \neq 0 \quad (13.87)$$

garantieren wollen. Analog zu (13.69) möchten wir die erzeugende Funktion durch das Wirkungsintegral

$$S_2(\mathbf{q}, \mathbf{F}) \doteq \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{p}(\mathbf{q}', \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{q}' \quad (13.88)$$

definieren. Dies kann aber nur gelingen, wenn das Integral in (13.88) wegunabhängig ist. Es stellt sich nunmehr heraus, daß dafür das Verschwinden der Poissonklammern (13.86) notwendig und (in einfach zusammenhängenden Gebieten) hinreichend ist. Da die Erhaltungssätze (13.85) nach Einsetzen der Umkehrfunktion $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{F})$ identisch in \mathbf{q} erfüllt sind, gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^f \frac{\partial F_\mu}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0 \quad (\mu, i = 1, \dots, f). \quad (13.89)$$

Indem wir in den Poissonklammern (13.86) die Ableitungen nach \mathbf{q} mittels (13.89) durch Ableitungen nach \mathbf{p} ersetzen, erhalten wir die Identitäten

$$[F_\mu, F_\nu] = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial q_k} \frac{\partial F_\nu}{\partial p_k} - \frac{\partial F_\mu}{\partial p_k} \frac{\partial F_\nu}{\partial q_k} \right) = \sum_{j,k=1}^f \frac{\partial F_\mu}{\partial p_k} \frac{\partial F_\nu}{\partial p_j} \left(\frac{\partial p_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \right). \quad (13.90)$$

Falls also die für die Wegunabhängigkeit der Integration (13.88) notwendigen und nach der Verallgemeinerung des **Stokesschen Integralsatzes** auf f Dimensionen in einfach zusammenhängenden Gebieten hinreichenden Bedingungen

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_j} = 0 \quad (j, k = 1, \dots, f) \quad (13.91)$$

erfüllt sind, muß auch (13.86) gelten. Da sich die Gleichungen (13.90) angesichts der Forderung (13.87) aber umkehren lassen,

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_j} = \sum_{\mu, \nu=1}^f \frac{\partial p_k}{\partial F_\mu} \frac{\partial p_j}{\partial F_\nu} [F_\mu, F_\nu], \quad (13.92)$$

sind (13.91) und (13.86) äquivalent.

Die durch (13.88) erzeugte kanonische Transformation ist durch die Gleichungen

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{F}), \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{F}} \quad (13.93)$$

gegeben. Da die neuen Impulse \mathbf{F} jedoch Erhaltungsgrößen sind, müssen die neuen Koordinaten zyklisch sein und die Hamiltonfunktion ist eine Funktion $H(\mathbf{F})$ allein der neuen Impulse. Die Hamiltonfunktion kann natürlich eine der Erhaltungsgrößen F_μ sein, aber das ist nicht erforderlich. Die Bewegungsgleichungen der neuen Koordinaten lauten schließlich

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{F}} \doteq \mathbf{v}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{F}) \quad (13.94)$$

und haben die einfache Lösung

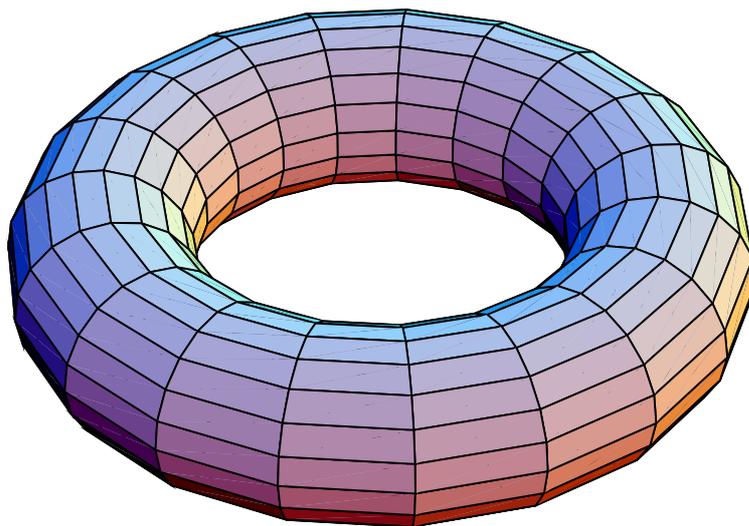
$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{v}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{F}) t + \mathbf{Q}_0. \quad (13.95)$$

Wir haben damit den folgenden Sachverhalt nachgewiesen:

Die Bewegungsgleichungen für Hamiltonsche Systeme mit f Freiheitsgraden, die f unabhängige und paarweise involutorische Erhaltungsgrößen besitzen, können durch Integrationen gelöst werden.

Man nennt solche Systeme daher auch **integrabel**.

Trajektorien integrierbarer Systeme mit f Freiheitsgraden liegen auf f -dimensionalen Hyperflächen im $2f$ -dimensionalen Phasenraum. Falls eine solche durch das Gleichungssystem (13.85) definierte Hyperfläche kompakt und zusammenhängend ist, kann man zeigen, daß sie einem **f -Torus** topologisch äquivalent ist. Die folgende Figur zeigt einen 2-Torus im 3-dimensionalen Raum.



Einen f -Torus kann man in einen $(f+1)$ -dimensionalen Vektorraum einbetten, wie man durch die folgende induktive Definition sieht. Ein 1-Torus ist ein Kreis,

der bei festem ρ_1 durch die Winkelvariable Θ_1 in kartesischen Koordinaten durch die Formeln

$$x_1 = \rho_1 \cos \Theta_1, \quad x_2 = \rho_1 \sin \Theta_1 \quad (\rho_1 > 0) \quad (13.96)$$

parametrisiert wird. Um einen $(f-1)$ -Torus zu einem f -Torus zu erweitern, macht man im $(f-1)$ -Torus die Ersetzung

$$\rho_{f-1} \rightarrow \rho_{f-1} - \rho_f + \rho_f \cos \Theta_f \quad (\rho_{f-1} > \rho_f > 0) \quad (13.97)$$

und führt die zusätzliche kartesische Koordinate

$$x_f = \rho_f \sin \Theta_f \quad (13.98)$$

ein.

Wir betrachten geschlossene Kurven mit Umlaufsinn auf einem f -Torus als äquivalent, wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen. Die Äquivalenzklassen solcher Kurven können dann durch f ganzzahlige Umlaufzahlen n_i ($i = 1, \dots, f$) charakterisiert werden. Es gibt demnach f inäquivalente geschlossene Kurven Γ_i mit Umlaufzahlen $n_j = \delta_{ij}$ ($j = 1, \dots, f$), die man als Basiskurven zur Zusammensetzung beliebiger geschlossener Kurven benutzen kann.

Für einen durch (13.85) bei vorgegebenen Werten \mathbf{F} der Erhaltungsgrößen bestimmten f -Torus $\mathcal{T}(\mathbf{F})$ definiert man unter Verwendung der f Basiskurven $\Gamma_i^{\mathbf{F}}$ und unter Anknüpfung an die erzeugende Funktion (13.88) die f **Wirkungsvariablen**

$$I_i(\mathbf{F}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_i^{\mathbf{F}}} \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{q} \quad (i = 1, \dots, f), \quad (13.99)$$

die nicht von der Wahl der Kurve innerhalb der Äquivalenzklasse $\Gamma_i^{\mathbf{F}}$ abhängen und die wir zu dem f -dimensionalen Wirkungsvariablenvektor \mathbf{I} zusammenfassen, der jetzt die Rolle der neuen generalisierten Impulse einnehmen soll. Die erzeugende Funktion (13.88) wird auf dem f -Torus $\mathcal{T}(\mathbf{F})$ eine mehrdeutige Funktion der alten Koordinaten \mathbf{q} . Mit dem f -dimensionalen Vektor $\mathbf{n} \doteq (n_1, \dots, n_f)$ der Umlaufzahlen sind die Werte der erzeugenden Funktion durch

$$S_2^{(\mathbf{n})}(\mathbf{q}, \mathbf{I}) = S_2^{(0)}(\mathbf{q}, \mathbf{I}) + 2\pi \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \quad (13.100)$$

gegeben. Als neue Koordinaten erhalten wir hier einen Vektor von f **Winkelvariablen**

$$\Theta = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{I}}, \quad (13.101)$$

die eindeutige Funktionen von \mathbf{q} nur modulo $2\pi \mathbf{n}$ sind, so daß die alten Koordinaten periodische Funktionen

$$\mathbf{q}(\Theta + 2\pi \mathbf{n}, \mathbf{I}) = \mathbf{q}(\Theta, \mathbf{I}) \quad (13.102)$$

der Winkelvariablen sind. Die Winkelvariablen Θ sind natürlich ebenfalls zyklisch, da ihre konjugierten Impulse $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{F})$ erhalten sind, und deshalb definieren die Bewegungsgleichungen für die Winkelvariablen

$$\dot{\Theta} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{I}} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I}) \quad (13.103)$$

einen Vektor von f Kreisfrequenzen, mit dem die allgemeine Lösung von (13.103)

$$\Theta(t) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I}) t + \Theta_0 \quad (13.104)$$

lautet.

Viele der in diesem Kapitel eingeführten Konzepte bilden wie Grundlage für tiefere Untersuchungen von Systemen, die nicht integrabel sind. Hierbei spielen **störungstheoretische Methoden** eine zentrale Rolle. Die schon im 18. und 19. Jahrhundert entwickelten Methoden dieser Art hatten zwar quantitative Erfolge zu verzeichnen, erwiesen sich jedoch als unbrauchbar für die Berechnung des Langzeitverhaltens. (Ein eindrückliches Beispiel für die Erfolge in der Himmelsmechanik stellt die Berechnung der Position des 1846 aufgrund dieser Berechnung entdeckten Planeten Neptun dar, die zur Erklärung von Bahnabweichungen des 1781 entdeckten Planeten Uranus durchgeführt wurde.) Wesentliche Fortschritte in der Theorie des Langzeitverhaltens wurden erst in den sechziger Jahren des 20. Jahrhunderts erzielt und sind mit dem **KAM-Theorem** (nach **Kolmogorov**, **Arnold** und **Moser**) verbunden.

Auch in der Quantenmechanik finden sich viele der in diesem Kapitel diskutierten Begriffe in analogen Zusammenhängen wieder. Ein wesentlicher Aspekt der Quantenmechanik besteht in der Quantisierung des Phasenraumvolumens, das dort nicht in beliebig kleinen Einheiten, sondern nur in Quanten der Größe $dqdp = \hbar$ vorkommt, wo $\hbar = h/2\pi$ das Plancksche Wirkungsquantum ist. Insbesondere die Poissonklammer hat in der Quantenmechanik das Analogon

$$[F, G] \rightarrow \frac{1}{i\hbar}(FG - GF), \quad (13.105)$$

wo rechts der **Kommutator** $FG - GF$ der beiden Phasenraumfunktionen F und G steht, die in der Quantenmechanik in lineare Operatoren im **Hilbertraum** (Zustandsraum des mechanischen Systems) transmutieren. Mit der Ersetzung (13.105) gelten in der Quantenmechanik die **kanonischen Vertauschungsrelationen** (13.45), die eine der wichtigsten Grundlagen der Quantenmechanik darstellen und aus denen z.B. unmittelbar die **Heisenbergsche Unschärferelation** folgt.

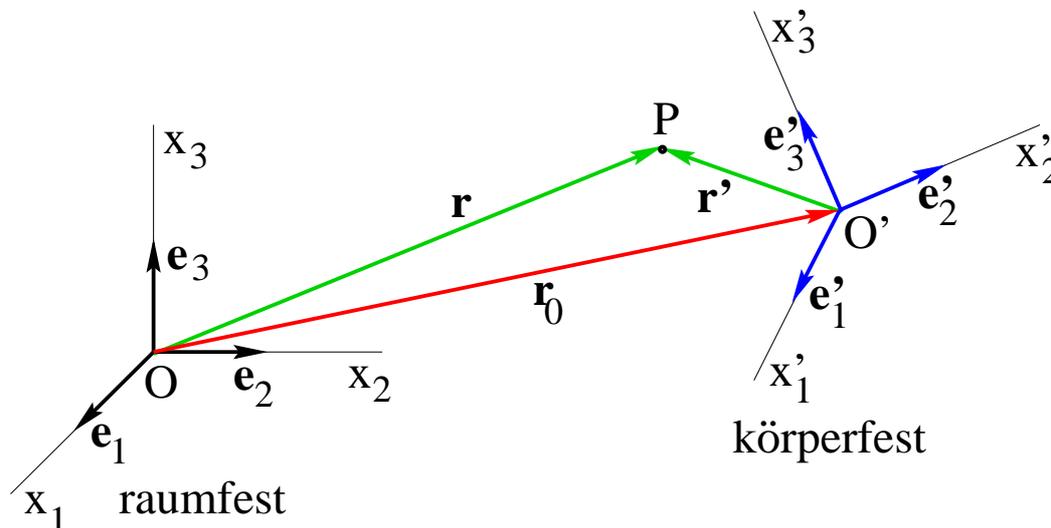
III. Mechanik starrer Körper und Drehgruppe

14. Kinematik starrer Körper

Unter einem starren Körper verstehen wir in diesem Kapitel ein System von mindestens drei starr miteinander verbundenen Massenpunkten, die nicht auf einer Geraden liegen. Im allgemeinen denken wir dabei an sehr viele Massenpunkte m_i ($i = 1, \dots, n$), die meist durch eine kontinuierliche Massenverteilung ersetzt werden. Wir wissen schon, daß ein solcher starrer Körper **sechs Freiheitsgrade** besitzt, falls er nicht weiteren Zwangsbedingungen unterworfen ist. Die erste Frage lautet, wie die Lage eines starren Körpers zu beschreiben ist und welche generalisierten Koordinaten man wählen kann.

In unserem inertialen Bezugssystem zeichnen wir einen Aufpunkt O aus und wählen ein kartesisches Koordinatensystem, das durch das orthonormierte **raumfeste** Dreibein \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 und die kartesischen Koordinaten x_1 , x_2 und x_3 charakterisiert ist. Außerdem wählen wir ein **körperfestes** Bezugssystem durch Wahl eines Aufpunktes O' und eines orthonormierten Dreibeins \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 und \mathbf{e}'_3 , die beide fest mit dem Körper verbunden sein sollen. Die kartesischen Koordinaten (x'_1, x'_2, x'_3) eines beliebigen Punktes P auf dem starren Körper bezüglich des körperfesten Dreibeins sind dann fest und unabhängig von der Bewegung des Körpers. Für die Vektoren $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OO'}$ und $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'P}$ gilt dann

$$\mathbf{r} = \sum_{\mu=1}^3 x_{\mu} \mathbf{e}_{\mu} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \sum_{\nu=1}^3 x'_{\nu} \mathbf{e}'_{\nu}. \quad (14.1)$$



Die Lage des starren Körpers bezüglich des inertialen Bezugssystems ist dann durch den Vektor \mathbf{r}_0 und das körperfeste Dreibein gegeben. Damit dies insgesamt 6 Freiheitsgrade entspricht, muß die Orientierung des Dreibeins sich offenbar durch 3 generalisierte Koordinaten beschreiben lassen.

Die Komponenten der Vektoren \mathbf{e}'_ν des körperfesten Dreibeins bezüglich des raumfesten Dreibeins sind durch die **Richtungskosinus**

$$a_{\nu\mu} = \mathbf{e}'_\nu \cdot \mathbf{e}_\mu = \cos(\alpha(\mathbf{e}'_\nu, \mathbf{e}_\mu)) \quad (14.2)$$

gegeben, mit denen dann die Darstellung

$$\mathbf{e}'_\nu = \sum_{\mu=1}^3 a_{\nu\mu} \mathbf{e}_\mu \quad (14.3)$$

gilt. Für die kartesischen Komponenten der Vektorgleichung (14.1) erhalten wir damit die Beziehungen

$$x_\mu = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_\mu = x_{0\mu} + \sum_{\nu=1}^3 x'_\nu a_{\nu\mu}. \quad (14.4)$$

Die neun Richtungskosinus $a_{\nu\mu}$ sind natürlich nicht unabhängig voneinander, sondern die bilden eine orthogonale (3×3) -Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (14.5)$$

weil die beiden Dreibeine orthonormiert sind. Unter Benutzung der Orthonormierungsbedingungen $\mathbf{e}'_\nu \cdot \mathbf{e}'_\lambda = \delta_{\nu\lambda}$ und $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\kappa = \delta_{\mu\kappa}$ folgt nämlich aus (14.3)

$$\delta_{\nu\lambda} = \mathbf{e}'_\nu \cdot \mathbf{e}'_\lambda = \sum_{\mu,\kappa=1}^3 a_{\nu\mu} a_{\lambda\kappa} (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\kappa) = \sum_{\mu=1}^3 a_{\nu\mu} a_{\lambda\mu} \quad (14.6)$$

oder mit der transponierten Matrix \mathcal{A}^t und der 3-dimensionalen Einheitsmatrix I in Matrixschreibweise die orthogonale Matrizen charakterisierende Eigenschaft

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^t = I. \quad (14.7)$$

Aus (14.7) folgt über den Determinantenmultiplikationssatz

$$\det \mathcal{A} = \det \mathcal{A}^t = \pm 1. \quad (14.8)$$

Es gibt daher zu \mathcal{A}^t eine rechtsinverse Matrix \mathcal{B} , mit der $\mathcal{A}^t \cdot \mathcal{B} = I$ gilt. Multipliziert man nun (14.7) von rechts mit \mathcal{B} , so ergibt sich $\mathcal{B} = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^t) \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{A}^t \cdot \mathcal{B}) = \mathcal{A}$. Orthogonale Matrizen haben also auch die Eigenschaft

$$\mathcal{A}^t \cdot \mathcal{A} = I. \quad (14.9)$$

Die Gleichungen (14.7) und (14.9) bedeuten, daß sowohl die Zeilenvektoren wie auch die Spaltenvektoren der Matrix (14.5) orthonormiert sind.

Unter Verwendung der Spaltenvektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (14.10)$$

können wir nun die Gleichungen (14.4) in der vektoriellen Gleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathcal{A}^t \cdot \mathbf{x}' \quad (14.11)$$

zusammenfassen, die wir dann leicht nach

$$\mathbf{x}' = \mathcal{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (14.12)$$

aufösen können. Die Gleichung (14.11) und ihre Umkehrung (14.12) beschreiben den Übergang zwischen dem raumfesten und dem körperfesten Bezugssystem.

Unter jeder durch orthogonale Matrizen \mathcal{A} vermittelten Abbildung bleiben die Längen von Vektoren und die Winkel zwischen Vektoren invariant. Aus $\mathbf{x}'_1 = \mathcal{A} \cdot \mathbf{x}_1$ und der transponierten Gleichung $\mathbf{x}_2^{t'} = \mathbf{x}_2^t \cdot \mathcal{A}^t$ folgt nämlich wegen (14.9)

$$\mathbf{x}_2^{t'} \cdot \mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_2^t \cdot \mathcal{A}^t \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2^t \cdot \mathbf{x}_1. \quad (14.13)$$

Damit das raumfeste Dreibein durch eine stetige Bewegung in das körperfeste überführt werden kann, müssen die Dreibeine entweder beide rechtshändig oder beide linkshändig sein. Die eine solche Bewegung beschreibenden orthogonalen Matrizen \mathcal{A} müssen daher dieselbe Determinante

$$\det \mathcal{A} = \det I = +1 \quad (14.14)$$

wie die Einheitmatrix I haben, da die Determinanten nicht stetig den laut (14.8) einzigen alternativen Wert -1 erreichen können. Orthogonale Matrizen \mathcal{A} , deren Determinante gleich $+1$ ist, heißen **eigentlich orthogonal**.

Den Zusammenhang zwischen dem Wert von $\det \mathcal{A}$ und der Händigkeit der Dreibeine kann man auch durch eine einfache Rechnung einsehen. Wenn das ungestrichene Dreibein rechtshändig ist, gilt für seine Spatprodukte

$$(\mathbf{e}_\lambda \times \mathbf{e}_\mu) \cdot \mathbf{e}_\nu = \epsilon_{\lambda\mu\nu} \doteq \begin{cases} +1 & (\lambda\mu\nu \text{ gerade Permutation von } 123) \\ -1 & (\lambda\mu\nu \text{ ungerade Permutation von } 123) \\ 0 & (\lambda\mu\nu \text{ nicht alle verschieden}). \end{cases} \quad (14.15)$$

Dann gilt jedoch für das gestrichene Dreibein mit (14.3) die Beziehung

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3 &= \sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^3 a_{1\lambda} a_{2\mu} a_{3\nu} (\mathbf{e}_\lambda \times \mathbf{e}_\mu) \cdot \mathbf{e}_\nu \\ &= \sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^3 a_{1\lambda} a_{2\mu} a_{3\nu} \epsilon_{\lambda\mu\nu} = \det \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (14.16)$$

Es stellt sich noch die Frage, ob tatsächlich alle orthogonalen Matrizen mit der Eigenschaft $\det \mathcal{A} = +1$ Drehungen beschreiben, die gleichhändige Dreibeine ineinander überführen. Diese Frage wird durch einen **Satz von Euler** positiv beantwortet. Um diesen Satz zu beweisen, weist man die Existenz eines Spaltenvektors $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ nach, der invariant unter der Abbildung \mathcal{A} ist, der also die Eigenschaft

$$\mathcal{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (14.17)$$

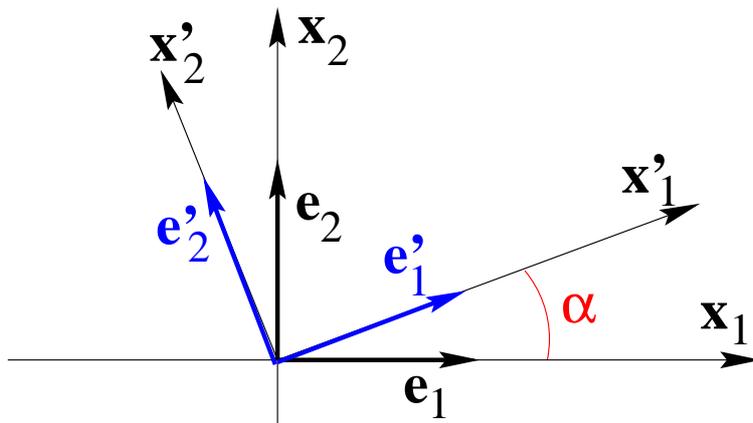
hat. Wenn man die Abbildung \mathcal{A} in einem Koordinatensystem darstellt, in dem der Eigenvektor \mathbf{x} die 3-Achse kennzeichnet, dann muß sie eine orthogonale Matrix der Gestalt

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.18)$$

sein. Damit diese Matrix eigentlich orthogonal ist, muß die obere linke (2×2) -Matrix sich aber als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (14.19)$$

schreiben lassen, wobei der Winkel α eindeutig bestimmt ist. Die Matrix (14.19) stellt eine Drehung um den Winkel α in der (x_1, x_2) -Ebene dar, wie in der folgenden Figur gezeigt.



Damit wäre bewiesen, daß eine beliebige eigentlich orthogonale Matrix eine Abbildung darstellt, die sich als eine Drehung um eine gewisse Drehachse veranschaulichen läßt. Es bleibt die Existenz eines Eigenvektors mit der Eigenschaft (14.17) zu zeigen.

Wir zeigen zunächst, daß die Eigenwerte a orthogonaler Matrizen \mathcal{A} , die im übrigen komplex sein können, immer den Betrag 1 haben. Aus der Eigenwertgleichung

$$\mathcal{A} \cdot \mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x} \quad (14.20)$$

folgt mit dem komplex konjugierten Zeilenvektor $\mathbf{x}^* \doteq \bar{\mathbf{x}}^t$ und dem komplex konjugierten Eigenwert \bar{a} wegen $\mathbf{x}^* \cdot \mathcal{A}^t = \bar{a} \mathbf{x}^*$ die Gleichung

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \cdot \mathcal{A}^t \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{x} = |\bar{a}|^2 \cdot |\mathbf{x}|^2, \quad (14.21)$$

die wegen $|\mathbf{x}|^2 \neq 0$ die Behauptung $|a|^2 = 1$ impliziert.

Sodann folgt durch komplexe Konjugation der Eigenwertgleichung (14.20), $\mathcal{A} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \bar{a}\bar{\mathbf{x}}$, daß mit jeder Zahl a auch die komplex konjugierte Zahl \bar{a} ein Eigenwert der reellen Matrix \mathcal{A} ist.

Das Produkt der drei Eigenwerte der Matrix \mathcal{A} ist bekanntlich gleich ihrer Determinante,

$$a_1 a_2 a_3 = \det \mathcal{A}. \quad (14.22)$$

Angesicht der hiermit bewiesenen Eigenschaften muß jede eigentlich orthogonale Matrix \mathcal{A} mindestens einen Eigenwert $a = 1$ und damit die Eigenschaft (14.17) haben. Es gibt nämlich nur die folgenden Alternativen. Wenn alle drei Eigenwerte von \mathcal{A} reell sind, müssen sie nach (14.8) ± 1 sein und daher wegen (14.14) und (14.22) entweder alle oder genau einer von ihnen $+1$ sein. Wenn es einen nicht-reellen Eigenwert a gibt, ist auch \bar{a} Eigenwert und der dritte Eigenwert muß wegen (14.14) und (14.22) den Wert 1 haben.

Jede 3-dimensionale eigentlich orthogonale Matrix \mathcal{A} beschreibt also eine Drehung im 3-dimensionalen Raum. Dabei ist die Richtung der Drehachse durch den Eigenvektor zum Eigenwert $+1$ gegeben. Der Cosinus des Drehwinkels α läßt sich aus der Spur der Matrix \mathcal{A} bestimmen. Denn wegen der Unabhängigkeit der Spur einer Abbildung vom gewählten Koordinatensystem (die Spur ist eine affine Invariante) lesen wir aus (14.5), (14.18) und (14.19) die Beziehung

$$\text{Spur} \mathcal{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 \cos \alpha \quad (14.23)$$

ab.

Um eigentlich orthogonale Matrizen (14.5) durch generalisierte Koordinaten zu parametrisieren, werden wir eine beliebige Drehung auf eine Folge von drei einfachen Drehungen zurückführen. Als einfache Drehungen bezeichnen wir solche, die einen der Vektoren des ungestrichenen Dreibeins als Drehachse besitzen. Nach (14.18) und (14.19) werden die Drehungen um \mathbf{e}_3 durch Matrizen

$$D_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.24)$$

beschrieben, wobei α der rechtshändige Drehwinkel ist. Ganz analog beschreiben Matrizen

$$D_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (14.25)$$

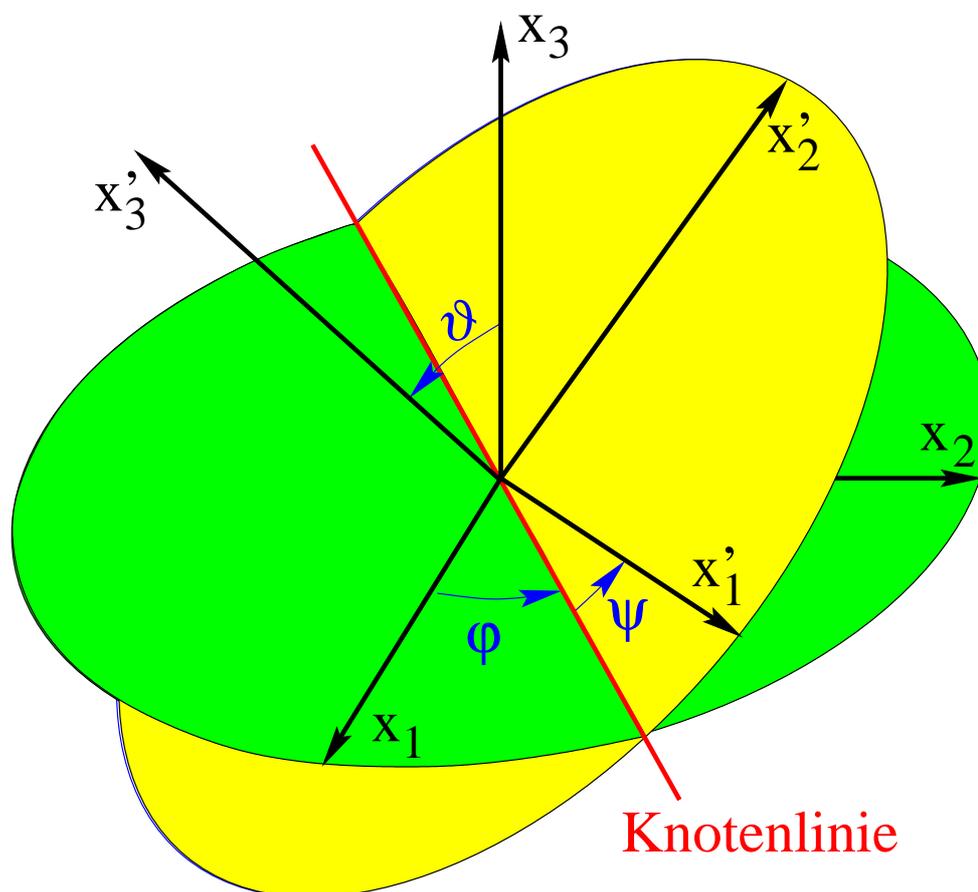
Drehungen um \mathbf{e}_1 und

$$D_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (14.26)$$

Drehungen um \mathbf{e}_2 .

In der folgenden Figur sind die durch die Dreibeine $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ und $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ gegebenen kartesischen Koordinatensysteme in einen gemeinsamen Ursprung gelegt. Die (x_1, x_2) -Ebene und die (x'_1, x'_2) -Ebene schneiden sich in einer Linie, die man die **Knotenlinie** der betrachteten Drehung nennt. Der Übergang vom ungestrichenen zum gestrichenen Koordinatensystem wird nun durch die folgenden drei Schritte vollzogen:

1. Drehung um die x_3 -Achse, so daß der Vektor \mathbf{e}_1 in die Knotenlinie überführt wird. Der Drehwinkel φ liegt im Intervall $0 \leq \varphi < \pi$.
2. Drehung um die Knotenlinie, in der jetzt der Vektor \mathbf{e}_1 liegt, bis der Vektor \mathbf{e}_3 in den Vektor \mathbf{e}'_3 überführt ist. Der Drehwinkel ϑ liegt im Intervall $-\pi < \vartheta \leq \pi$.
3. Drehung um die x'_3 -Achse, in der jetzt der Vektor \mathbf{e}_3 liegt, bis der Vektor \mathbf{e}_1 von der Knotenlinie in den Vektor \mathbf{e}'_1 überführt ist. Der Drehwinkel ψ liegt im Intervall $-\pi < \psi \leq \pi$.



Anhand von Gleichung (14.3) erkennen wir, daß die erste Drehung durch eine Matrix vom Typ D_3 beschrieben wird, weil um den Vektor \mathbf{e}_3 gedreht wird, die zweite Drehung durch eine Matrix vom Typ D_1 , weil hierbei um den Vektor \mathbf{e}_1 gedreht wird, der zur Zeit in der Knotenlinie liegt, und die dritte Drehung wieder durch eine Matrix vom Typ D_3 , weil der Vektor \mathbf{e}_3 jetzt auf dem Vektor \mathbf{e}'_3 liegt.

Die gesamte Drehung wird daher durch die **Drehmatrix**

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= D_3(\psi)D_1(\vartheta)D_3(\varphi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi & \sin \varphi \cos \psi + \cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi & \sin \vartheta \sin \psi \\ -\cos \varphi \sin \psi - \cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi & \sin \vartheta \cos \psi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14.27)$$

beschrieben. Die drei parametrisierenden Winkel nennt man die **Eulerschen Winkel**. Mit den Eulerschen Winkeln haben wir drei generalisierte Koordinaten gefunden, mit denen mittels der Gleichungen (14.3) die Orientierung und die Bewegung eines Dreibeins und damit eines starren Körpers beschrieben werden kann. Hierbei wird die Drehung als eine **aktive Transformation** aufgefaßt, der ein physikalisches Objekt unterworfen ist.

In Gleichung (14.12) spielt dieselbe Drehung die Rolle einer **passiven Transformation**. Hier sind die Komponenten ein und desselben Vektors $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ in zwei gegeneinander verdrehten kartesischen Koordinatensystemen in Beziehung gesetzt. Diese Beziehung wird durch dieselbe Drehmatrix \mathcal{A} hergestellt. Aktive und passive Interpretationen sind für alle Arten von physikalischen Transformationen möglich.

In diesem Kapitel haben wir bisher Drehungen immer unter Bezugnahme auf bestimmte Koordinatensysteme (Dreibeine) charakterisiert. Eine Drehung \mathcal{D} (denken wir jetzt einmal an die aktive Interpretation) hat aber eine von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige, rein **geometrische Bedeutung**. Ein im durch $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ gegebenen Koordinatensystem dargestellter Vektor \mathbf{r} ,

$$\mathbf{r} = \sum_{\nu=1}^3 x_{\nu} \mathbf{e}_{\nu}, \quad (14.28)$$

wird durch eine Drehung \mathcal{D} , die durch die Gleichung (14.3) charakterisiert ist, in den Vektor

$$\mathbf{r}' = \sum_{\nu=1}^3 x_{\nu} \mathbf{e}'_{\nu} = \sum_{\mu, \nu=1}^3 x_{\nu} a_{\nu\mu} \mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu=1}^3 x'_{\mu} \mathbf{e}_{\mu} \quad (14.29)$$

überführt, so daß für die wie in (14.10) definierten Spaltenvektoren mit (14.6) die Beziehung

$$\mathbf{x} = \mathcal{A} \cdot \mathbf{x}' \quad (14.30)$$

gilt. Benutzen wir stattdessen ein anderes Koordinatensystem, dessen Basisvektoren

$$\tilde{\mathbf{e}}_{\nu} = \sum_{\mu=1}^3 b_{\nu\mu} \mathbf{e}_{\mu} \quad (14.31)$$

mit denen des alten Systems durch die Drehung \mathcal{B} verknüpft ist, so gilt

$$\mathbf{r} = \sum_{\nu} \tilde{x}_{\nu} \tilde{\mathbf{e}}_{\nu} = \sum_{\nu, \mu=1}^3 \tilde{x}_{\nu} b_{\nu\mu} \mathbf{e}_{\mu} \quad (14.32)$$

oder für die Spaltenvektoren

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathcal{B} \cdot \mathbf{x} \quad \text{und analog} \quad \tilde{\mathbf{x}}' = \mathcal{B} \cdot \mathbf{x}'. \quad (14.33)$$

Die Drehung \mathcal{D} wird daher im neuen Koordinatensystem durch die Gleichung

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}' \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}^t \quad (14.34)$$

dargestellt.

Genau so, wie Vektoren \mathbf{r} nach Wahl eines Koordinatensystems durch ihre Komponenten \mathbf{x} dargestellt werden, die sich bei einem Wechsel des Koordinatensystems wie (14.33) transformieren, werden Drehungen \mathcal{D} durch koordinatenabhängige Drehmatrizen \mathcal{A} dargestellt (siehe (14.30)), deren Transformationsverhalten bei einem Wechsel des Koordinatensystems aus (14.34) ersichtlich ist. Als übergeordneten Begriff, der beide Verhaltensweisen umfaßt, benutzt man in der Physik den Begriff des **Tensors**. Ein Tensor n -ter Stufe \mathcal{T} ist ein geometrisches Objekt, dessen Komponenten bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $\mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_n}$ n kartesische Indizes tragen. Bei einem Wechsel (14.33) des Koordinatensystems transformieren sich diese Komponenten nach der Regel

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\mu_1, \dots, \mu_n} = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^3 b_{\mu_1 \nu_1} \cdots b_{\mu_n \nu_n} \mathcal{T}_{\nu_1, \dots, \nu_n}. \quad (14.35)$$

Vektoren sind angesichts des Transformationsverhaltens (14.33) offenbar Tensoren erster Stufe, während Drehungen nach (14.34) Beispiele für Tensoren zweiter Stufe sind. Wir werden später auch anderen Tensoren zweiter Stufe und Tensoren höherer Stufen begegnen.

Orthogonale Matrizen \mathcal{A} mit der Eigenschaft $\det \mathcal{A} = -1$ heißen auch **uneigentlich orthogonal**. Sie beschreiben den Übergang zwischen Dreibeinen unter gleichzeitiger Umkehr der Händigkeit und entsprechen daher nicht einer Drehung. **Spiegelungen**, z.B. die Spiegelung

$$\mathcal{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14.36)$$

an der zur x_3 -Achse senkrechten Koordinatenebene, werden durch uneigentlich orthogonale Matrizen dargestellt. Mit $\det \mathcal{A} = -1$ beschreibt die orthogonale Matrix $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{S}_3$ wegen $\det \mathcal{B} = +1$ eine Drehung. Daher läßt sich jede uneigentlich orthogonale Matrix $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{S}_3$ als eine Operation interpretieren, die aus einer Drehung und einer Spiegelung zusammengesetzt ist.

Das hintereinander Ausführen physikalischer Transformationen kann man immer als Produkt der entsprechenden Operationen auffassen. Wenn man hier nach der Drehung (14.3) eine zweite Drehung

$$\mathbf{e}''_{\lambda} = \sum_{\nu=1}^3 b_{\lambda\nu} \mathbf{e}'_{\nu} \quad (14.37)$$

ausführt, stellt sich die gesamte Drehung als

$$\mathbf{e}_\lambda'' = \sum_{\nu, \mu=1}^3 b_{\lambda\nu} a_{\nu\mu} \mathbf{e}_\mu = \sum_{\mu=1}^3 c_{\lambda\mu} \mathbf{e}_\mu \quad (14.38)$$

dar, wird also durch das Matrixprodukt $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$ der darstellenden Drehmatrizen beschrieben. Die Menge der Drehungen und Drehspiegelungen bildet bezüglich des hintereinander Ausführens eine Gruppe, die **Drehgruppe $O(3)$** . Indem man die Elemente dieser Gruppe durch orthogonale Matrizen repräsentiert, stellt man die Drehgruppe $O(3)$ als Matrixgruppe dar, deren Gruppenoperation das gewöhnliche Matrizenprodukt ist. Der Name $O(3)$ bezieht sich auf die orthogonalen (3×3) -Matrizen. Die Menge der eigentlichen Drehungen und deren Darstellung durch eigentlich orthogonale Matrizen bilden eine **Untergruppe $SO(3)$** der Drehgruppe $O(3)$ (spezielle orthogonale Matrizen).

Als zwei spezielle Tensoren wollen wir das **Kronecker-Symbol** $\delta_{\mu\nu}$ und das **Levi-Civita-Symbol** $\epsilon_{\lambda\mu\nu}$ (siehe (14.15)) herausstellen. Die Gleichung (14.6), die die Definition orthogonaler Matrizen beinhaltet, kann auch in die Form

$$\delta_{\nu\mu} = \sum_{\kappa, \lambda=1}^3 a_{\nu\kappa} a_{\mu\lambda} \delta_{\kappa\lambda} \quad (14.39)$$

gebracht werden, in der sie nach (14.35) die **Invarianz des Einheits-Tensors** $\delta_{\nu\mu}$ unter allen orthogonalen Transformationen zum Ausdruck bringt. In leichter Verallgemeinerung von Gleichung (14.16) gilt für $\epsilon_{\lambda\mu\nu}$ die Identität

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 a_{\lambda\alpha} a_{\mu\beta} a_{\nu\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\lambda\mu\nu} \cdot \det \mathcal{A}. \quad (14.40)$$

Der **total antisymmetrische Einheitstensor** $\epsilon_{\lambda\mu\nu}$ ist also invariant unter allen eigentlichen Drehungen und wechselt unter uneigentlichen das Vorzeichen. Objekte, die sich unter der Drehgruppe wie

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\mu_1, \dots, \mu_n} = \det \mathcal{B} \cdot \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^3 b_{\mu_1\nu_1} \dots b_{\mu_n\nu_n} \mathcal{T}_{\nu_1, \dots, \nu_n} \quad (14.41)$$

transformieren, nennt man **Pseudotensoren**. Zur Unterscheidung von Pseudotensoren nennt man Tensoren mit der Eigenschaft (14.35) bei Bedarf auch **echte Tensoren**. Nach Gleichung (14.40) ist daher $\epsilon_{\lambda\mu\nu}$ ein unter der Drehgruppe **invarianter Pseudotensor dritter Stufe**.

Erwähnt werden sollen schließlich noch zwei Operationen der **Tensoralgebra**, in der man die Regeln für das Rechnen mit Tensoren zusammenfaßt. Offensichtlich ist angesichts der Definition (14.35) die Regel, daß das **Tensorprodukt**

$$\mathcal{T}_{\mu_1 \dots \mu_m \nu_1 \dots \nu_n} = \mathcal{T}_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(1)} \mathcal{T}_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(2)} \quad (14.42)$$

zweier Tensoren $\mathcal{T}^{(1)}$ und $\mathcal{T}^{(2)}$ der Stufen m und n ein Tensor der Stufe $m+n$ ist. Die **Verjüngung** oder **Kontraktion**

$$\sum_{\nu_i, \nu_j=1}^3 \mathcal{T}_{\nu_1 \dots \nu_n} \delta_{\nu_i \nu_j}, \quad (14.43)$$

eines Tensors \mathcal{T} der Stufe n , für die man zwei Indizes ν_i und ν_j gleichsetzt und übersummiert, ist ein Tensor der Stufe $n-2$. Dies folgt sofort anhand

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_i, \nu_j} \tilde{\mathcal{T}}_{\nu_1 \dots \nu_n} \delta_{\nu_i \nu_j} &= \sum_{\nu_i, \nu_j, \mu_1, \dots, \mu_n} \left(\prod_{k=1, \dots, n} b_{\nu_k \mu_k} \right) \mathcal{T}_{\mu_1 \dots \mu_n} \delta_{\nu_i \nu_j} \\ &= \sum_{\{\mu_k\}} \left(\prod_{k=1, \dots, n} b_{\nu_k \mu_k} \right) \sum_{\mu_i, \mu_j} \mathcal{T}_{\mu_1 \dots \mu_n} \delta_{\mu_i \mu_j} \end{aligned} \quad (14.44)$$

aus der Orthogonalität der Transformationsmatrix \mathcal{B} . Geläufige Beispiele für die Verjüngung eines Tensors zweiter Stufe sind das Skalarprodukt zweier Vektoren $\sum_i x_i y_i$ oder allgemeiner die Spur des Tensors $\sum_i a_{ii}$, die beide einen **Tensor nullter Stufe** oder **Skalar** ergeben.

Einen Einblick in die Topologie der Drehgruppe $SO(3)$ gewinnt man durch eine alternative Parametrisierung der eigentlichen Drehungen. Anstelle der Eulerschen Winkel kann man jeder Drehung eindeutig einen Vektor α zuordnen, dessen Richtung die Drehachse und dessen Länge $|\alpha| \leq \pi$ den Drehwinkel kennzeichnet, indem man den Drehsinn nach der Rechte-Hand-Regel festlegt. Damit haben wir die Drehgruppe $SO(3)$ auf eine Kugel mit Radius π abgebildet. Um hier eine exakt eindeutige Darstellung aller Drehungen zu erhalten, muß man jedoch antipodische Punkte auf der Oberfläche der Kugel, die Drehungen um $\pm\pi$ um dieselbe Achse darstellen, identifizieren. Diese Identifizierung beleuchtet die **nichttriviale topologische Struktur der Drehgruppe $SO(3)$** . Sie hat wichtige physikalische Konsequenzen, weniger für die Punktmechanik, um so mehr aber für die Quantenmechanik.

Nach dieser vorbereitenden Zusammenstellung wichtiger Eigenschaften der Drehgruppe wollen wir jetzt zur Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers mit fortschreitender Zeit übergehen. Wir kennzeichnen einen festen Punkt \mathcal{P} auf dem starren Körper wie in Gleichung (14.1) durch den festen Vektor \mathbf{x}' seiner kartesischen Koordinaten im körperfesten System. Die kartesischen Koordinaten des Punktes \mathcal{P} und des Aufpunktes O' im raumfesten System bezeichnen wir mit $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{x}_0(t)$. Dann gilt nach Gleichung (14.4)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathcal{A}^t(t) \cdot \mathbf{x}'. \quad (14.45)$$

Hierdurch haben wir die Komponenten von \mathbf{x}_0 und die in \mathcal{A} nach (14.27) enthaltenen Eulerschen Winkel als sechs generalisierte Koordinaten eingeführt. Für die Geschwindigkeit des Punktes \mathcal{P} erhalten wir aus (14.45)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_0(t) + \dot{\mathcal{A}}^t(t) \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{v}_0(t) + \dot{\mathcal{A}}^t(t) \cdot \mathcal{A}(t) \cdot [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)], \quad (14.46)$$

wobei wir rechts den Vektor \mathbf{x}' mittels (14.45) mit dem Ziel eliminiert haben, alle Vektoren im raumfesten System darzustellen. Wegen der Orthogonalität der Drehmatrizen (14.9) folgt für das Matrixprodukt in (14.46)

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{A}^t \cdot \mathcal{A}) = \dot{\mathcal{A}}^t \cdot \mathcal{A} + \mathcal{A}^t \cdot \dot{\mathcal{A}} = \dot{\mathcal{A}}^t \cdot \mathcal{A} + (\dot{\mathcal{A}}^t \cdot \mathcal{A})^t = 0, \quad (14.47)$$

so daß die Matrix

$$\Omega(t) \doteq \dot{\mathcal{A}}^t \cdot \mathcal{A} = -(\dot{\mathcal{A}}^t \cdot \mathcal{A})^t = -\Omega^t(t) \quad (14.48)$$

antisymmetrisch ist. Eine antisymmetrische Matrix bildet jeden Vektor auf einen dazu senkrechten Vektor ab. Denn es gilt

$$\mathbf{x}^t \cdot \Omega \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x}^t \cdot \Omega \cdot \mathbf{x})^t = \mathbf{x}^t \cdot \Omega^t \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}^t \cdot \Omega \cdot \mathbf{x} = 0. \quad (14.49)$$

Dies legt es nahe, nach einem Spaltenvektor

$$\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} \quad (14.50)$$

zu suchen, mit dem für jeden Vektor \mathbf{x} die Gleichung

$$\Omega \cdot \mathbf{x} = \mathbf{w} \times \mathbf{x} \quad (14.51)$$

gilt. Tatsächlich liefern die drei unabhängigen Elemente der antisymmetrischen Matrix Ω die Komponenten dieses Vektors nach dem Schema

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (14.52)$$

und wir können daher die Gleichung (14.46) in

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_0(t) + \mathbf{w}(t) \times [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)] \quad (14.53)$$

umformulieren. Diese Gleichung muß die Koordinatendarstellung einer koordinatenunabhängigen Vektorgleichung

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0(t)] \quad (14.54)$$

mit dem Vektor $\boldsymbol{\omega}(t) \doteq \omega_1(t)\mathbf{e}_1 + \omega_2(t)\mathbf{e}_2 + \omega_3(t)\mathbf{e}_3$ sein (**Eulersche Geschwindigkeitsformel**).

Wir wollen einige der obigen Gleichungen in tensorieller Schreibweise wiederholen. Die besprochenen Regeln der Tensoralgebra sagen uns, daß mit \mathcal{A} auch Ω ein

Tensor zweiter Stufe ist. Die Gleichung (14.52) läßt sich mit dem total antisymmetrischen Einheitspseudotensor in der Form

$$\Omega_{\nu\mu} = \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_{\lambda\mu\nu} \omega_{\lambda} \quad (14.55)$$

schreiben. Mittels der Beziehung

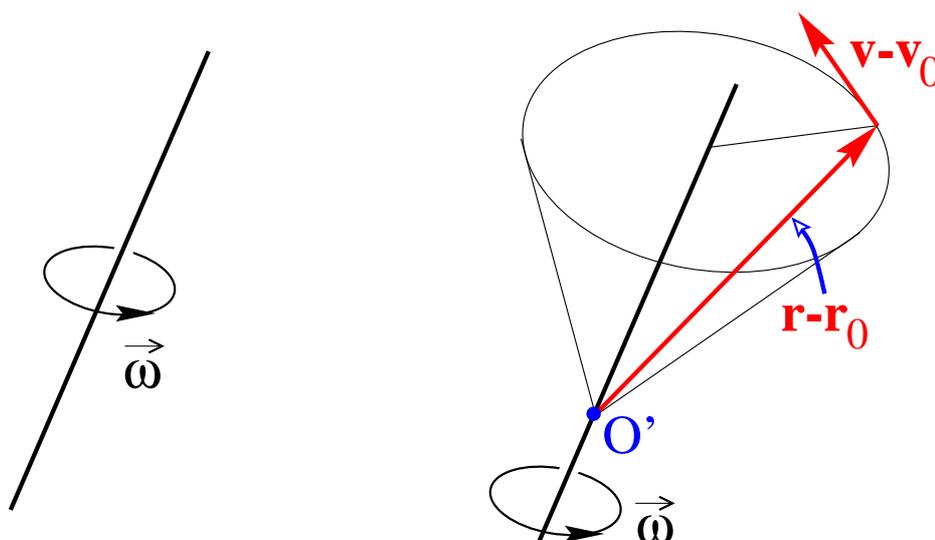
$$\sum_{\mu,\nu=1}^3 \epsilon_{\kappa\mu\nu} \epsilon_{\lambda\mu\nu} = 2 \delta_{\kappa\lambda} \quad (14.56)$$

lösen wir die Gleichung (14.55) nach den Komponenten von ω auf und erhalten

$$\omega_{\kappa} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^3 \epsilon_{\kappa\mu\nu} \Omega_{\nu\mu}. \quad (14.57)$$

Diese Gleichung bestätigt unsere Vermutung, daß der Spaltenvektor (14.50) sich tatsächlich wie ein Tensor erster Stufe transformiert und wir erkennen hier zusätzlich, daß er ein Pseudovektor ist. Dies paßt zusammen mit der händigen Definition des Kreuzproduktes, das wir in (14.51) benutzt haben. Das Kreuzprodukt $\mathbf{w} \times \mathbf{x}$ kann nur dann ein echter Vektor sein, wenn genau einer der Faktoren ein Pseudovektor ist.

So wie man echte Vektoren koordinatenunabhängig durch Pfeile darstellt, kann man auch für Pseudovektoren eine graphische Darstellung finden. Man stellt sie durch eine gerichtete Strecke mit Umlaufsinn dar, wie in der folgenden Figur links gezeigt. In rechtshändigen Koordinatensystemen entspricht dieses Objekt einem Pfeil, dessen Spitze am rechtshändig bestimmten Streckenende befestigt ist, und in linkshändigen Systemen am anderen Ende. Unter eigentlichen Drehungen verhält sich dieses Objekt genau so wie ein Pfeil, unter der Spiegelung an einer Ebene senkrecht zur Strecke bleibt es jedoch invariant, während der Pfeil sich umkehrt.



Die Interpretation der Gleichung (14.54) gelingt nun leicht mittels der rechten obigen Figur. Die Geschwindigkeit des Punktes \mathcal{P} auf dem starren Körper setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit des fest mit dem starren Körper verbundenen Aufpunktes O' und der durch die momentane Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}(t)$ bestimmten Rotationsgeschwindigkeit.

Im raumfesten Koordinatensystem bestimmt die Drehmatrix \mathcal{A} nach (14.48) und (14.57) die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit nach der Formel

$$\omega_\kappa = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu, \nu} \epsilon_{\kappa\mu\nu} \dot{a}_{\lambda\nu} a_{\lambda\mu}. \quad (14.58)$$

Später werden wir die Komponenten dieses Vektors auch im körperfesten Koordinatensystem benötigen. Die Transformation für die Matrix Ω folgt aus (14.46) und (14.12) bzw. aus (14.34) und ergibt

$$\Omega' = \mathcal{A} \cdot \Omega \cdot \mathcal{A}^t = \mathcal{A} \cdot \dot{\mathcal{A}}^t, \quad (14.59)$$

so daß wir mittels (14.57)

$$\omega'_\kappa = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu, \nu} \epsilon_{\kappa\mu\nu} a_{\nu\lambda} \dot{a}_{\mu\lambda} \quad (14.60)$$

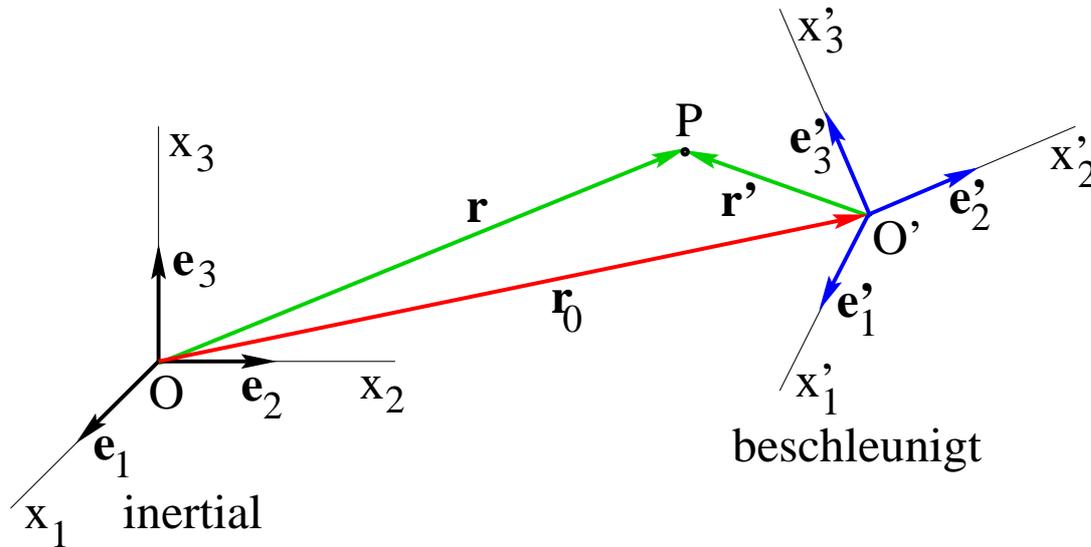
erhalten. Wenn wir dies mittels (14.27) durch die Eulerschen Winkel ausdrücken, erhalten wir nach einer kurzen Rechnung die Formeln

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \omega'_2 &= -\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \omega'_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (14.61)$$

die wir später ebenfalls verwenden werden.

15. Beschleunigte Bezugssysteme

Wir werden jetzt unsere im letzten Kapitel erworbenen Kenntnisse über Koordinatentransformationen benutzen, um die Mechanik eines Massenpunktes in einem beschleunigten Koordinatensystem zu diskutieren. Bezugssysteme sind ja im allgemeinen in festen Körpern verankert. Wir können daher die Figur vom Anfang des letzten Kapitels übernehmen, um den Übergang von einem inertialen in ein beschleunigtes Bezugssystem zu illustrieren.



Die Bewegung des beschleunigten relativ zum inertialen Bezugssystem wird durch die Größen

$$\mathbf{r}_0(t) \quad \text{und} \quad (\mathcal{A}(t))_{\nu\mu} = \mathbf{e}'_\nu(t) \cdot \mathbf{e}_\mu \quad (15.1)$$

charakterisiert. Die Lage eines Punktes \mathcal{P} wird auch hier durch Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}' beschrieben, die der Relation

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t) \quad (15.2)$$

genügen. Der einzige Unterschied zu den Betrachtungen im letzten Kapitel besteht darin, daß der Punkt \mathcal{P} im beschleunigten Bezugssystem nicht ruhen muß, sondern sich relativ zu ihm bewegen kann. Wir betrachten daher einen beliebigen Vektor $\mathbf{G}(t)$, für dessen Komponenten $\mathbf{g}(t)$ im inertialen und $\mathbf{g}'(t)$ im beschleunigten Bezugssystem nach (14.45) die Beziehung

$$\mathbf{g}(t) = \mathcal{A}^t(t) \cdot \mathbf{g}'(t) \quad (15.3)$$

gilt. Für die Zeitableitungen dieser Komponenten erhalten wir in Analogie zu (14.53) die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{g} = \dot{\mathcal{A}}^t \cdot \mathbf{g}' + \mathcal{A}^t \cdot \dot{\mathbf{g}}' = \dot{\mathcal{A}}^t(t) \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{g} + \mathcal{A}^t \cdot \dot{\mathbf{g}}' = \mathbf{w} \times \mathbf{g} + \frac{d'}{dt}\mathbf{g}. \quad (15.4)$$

Hierbei bezeichnet

$$\frac{d'}{dt}\mathbf{g} = \mathcal{A}^t \cdot \dot{\mathbf{g}}' \quad (15.5)$$

die Komponenten im Inertialsystem der Zeitableitung des Vektors \mathbf{G} beurteilt im beschleunigten Bezugssystem. Da in Gleichung (15.4) alle Vektoren im Inertialsystem dargestellt sind, gilt diese Gleichung koordinatenunabhängig und kann mit dem Vektor \mathbf{G} und dem Vektor $\boldsymbol{\omega}$ als

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} + \frac{d'}{dt}\mathbf{G} \quad (15.6)$$

geschrieben werden.

Durch Anwendung von (15.6) auf (15.2) können wir die Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten in den beiden Bezugssystemen herleiten. Wir erhalten

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_0 + \frac{d}{dt}\mathbf{r}' = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \frac{d'}{dt}\mathbf{r}'. \quad (15.7)$$

Hierbei ist

$$\frac{d'}{dt}\mathbf{r}' = \mathbf{v}' \quad (15.8)$$

die Geschwindigkeit des Punktes \mathcal{P} im beschleunigten Bezugssystem. Die Relation zwischen den beiden Geschwindigkeiten lautet unter Benutzung der **Führungsgeschwindigkeit**

$$\mathbf{v}_F \equiv \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (15.9)$$

einfach

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_F + \mathbf{v}'. \quad (15.10)$$

Durch nochmalige Ableitung nach der Zeit finden wir eine entsprechende Beziehung für die Beschleunigungen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\equiv \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{v}_0 + \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}\right) \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt}\mathbf{r}' + \frac{d}{dt}\mathbf{v}' \\ &= \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}', \end{aligned} \quad (15.11)$$

wobei \mathbf{a}' die Beschleunigung des Punktes \mathcal{P} im beschleunigten Bezugssystem bezeichnet. Wir können hier auch eine **Führungsbeschleunigung**

$$\mathbf{a}_F \equiv \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' \quad (15.12)$$

eingeführen, die ein im beschleunigten Bezugssystem ruhender Punkt erfährt. Mit ihr erhält die Gleichung (15.11) die Form

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_F + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (15.13)$$

Wenn auf den Massenpunkt \mathcal{P} die eingeprägte Kraft \mathbf{F} wirkt, ist die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (15.14)$$

im Inertialsystem äquivalent zur Bewegungsgleichung

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (15.15)$$

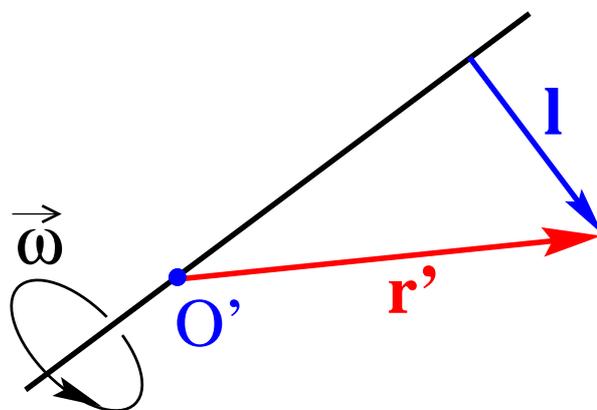
im beschleunigten Bezugssystem.

Neben der eingeprägten Kraft \mathbf{F} enthält die Bewegungsgleichung (15.15) vier Terme, die man als **Trägheitskräfte** bezeichnet. Mit dieser umfassenden Bewegungsgleichung für beliebige beschleunigte Bezugssysteme ist vom praktischen Standpunkt aus die Sonderstellung der Inertialsysteme aufgehoben. Ich erinnere jedoch an die Diskussion der objektiven Identifikation eingeprägter Kräfte in Kapitel 2. Da die Trägheitskräfte alle Massenpunkte in gleicher Weise beschleunigen, sind sie eindeutig als nicht eingeprägte Kräfte auszumachen. Sie gleichen in dieser Hinsicht völlig den Gravitationskräften.

Die ersten drei Trägheitskräfte in (15.15) bilden zusammen die **Führungskraft**. Die Zentrifugalkraft

$$-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\omega^2 \mathbf{l} \quad (15.16)$$

steht senkrecht auf der momentanen Rotationsachse und ist proportional zu dem in der folgenden Figur gezeigten Lotvektor \mathbf{l} .



Die **Corioliskraft** $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ wirkt zusätzlich zu den Führungskräften, wenn der Massenpunkt \mathcal{P} sich im beschleunigten Bezugssystem bewegt. Mittels des nach ihm benannten **Pendelversuchs** hat **Jean Foucault (1819-1868)** 1850 die auf der Erdrotation beruhende Corioliskraft im Labor nachgewiesen. Die Wirkung dieser Kraft auf bewegte Luftmassen ist bekanntlich von essentieller Bedeutung für die Dynamik der Erdatmosphäre.

Aus der allgemeinen Bewegungsgleichung (15.15) liest man im übrigen noch einmal das **Galileische Relativitätsprinzip** ab. Denn ein geradlinig gleichförmig bewegtes Bezugssystem, das durch $\mathbf{a}_0 = 0$ und $\boldsymbol{\omega} = 0$ charakterisiert ist, zeigt

keine Trägheitskräfte und ist daher ebenfalls inertial. Die allgemeinste **Galilei-Transformation** auf ein solches alternatives Inertialsystem ist durch

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}_0 \cdot t + \mathbf{r}_0, \quad \mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0 \quad (15.17)$$

spezifiziert. Nach dem **Einsteinschen Relativitätsprinzip** sind sämtliche Inertialsysteme nicht nur für mechanische, sondern für alle Naturerscheinungen (z.B. auch optische) gleichwertig. Nach Einstein ist bei hohen Geschwindigkeiten (v_0 vergleichbar mit der Lichtgeschwindigkeit c) die Rolle der Zeit neu zu überdenken und anstelle der Galilei-Transformationen treten die im vierdimensionalen **Minkowskiraum** (Raum-Zeit-Kontinuum) wirkenden **Lorentz-Transformationen**.

Da ein Gravitationsfeld lokal nicht von einem beschleunigten Bezugssystem unterschieden werden kann, ist ein in einem homogenen Gravitationsfeld frei fallendes Bezugssystem ($\mathbf{a}_0 = \mathbf{g}$) als inertial zu betrachten. Nach der Einsteinschen **Allgemeinen Relativitätstheorie** ist ein solches Bezugssystem tatsächlich hinsichtlich aller Naturerscheinungen zu einem inertialen Bezugssystem äquivalent.

16. Dynamik starrer Körper

In diesem Kapitel werden wir oft Summen der Form $\sum f(\mathbf{r}_i) m_i$ über alle Massenpunkte eines starren Körpers \mathcal{K} begegnen. Da die Massenpunkte in einem typischen starren Körper kontinuierlich verteilt sind, werden wir die Massenverteilung durch eine Massendichte $\rho(\mathbf{r})$ beschreiben und die obigen Summen als Zwischensummen für Volumenintegrale auffassen. Mit $m_i = \rho(\mathbf{r}_i) \Delta^3 \mathbf{r}_i$, wobei $\Delta^3 \mathbf{r}_i$ ein Volumenelement um den Punkt \mathbf{r}_i ist, erhalten wir im Grenzfall beliebig feiner Volumenaufteilung die Vorschrift

$$\sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}_i) m_i = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}_i) \rho(\mathbf{r}_i) \Delta^3 \mathbf{r}_i \rightarrow \int_{\mathcal{K}} f(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (16.1)$$

Die praktische Berechnung solcher Volumenintegrale wird durch den Satz von **Fubini** erleichtert, nach dem die Integration koordinatenweise durchgeführt werden kann. Dies führt für einen **Normalbereich**, bei dem die kartesischen Koordinaten des Körper \mathcal{K} z.B. durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ g_1(x) &\leq y \leq g_2(x) \\ h_1(x, y) &\leq z \leq h_2(x, y) \end{aligned} \quad (16.2)$$

charakterisiert sind, zu der Formel

$$\int_{\mathcal{K}} f(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} dz f(\mathbf{r}). \quad (16.3)$$

Körper, deren Form nicht in das Schema (16.2) passen, müssen entweder in Normalbereiche zerlegt werden oder durch eine geeignete Koordinatentransformation angepaßt werden. Für letzteres braucht man den **Transformationsatz**, der Substitutionen in mehrdimensionalen Integralen ermöglicht. Wenn durch eine Abbildung

$$\mathcal{K} \ni \mathbf{r} \xrightarrow{\mathbf{r}' = \mathbf{F}(\mathbf{r})} \mathbf{r}' \in \mathcal{K}' \quad (16.4)$$

das Gebiet \mathcal{K} umkehrbar eindeutig auf das Gebiet \mathcal{K}' abgebildet wird, gilt die Transformationsformel

$$\int_{\mathcal{K}'} f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \int_{\mathcal{K}} f(\mathbf{F}(\mathbf{r})) \left| \det \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}} \right) \right| d^3 \mathbf{r}. \quad (16.5)$$

Die Verallgemeinerung dieser Transformationsformel auf beliebige Dimensionen haben wir schon früher in (12.38) und (13.56) benutzt.

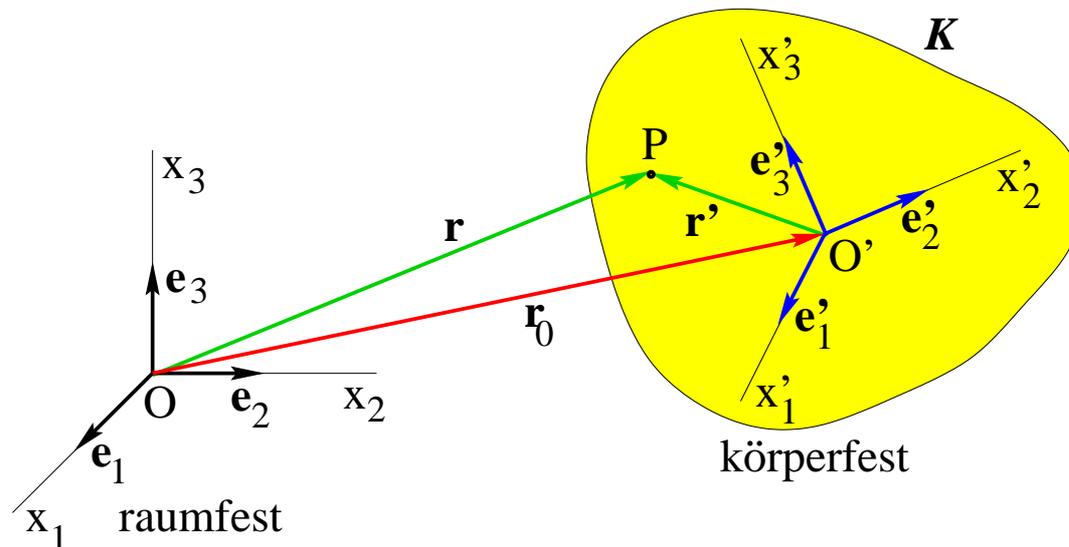
Die Gesamtmasse M eines starren Körpers \mathcal{K} mit der Massendichte $\rho(\mathbf{r})$ berechnet sich aus der Formel

$$M = \sum_{i=1}^n m_i = \int_{\mathcal{K}} \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (16.6)$$

Für den Vektor vom körperfesten Aufpunkt O' zum Massenmittelpunkt S des starren Körpers \mathcal{K} erhalten wir

$$\mathbf{r}'_S = \overrightarrow{O'S} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (16.7)$$

Es wird sich häufig, jedoch nicht immer, als vorteilhaft erweisen, den Aufpunkt O' in den Massenmittelpunkt S des starren Körpers zu legen. Dann gilt $\mathbf{r}'_S = \mathbf{0}$.



Als erste dynamische Größe beim starren Körper notieren wir nun seinen Gesamtimpuls

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = M \mathbf{v}_0 + M \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_S = M \mathbf{v}_S. \quad (16.8)$$

Hier haben wir die Eulersche Geschwindigkeitsformel (14.54) benutzt. Der Term mit der Winkelgeschwindigkeit verschwindet für $O' = S$.

Die kinetische Energie unseres starren Körpers \mathcal{K} ist durch die Formel

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{K}} (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (16.9)$$

gegeben. Nach Ausmultiplizieren des Quadrats im Integranden zerfällt sie in die drei Anteile

$$T = T_{\text{tr}} + T_{\text{rot}} + T_{\text{w}}, \quad (16.10)$$

wo

$$T_{\text{tr}} = \frac{M}{2} \mathbf{v}_0^2 \quad (16.11)$$

die Translationsenergie,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{K}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (16.12)$$

die Rotationsenergie und

$$T_w = M \mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_S) \quad (16.13)$$

die “wechselseitige” kinetische Energie ist. Letztere verschwindet für $O' = S$.

Unser besonderes Interesse gilt nunmehr dem Rotationsanteil T_{rot} der kinetischen Energie. Er ist eine quadratische Form in den Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und läßt sich daher als

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^3 \omega'_\mu \Theta'_{\mu\nu} \omega'_\nu \quad (16.14)$$

schreiben. Hierbei empfahl sich eine Komponentendarstellung des Kreuzproduktes in (16.12) im körperfesten Bezugssystem, weil damit die Komponenten des Vektors \mathbf{r}' und deshalb auch die Koeffizienten Θ' in der quadratischen Form zeitunabhängig werden. Mit der Identität

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 = \omega^2 \cdot \mathbf{r}'^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')^2 \quad (16.15)$$

erhalten wir aus (16.12) die Formel

$$\Theta'_{\mu\nu} = \int [(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) \delta_{\mu\nu} - x'_\mu x'_\nu] \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (16.16)$$

für die Koeffizientenmatrix in (16.14). Die diagonalen Elemente

$$\Theta'_{\mu\mu} = \int (r'^2 - x_\mu'^2) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = M \cdot \langle d_\mu^2 \rangle \quad (16.17)$$

dieser Matrix werden die **Trägheitsmomente** bezüglich der μ -Achse genannt. Sie sind proportional zum mittleren Abstandsquadrat $\langle d_\mu^2 \rangle$ der Massenpunkte des Körpers von der μ -Achse. Die nichtdiagonalen Elemente

$$\Theta'_{\mu\nu} = - \int x'_\mu x'_\nu \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (\mu \neq \nu) \quad (16.18)$$

heißen **Deviationsmomente**. Die Koeffizienten (16.16) bilden in jedem körperfesten Koordinatensystem eine symmetrische (3×3) -Matrix Θ' . Wir wollen fragen, wie diese Matrix sich beim Übergang auf ein anderes körperfestes System transformiert. Seien also mit der orthogonalen Matrix B

$$x''_\mu = \sum_\alpha b_{\mu\alpha} x'_\alpha \quad (16.19)$$

die Komponenten des Vektors \mathbf{r}' im neuen Koordinatensystem. Wir können das Transformationsverhalten von Θ' aus den Gleichungen (16.14) oder (16.16) ermitteln. Da die Rotationsenergie ein Skalar und die Winkelgeschwindigkeit ein Pseudovektor ist, $\omega'_\mu = \sum_\alpha b_{\alpha\mu} \omega''_\alpha \cdot \det B$, erhalten wir aus (16.14)

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \omega''_\alpha \left(\sum_{\mu\nu} b_{\alpha\mu} \Theta'_{\mu\nu} b_{\beta\nu} \right) \omega''_\beta \quad (16.20)$$

und lesen daraus das Transformationsverhalten

$$\Theta''_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\nu} b_{\alpha\mu} b_{\beta\nu} \Theta'_{\mu\nu} \quad (16.21)$$

ab. Dies ist nach (14.35) das Transformationsverhalten eines Tensors zweiter Stufe. Das koordinatenunabhängige durch die Matrixdarstellung (16.16) charakterisierte Objekt wird daher der **Trägheitstensor** des Körpers \mathcal{K} genannt.

Jede reelle symmetrische Matrix besitzt reelle Eigenwerte und läßt sich durch eine reelle orthogonale Transformation diagonalisieren. Daher existiert für jeden Trägheitstensor Θ ein Koordinatensystem, in dem

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta_\mu \cdot \delta_{\mu\nu}. \quad (16.22)$$

Die Koordinatenachsen dieses Systems sind die **Hauptachsen** und die zugehörigen Momente die **Hauptträgheitsmomente** des Trägheitstensors. Letztere sind wie alle Trägheitsmomente (16.17) immer positiv (außer für strikt lineare Massen-anordnungen). Im Hauptachsensystem hat die Rotationsenergie die einfache Gestalt

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(\Theta'_1 \omega_1'^2 + \Theta'_2 \omega_2'^2 + \Theta'_3 \omega_3'^2). \quad (16.23)$$

Zur koordinatenunabhängigen Veranschaulichung von Trägheitstensenoren dient das **Poinsotsche Trägheitsellipsoid**. Es wird durch die Spitzen derjenigen Vektoren \mathbf{s} beschrieben, die die Bedingung

$$\mathbf{s}^t \Theta \mathbf{s} = 1 \quad (16.24)$$

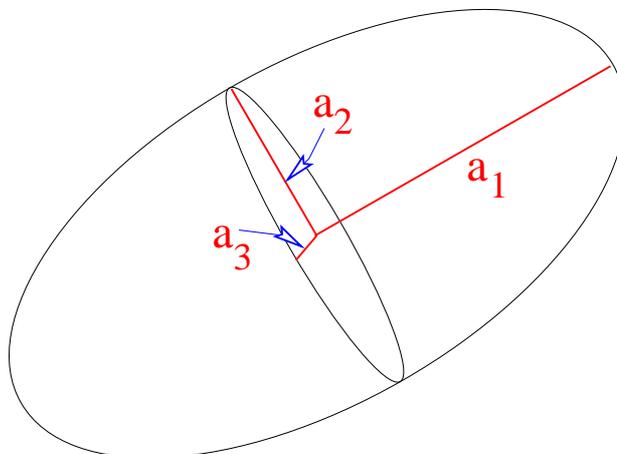
erfüllen. Im Hauptachsensystem ist dieses dreiachsige Ellipsoid durch die Formel

$$\Theta_1 \mathbf{s}_1^2 + \Theta_2 \mathbf{s}_2^2 + \Theta_3 \mathbf{s}_3^2 = 1 \quad (16.25)$$

gegeben. Die Halbachsen des Trägheitsellipsoids

$$a_\mu = \frac{1}{\sqrt{\Theta_\mu}} \quad (16.26)$$

sind also die reziproken Wurzeln aus den Hauptträgheitsmomenten.



Wenn der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \cdot \omega$ in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{n} zeigt und n_μ die Komponenten von \mathbf{n} im Hauptachsensystem sind, gilt für die Rotationsenergie die Formel

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta_{\mathbf{n}} \cdot \omega^2 \quad (16.27)$$

mit dem Trägheitsmoment bezüglich der \mathbf{n} -Achse

$$\Theta_{\mathbf{n}} = \sum_{\mu} \Theta_{\mu} n_{\mu}^2. \quad (16.28)$$

Der Trägheitstensor eines starren Körpers hängt von der Wahl des Aufpunktes O' ab. Für den Übergang zu einem anderen Aufpunkt O'' mittels $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}''$ mit $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{O'O''}$ liest man aus den Gleichungen (16.9) und (16.7) unter Benutzung des Vektors $\mathbf{r}''_S = \overrightarrow{O''S}$ die Beziehung

$$T_{\text{rot}}^{O'} = \frac{M}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0)^2 + M (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}''_S) + T_{\text{rot}}^{O''} \quad (16.29)$$

ab, aus der man bei Bedarf die Beziehung zwischen den beiden Trägheitstensoren Θ' und Θ'' entnehmen kann. Für den speziellen Fall, in dem man als neuen Aufpunkt den Massenmittelpunkt $O'' = S$ des Körpers wählt, gilt $\mathbf{r}''_S = \mathbf{0}$ und man erhält für die Trägheitsmomente in Richtung \mathbf{n} den **Steinerschen Satz**

$$\Theta_{\mathbf{n}}^{O'} = \Theta_{\mathbf{n}}^S + M \cdot d^2. \quad (16.30)$$

Hier ist d die Länge der Komponente des Vektors \mathbf{r}_0 senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$, $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0| = \omega \cdot d$, d.h. der Abstand des Aufpunktes O' von der durch den Massenmittelpunkt S gelegten Drehachse. Trägheitsmomente bezüglich des Massenmittelpunktes sind also minimale Trägheitsmomente. Im allgemeinen ändern sich bei einer Verschiebung des Aufpunktes auch die Deviationsmomente. Wenn wir den Verschiebungsvektor \mathbf{r}_0 im Hauptachsensystem des Trägheitstensors Θ^S durch den Vektor \mathbf{x}_0 darstellen, erhalten wir aus (16.29) mittels der Identität (16.15)

$$\Theta_{\mu\nu}^{O'} = \Theta_{\mu}^S \cdot \delta_{\mu\nu} + M \mathbf{x}_0^2 \delta_{\mu\nu} - M x_{0\mu} x_{0\nu}. \quad (16.31)$$

Der Trägheitstensor $\Theta^{O'}$ bleibt bei dieser Verschiebung nur dann diagonal, wenn der Vektor \mathbf{r}_0 in Richtung einer der Hauptträgheitsachsen zeigt.

Als Beispiel berechnen wir zunächst den Trägheitstensor bezüglich des Massenmittelpunktes einer homogen mit Masse der Dichte ρ gefüllten Kugel vom Radius R . Wir können auch ohne Rechnung einsehen, daß dieser Trägheitstensor ein Vielfaches des Einheitstensors sein muß, weil die Kugel isotrop ist und es keine ausgezeichnete Richtung für die Hauptachsen gibt. Der Trägheitstensor muß also unabhängig vom Koordinatensystem dieselbe Gestalt

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta_0 \cdot \delta_{\mu\nu} \quad (16.32)$$

haben. Daß alle Deviationsmomente verschwinden, kann man auch sofort anhand der Formel (16.16) sehen, weil positive und negative Beträge sich aus Symmetriegründen kompensieren. Die Kugel bildet in kartesischen Koordinaten den Normalbereich

$$\begin{aligned} -R &\leq x_1 \leq R \\ -\sqrt{R^2 - x_1^2} &\leq x_2 \leq \sqrt{R^2 - x_1^2} \\ -\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} &\leq x_3 \leq \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}. \end{aligned} \quad (16.33)$$

Allerdings sind die Grenzen des Normalbereichs in Kugelkoordinaten viel einfacher durch

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (16.34)$$

gegeben. Volumenintegrationen in Kugelkoordinaten sind besonders einfach für Integranden, die nur von der Koordinate r abhängen. Dann gilt nämlich

$$\int_{\mathcal{K}} f(r) d^3\mathbf{r} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi f(r) r^2 \sin \vartheta = 4\pi \int_0^R f(r) r^2 dr. \quad (16.35)$$

Die Integrale (16.16) haben diese Eigenschaft zwar nicht, aber wir können für isotrope Trägheitstensoren (16.32) das Trägheitsmoment Θ_0 aus der Spur des Trägheitstensors entnehmen, für die wir aus (16.16) die Formel

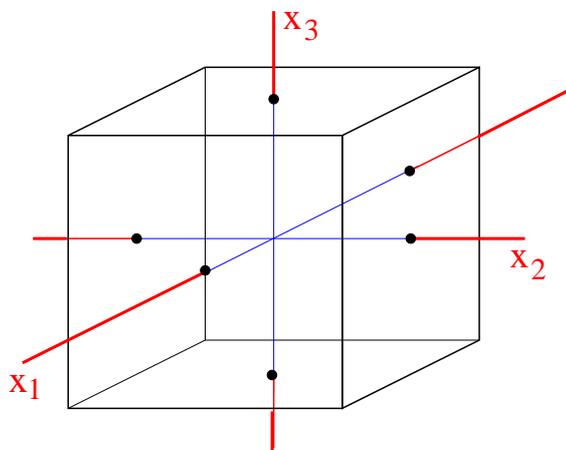
$$\text{Sp } \Theta' = \sum_{\mu=1}^3 \Theta'_{\mu\mu} = \int 2(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (16.36)$$

gewinnen. Wir erhalten daher für das Trägheitsmoment unserer Kugel das Ergebnis

$$\Theta_0 = \frac{2}{3} \rho \cdot 4\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{2}{5} M R^2, \quad (16.37)$$

wobei wir für die Masse der Kugel $M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$ eingesetzt haben.

Ein Körper muß keineswegs isotrop sein, um einen isotropen Trägheitstensor zu besitzen. Ein homogen mit Masse gefüllter **Würfel** liefert dafür ein eindruckliches Beispiel.



Wir betrachten den Trägheitstensor dieses Würfels bezüglich seines Massenmittelpunktes in dem in der vorstehenden Figur gezeigten Koordinatensystem. Wegen der hohen Symmetrie des Würfels erkennt man sofort, daß in diesem Koordinatensystem die Deviationsmomente verschwinden und die drei Trägheitsmomente identisch sind. Daher hat der Trägheitstensor des Würfels in diesem Koordinatensystem dieselbe isotrope Diagonalgestalt (16.32) wie die Kugel. Aus der Invarianz des Einheitstensors unter beliebigen Verdrehungen des Koordinatensystems zieht man die anschaulich weniger offensichtliche Folgerung, daß der Trägheitstensor des Würfels (bezüglich des Massenmittelpunktes) in jedem Koordinatensystem diagonal ist. Diese Aussage gilt auch für die anderen **Platonischen Körper**.

Bei **rotationssymmetrischen Körpern** wählen wir die Rotationsachse und zwei beliebige dazu senkrechte Achsen durch den Massenmittelpunkt als kartesische Koordinatenachsen. Aus Symmetriegründen verschwinden dann wieder alle Deviationsmomente und die beiden Trägheitsmomente um die zur Rotationsachse senkrechten Achsen sind gleich. Wenn wir die Rotationsachse als x_3 -Achse wählen, hat der Trägheitstensor des Rotationskörpers die Gestalt

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \quad (16.38)$$

mit nur zwei verschiedenen Trägheitsmomenten.

Der Drehimpuls eines starren Körpers bezüglich des raumfesten Aufpunktes O ist

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^O &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \int_{\mathcal{K}} (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}') \times [\mathbf{v}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \\ &= M \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 + M \mathbf{r}_0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_S) + M \mathbf{r}'_S \times \mathbf{v}_0 + \mathbf{L}^{O'}, \end{aligned} \quad (16.39)$$

wo wie in (16.7) $\mathbf{r}'_S = \overrightarrow{O'S}$. Diese Zerlegung wird wie bei der kinetischen Energie besonders einfach für $O' = S$ und entspricht dann der Zerlegung (7.33) in inneren und äußeren Drehimpuls. Die Komponenten des Drehimpulses bezüglich des körperfesten Aufpunktes O' und im körperfesten Koordinatensystem ergeben sich zu

$$\begin{aligned} L_\mu^{O'} &= \int_{\mathcal{K}} [\mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')]_\mu \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \int_{\mathcal{K}} [\omega'_\mu \cdot \mathbf{r}'^2 - x'_\mu \cdot \sum_{\nu=1}^3 \omega'_\nu x'_\nu] \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \\ &= \int_{\mathcal{K}} \sum_{\nu=1}^3 (\mathbf{r}'^2 \delta_{\mu\nu} - x'_\mu x'_\nu) \omega'_\nu \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \sum_{\nu=1}^3 \Theta'_{\mu\nu} \omega'_\nu. \end{aligned} \quad (16.40)$$

Wegen des tensoriellen Transformationsverhaltens aller involvierten Größen impliziert dies die koordinatenunabhängige Formel

$$\mathbf{L}^{O'} = \Theta \boldsymbol{\omega} \quad (16.41)$$

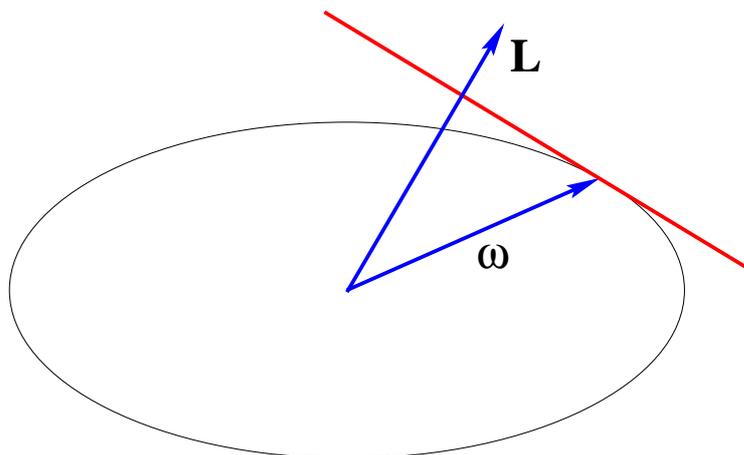
zwischen den beiden Pseudovektoren \mathbf{L} und $\boldsymbol{\omega}$. Im Hauptachsensystem vereinfacht sich die Gleichung (16.40) zu

$$L_{\mu}^{O'} = \Theta'_{\mu} \omega'_{\mu}. \quad (16.42)$$

Man erkennt, daß der Drehimpuls nur dann in Richtung der Winkelgeschwindigkeit zeigt, wenn diese in einer der drei Hauptachsen liegt. Aus (16.14) und (16.40) erhalten wir die allgemeingültige Beziehung

$$\mathbf{L}^{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} = 2T_{\text{rot}}. \quad (16.43)$$

Das Trägheitsellipsoid erlaubt die geometrische Konstruktion der Richtung des Drehimpulses $\mathbf{L}^{O'}$ aus der Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Wenn die Spitzen der Vektoren $\boldsymbol{\omega}$ im Sinne von (16.24) das Ellipsoid $\boldsymbol{\omega}^t \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega} = 2T_{\text{rot}}$ aufspannen, erfüllen die infinitesimalen Tangentialvektoren $\delta\boldsymbol{\omega}$ an das Ellipsoid im Punkte $\boldsymbol{\omega}$ die Bedingung $\delta\boldsymbol{\omega}^t \cdot \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega} = 0$, stehen also senkrecht auf dem Drehimpuls $\mathbf{L}^{O'}$. Die sich daraus ergebende Konstruktion ist in der folgenden Figur verdeutlicht.



Der Drehimpuls steht senkrecht auf der Tangentialebene an den Punkt, an dem die momentane Winkelgeschwindigkeit das Trägheitsellipsoid durchstößt.

Wir wollen jetzt die allgemeinen Bewegungsgleichungen für einen starren Körper aus dem d'Alembertschen Prinzip ableiten. Die virtuellen Verrückungen $\delta\mathbf{r}_i$ für einen starren Körper, der keinen weiteren Zwangsbedingungen unterliegt, sind durch die Gleichung

$$\delta\mathbf{r}_i = \delta\mathbf{r}_0 + \delta\varphi \times \mathbf{r}'_i \quad (16.44)$$

gegeben. Hier repräsentieren die beiden infinitesimalen Vektoren $\delta\mathbf{r}_0$ und $\delta\varphi$ die sechs Freiheitsgrade der Bewegung. Nach dem d'Alembertschen Prinzip gilt dann

$$\sum_{i=1}^n \delta\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) = \delta\mathbf{r}_0 \cdot \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) + \delta\varphi \cdot \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \times (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i)] = 0. \quad (16.45)$$

Aus dem Verschwinden des ersten Summanden folgt die Bewegungsgleichung

$$M \ddot{\mathbf{r}}_S = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{F}, \quad (16.46)$$

die man mit dem Impulssatz (7.6) identifizieren kann. Bei Gültigkeit des Impulssatzes kann man im zweiten Summanden von (16.45) den Term $\sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i)] = 0$ ergänzen und erhält die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{N}, \quad (16.47)$$

die den Drehimpulssatz (7.29) für den starren Körper darstellt. Wenn man als körperfesten Aufpunkt den Massenmittelpunkt $O' = S$ wählt, kann man anstelle von (16.47) auch den Satz (7.35) für den inneren Drehimpuls des starren Körpers

$$\frac{d\mathbf{L}^{(i)}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times \ddot{\mathbf{r}}'_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{N}^{(i)} \quad (16.48)$$

betrachten. Ihn erhält man aus dem zweiten Summanden in (16.45) wegen der dann gültigen Relation $\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_0 = M \mathbf{r}'_S \times \ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$.

Als erstes Beispiel wollen wir einen **kräftefreien starren Körper** betrachten. Er kann entweder völlig frei beweglich sein oder der zusätzlichen Zwangsbedingung unterliegen, daß sein Aufpunkt $O' = O$ fixiert ist. Im ersten Fall wählt man den Massenmittelpunkt als Aufpunkt und beschreibt die Bewegung im Inertialsystem des Massenmittelpunktes $S = O$. In beiden Fällen verbleibt die Berechnung der Rotationsbewegung, ein Problem mit drei Freiheitsgraden (**Eulerscher Kreisel**).

Aus (16.47) schließen wir hier auf die Erhaltung des Drehimpulses

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}. \quad (16.49)$$

Dies sagt uns allerdings noch nicht sehr viel über die Bewegung des starren Körpers. Ähnlich wie im Anhang C können wir immerhin auf die Existenz von drei involutorischen Erhaltungsgrößen schließen, die Energie E , das Betragsquadrat des Drehimpulses \mathbf{L}^2 und eine seiner Komponenten, z.B. L_z . Daher ist dieses Problem wie in Kapitel 13 ausgeführt integrierbar.

Die Lagrangefunktion für unser Problem ist gleich der kinetischen Energie der Rotation und nach (16.23) und (14.61) im körperfesten Hauptachsensystem durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \omega_{\mu}^t \Theta'_{\mu} \omega'_{\mu} = \frac{1}{2} [\Theta'_1 (\dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi)^2 \\ &+ \Theta'_2 (-\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi)^2 + \Theta'_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2] \end{aligned} \quad (16.50)$$

gegeben. In dieser Lagrangefunktion ist eine der generalisierten Koordinaten, nämlich φ , zyklisch und daher der kanonisch konjugierte Impuls

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta'_1(\dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi) \sin \vartheta \sin \psi + \Theta'_2(-\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi) \sin \vartheta \cos \psi + \Theta'_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) \cos \vartheta \quad (16.51)$$

erhalten. Er sollte folglich mit einer raumfesten Komponente des Drehimpulses \mathbf{L} übereinstimmen. Die beiden anderen kanonischen Impulse

$$p_\vartheta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = \Theta'_1(\dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi) \cos \psi + \Theta'_2(-\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi) \sin \psi \quad (16.52)$$

und

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \Theta'_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) \quad (16.53)$$

sind jedoch nicht erhalten. Da die drei Lagrangeschen Bewegungsgleichungen aber äquivalent zur Vektorgleichung (16.49) sein müssen, müssen die drei obigen Impulse in Beziehung zu den drei raumfesten Komponenten des Drehimpulses stehen. Um die raumfesten Komponenten des Drehimpulses durch die Eulerschen Winkel und ihre Geschwindigkeiten auszudrücken, muß man seine körperfesten Komponenten im Hauptachsensystem (16.42) nach (14.11) transformieren:

$$L_\mu = \sum_{\nu=1}^3 a_{\nu\mu} L'_\nu = \sum_{\nu=1}^3 a_{\nu\mu} \Theta'_\nu \omega'_\nu. \quad (16.54)$$

Ein Vergleich dieser Komponenten mit den generalisierten Impulsen unter Verwendung von (14.27) und (14.61) liefert schließlich die Beziehungen

$$\begin{aligned} p_\varphi &= L_3 \\ p_\vartheta &= \cos \varphi \cdot L_1 + \sin \varphi \cdot L_2 \\ p_\psi &= \sin \vartheta (\sin \varphi \cdot L_1 - \cos \varphi \cdot L_2) + \cos \vartheta \cdot L_3, \end{aligned} \quad (16.55)$$

deren Umkehrung

$$\begin{aligned} L_1 &= p_\vartheta \cos \varphi + \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \sin \varphi \\ L_2 &= p_\vartheta \sin \varphi - \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \cos \varphi \\ L_3 &= p_\varphi \end{aligned} \quad (16.56)$$

lautet. Mittels (16.56) können wir die Poissonklammern zwischen den Komponenten des Drehimpulses berechnen und erhalten wie in (C.3)

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k. \quad (16.57)$$

Angehts der verschwindenden Poissonklammern zwischen je zwei generalisierten Impulsen verstehen wir jetzt, warum nicht alle drei generalisierten Impulse mit drei raumfesten Komponenten des Drehimpulses übereinstimmen können. Durch Umkehren der Transformation (16.54) berechnen sich die Komponenten des Drehimpulses im körperfesten Hauptachsensystem zu

$$\begin{aligned} L'_1 &= \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \sin \psi + p_\vartheta \cos \psi \\ L'_2 &= \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \cos \psi - p_\vartheta \sin \psi \\ L'_3 &= p_\psi. \end{aligned} \quad (16.58)$$

Nach Auflösung der Gleichungen (16.51) bis (16.53) nach den generalisierten Geschwindigkeiten und Einsetzen in die Lagrangefunktion (16.50) erhalten wir schließlich die Hamiltonfunktion, die sich sehr einfach durch die Komponenten (16.58) ausdrücken läßt:

$$H = \sum_{\nu=1}^3 \frac{L'_\nu{}^2}{2\Theta'_\nu}. \quad (16.59)$$

Um den Übergang in einen linearen starren Körper zu vollführen, der nur 2 Freiheitsgrade der Rotation hat, muß man in (16.50) $\Theta'_1 = \Theta'_2 = \Theta'$ und $\Theta'_3 = 0$ setzen. Dann heben sich der Eulersche Winkel ψ und seine Geschwindigkeit $\dot{\psi}$ vollständig aus der Lagrangefunktion heraus und man bestätigt den Rotationsanteil der Lagrangefunktion (9.42). Die beiden kanonischen Impulse sind dann durch

$$p_\vartheta = \Theta' \dot{\vartheta}, \quad p_\varphi = \Theta' \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \quad (16.60)$$

gegeben, der Drehimpuls schreibt sich nach (1.16,17) mit diesen Impulsen als

$$\mathbf{L} = p_\vartheta \mathbf{e}_\varphi - \frac{p_\varphi}{\sin \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta \quad (16.61)$$

und die Hamiltonfunktion ist damit einfach

$$H = \frac{\mathbf{L}^2}{2\Theta'}. \quad (16.62)$$

Zur Berechnung der Bewegung des starren Körpers benutzt man anstelle der kanonischen Bewegungsgleichungen für die Impulse (16.55) besser die **Eulerschen Bewegungsgleichungen** für die körperfesten Komponenten (16.58) des Drehimpulses. Man erhält sie, indem man den Erhaltungssatz (16.49) für den Drehimpuls mittels (15.6) in das körperfeste System transformiert,

$$\frac{d'\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{0}. \quad (16.63)$$

Die Komponenten dieser Vektorgleichung im körperfesten Hauptachsensystem schreiben sich wegen (16.42) entweder in Winkelgeschwindigkeiten als

$$\begin{aligned}\Theta'_1 \dot{\omega}'_1 &= (\Theta'_2 - \Theta'_3) \omega'_2 \omega'_3 \\ \Theta'_2 \dot{\omega}'_2 &= (\Theta'_3 - \Theta'_1) \omega'_3 \omega'_1 \\ \Theta'_3 \dot{\omega}'_3 &= (\Theta'_1 - \Theta'_2) \omega'_1 \omega'_2\end{aligned}\quad (16.64)$$

oder in Drehimpulsen mit

$$a_1 = \frac{1}{\Theta'_3} - \frac{1}{\Theta'_2}, \quad a_2 = \frac{1}{\Theta'_1} - \frac{1}{\Theta'_3}, \quad a_3 = \frac{1}{\Theta'_2} - \frac{1}{\Theta'_1}\quad (16.65)$$

als

$$\begin{aligned}\dot{L}'_1 &= a_1 L'_2 L'_3 \\ \dot{L}'_2 &= a_2 L'_3 L'_1 \\ \dot{L}'_3 &= a_3 L'_1 L'_2.\end{aligned}\quad (16.66)$$

Angesichts der beiden Identitäten

$$\sum_{\mu=1}^3 a_\mu = 0, \quad \sum_{\mu=1}^3 \frac{a_\mu}{\Theta'_\mu} = 0\quad (16.67)$$

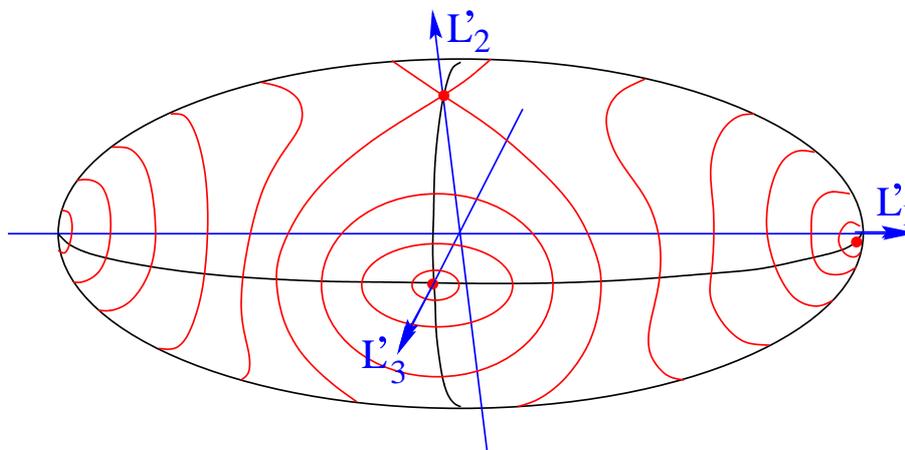
lesen wir aus (16.66) noch einmal die beiden Erhaltungsgrößen

$$E = \sum_{\mu=1}^3 \frac{L'^2_\mu}{2\Theta'_\mu}\quad (16.68)$$

und

$$\mathbf{L}^2 = \sum_{\mu=1}^3 L'^2_\mu\quad (16.69)$$

ab. In der nachfolgenden Figur sind im Raum der Drehimpulskomponenten für $\Theta'_1 > \Theta'_2 > \Theta'_3$ auf dem Ellipsoid (16.68) bei fester Energie E die Schnittlinien mit Kugeln (16.69) zu verschiedenen Drehimpulsquadraten \mathbf{L}^2 gezeichnet.

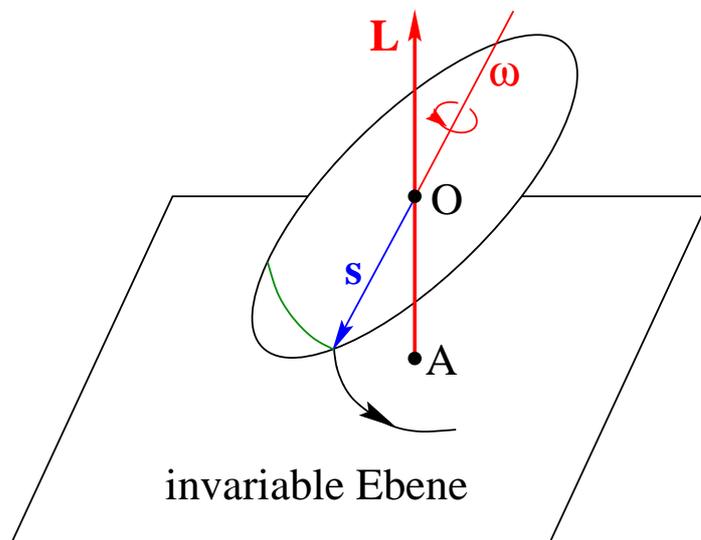


Der im raumfesten Bezugssystem erhaltene Drehimpulsvektor muß mit der Zeit im körperfesten Bezugssystem längs einer solchen Schnittlinie laufen. Dies erlaubt uns eine Charakterisierung der Bewegung des körperfesten Systems relativ zum raumfesten System.

Nach Gleichung (16.66) kann der Drehimpuls nur dann im körperfesten Bezugssystem stationär sein, wenn zwei der Komponenten L'_μ verschwinden, d.h. wenn der Drehimpuls parallel zu einer der Hauptachsen des starren Körpers ist. Die obige Figur zeigt uns zwei ganz verschiedene Verhaltensweisen, wenn der Drehimpuls wenig von einer der Hauptachsen abweicht. Für die beiden Hauptachsen mit dem größten und dem kleinsten Hauptträgheitsmoment bewegt sich der Drehimpuls auf kleinen Ellipsen um die betreffende Hauptträgheitsachse. Für die Hauptachse mit dem mittleren Hauptträgheitsmoment bewegt er sich jedoch auf geschlossenen Bahnen, die sich weit von der Hauptachse entfernen. Die Rotationen um die extremalen Hauptachsen sind also gegen kleine Störungen stabil, während die um die mittlere Hauptachse instabil ist.

Die folgende geometrische Veranschaulichung der Bewegung des starren Körpers im raumfesten Bezugssystem geht auf Poincot zurück. Wir betrachten dazu das starr mit dem Körper verbundene und im Aufpunkt O zentrierte Trägheitsellipsoid (16.24). Es gibt zwei Ebenen, die zum erhaltenen Drehimpuls \mathbf{L} normal sind und das Trägheitsellipsoid berühren. Wir hatten oben (im Anschluß an Gleichung (16.43)) schon gefunden, daß durch die Berührungspunkte $\pm\mathbf{s}$ dieser Tangentialebenen die Richtung der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ markiert wird. Durch Vergleich der Definition (16.24) des Trägheitsellipsoids mit der Rotationsenergie ergibt sich die genauere Beziehung

$$\pm\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T_{\text{rot}}}}, \quad (16.70)$$



aus der wegen (16.43) die Gleichung

$$\pm|\overrightarrow{OA}| \cdot L = \pm\mathbf{s} \cdot \mathbf{L} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{\sqrt{2T_{\text{rot}}}} = \sqrt{2T_{\text{rot}}} \quad (16.71)$$

folgt. Nach (16.71) ändert sich der Abstand $|\overline{OA}|$ der Tangentialebenen vom Mittelpunkt des Trägheitsellipsoids nicht mit der Zeit. Diese Ebenen werden daher die **invariablen Ebenen** genannt. Da der Berührungspunkt mit der momentanen Rotationsachse übereinstimmt, gleitet das Trägheitsellipsoid nicht auf den invariablen Ebenen, sondern rollt auf ihm. Die Berührungspunkte bewegen sich auf dem Trägheitsellipsoid längs geschlossener Linien, die man **Polhodie** nennt und die in enger Beziehung zu den roten Schnittlinien in der vorletzten Figur stehen. Auf den invariablen Ebenen beschreiben die Berührungspunkte Linien, die **Herpolhodie** heißen. Die damit gefundene geometrische Beschreibung der Bewegung nennt man die **Poinsotsche Konstruktion**:

Der Abstand des Mittelpunktes des Trägheitsellipsoids von den invariablen Ebenen, $\sqrt{2T_{\text{rot}}}/L$, ist durch die Erhaltungsgrößen bestimmt. Das Trägheitsellipsoid rollt gleitfrei auf den invariablen Ebenen ab.

Die quantitative Lösung der Bewegungsgleichungen (16.64) oder (16.66) ist besonders einfach, wenn zwei der Hauptträgheitsmomente übereinstimmen. Das Trägheitsellipsoid ist dann ein Rotationsellipsoid. Sei z.B. $\Theta'_1 = \Theta'_2 = \Theta'_\perp$ und $\Theta'_3 = \Theta'_\parallel$, dann sind $\omega'_3(t) = \omega'_\parallel$ und $L'_3 = \Theta'_\parallel \omega'_\parallel$ erhalten und die beiden anderen Bewegungsgleichungen vereinfachen sich zu zwei gekoppelten linearen Differentialgleichungen, die man am geschicktesten durch Einführung der komplexen Größe

$$z(t) = \omega'_1(t) + i \omega'_2(t) \quad (16.72)$$

löst. Deren Bewegungsgleichung lautet unter Benutzung des Asymmetrieparameters $\eta = \Theta'_\parallel / \Theta'_\perp - 1$

$$\dot{z}(t) = i \eta \omega'_\parallel z(t) \quad (16.73)$$

und hat die allgemeine Lösung

$$z(t) = \omega'_\perp e^{i(\eta \omega'_\parallel t + \alpha)}. \quad (16.74)$$

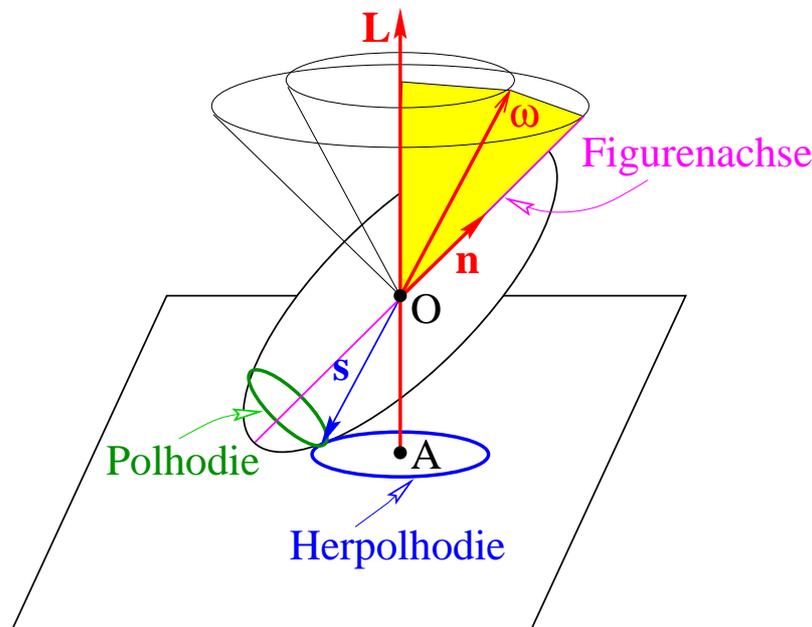
Diese Lösung sagt uns, daß der Vektor der Winkelgeschwindigkeit einen festen Betrag hat und um die Figurenachse des Rotationsellipsoids mit der Kreisfrequenz $\eta \omega'_\parallel$ rotiert. Die körperfesten Komponenten der Winkelgeschwindigkeit haben daher die Zeitabhängigkeit

$$\begin{aligned} \omega'_1(t) &= \omega'_\perp \cos(\eta \omega'_\parallel t + \alpha) \\ \omega'_2(t) &= \omega'_\perp \sin(\eta \omega'_\parallel t + \alpha) \\ \omega'_3(t) &= \omega'_\parallel \end{aligned} \quad (16.75)$$

und die körperfesten Komponenten des Drehimpulses sind

$$\begin{aligned} L'_1(t) &= \Theta'_\perp \omega'_\perp \cos(\eta \omega'_\parallel t + \alpha) \\ L'_2(t) &= \Theta'_\perp \omega'_\perp \sin(\eta \omega'_\parallel t + \alpha) \\ L'_3(t) &= \Theta'_\parallel \omega'_\parallel. \end{aligned} \quad (16.76)$$

Man erkennt, daß die Figurenachse (d.h. die körperfeste 3-Achse) und die beiden Vektoren $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{L} immer in einer Ebene liegen und feste Winkel miteinander einschließen. Da der Drehimpuls \mathbf{L} im raumfesten Bezugssystem nach (16.49) erhalten ist, impliziert dies in diesem Bezugssystem eine Bewegung der Figurenachse und des Vektor der Winkelgeschwindigkeit wie in der folgenden Figur gezeigt.



Die Ebene (gelb), in der die Figurenachse und die momentane Winkelgeschwindigkeit liegen, rotiert gleichförmig um den Drehimpulsvektor. Diese Rotation nennt man **Präzession**. Aufgrund der Präzession bewegen sich die Figurenachse und die momentane Winkelgeschwindigkeit auf Kegelflächen mit dem Drehimpulsvektor als Kegelachse. Die Polhodie und die Herpolhodie sind in diesem Fall Kreise. Zur Bestimmung der Präzessionskreisfrequenz muß man den Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit aus dem Drehimpulsvektor \mathbf{L} und dem Einheitsvektor \mathbf{n} in Richtung der Figurenachse, dessen Komponentendarstellung im körperfesten Hauptachsensystem $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ ist, linear kombinieren. Man erhält unter Benutzung von (16.75,76)

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\Theta'_{\perp}} \mathbf{L} - \eta \omega'_{\parallel} \mathbf{n} \quad (16.77)$$

und liest daraus für die Kreisfrequenz der Präzession den Wert L/Θ'_{\perp} ab. In der Figur ist die Bewegung für den Fall $\Theta'_{\parallel} < \Theta'_{\perp}$ dargestellt.

Für starre Körper mit dreiachsigen Trägheitsellipsoiden kann man die Bewegungsgleichungen (16.66) mittels der beiden Erhaltungsgrößen (16.68) und (16.69) entkoppeln. Die Lösung der resultierenden nichtlinearen Differentialgleichungen, die wir hier nicht weiterverfolgen werden, gelingt mittels elliptischer Integrale.

Wir kommen jetzt auf die Beschreibung starrer Körper zurück, die äußeren Kräften unterliegen. Wenn diese Kräfte sich aus einem Potential ableiten und wenn wir den körperfesten Aufpunkt in den Massenmittelpunkt des Körpers legen ($O' = S$),

lautet die Lagrangefunktion wegen (16.10), (16.11), (16.23) und (14.1)

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{M}{2} \mathbf{v}_S^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \Theta'_{\mu} \omega_{\mu}^2 - \sum_{i=1}^n V(\mathbf{r}_S + \sum_{\nu=1}^3 x'_{i\nu} \mathbf{e}'_{\nu}). \quad (16.78)$$

Hier sind die Bewegung des Massenmittelpunktes und die Rotation in der kinetischen Energie zwar völlig entkoppelt, sie werden aber durch die potentielle Energie im allgemeinen miteinander verknüpft.

Für homogene Kraftfelder $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{g}$ ist eine solche Verknüpfung allerdings nicht vorhanden und die resultierenden Kräfte (16.46) und Drehmomente (16.47,48) sind durch

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = M \mathbf{g}, \quad \mathbf{N} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = M \mathbf{r}_S \times \mathbf{g}, \quad \mathbf{N}^{(i)} = \mathbf{0} \quad (16.79)$$

gegeben. Als einfaches Beispiel für die Verknüpfung der translatorischen und rotatorischen Freiheitsgrade betrachten wir das Potential eines vom starren Körper weit entfernten gravitativen Zentrums Z . Das auf den i -ten Massenpunkt wirkende Gravitationspotential

$$V_i = -\frac{\gamma m_i}{|\mathbf{R}_S - \mathbf{r}'_i|} = -\frac{\gamma m_i}{\sqrt{R_S^2 + r_i'^2 - 2\mathbf{R}_S \cdot \mathbf{r}'_i}} \quad (16.80)$$

kann nach Potenzen des als klein vorausgesetzten Längenverhältnisses r_i/R_S entwickelt werden. Unter Benutzung der binomischen Reihe

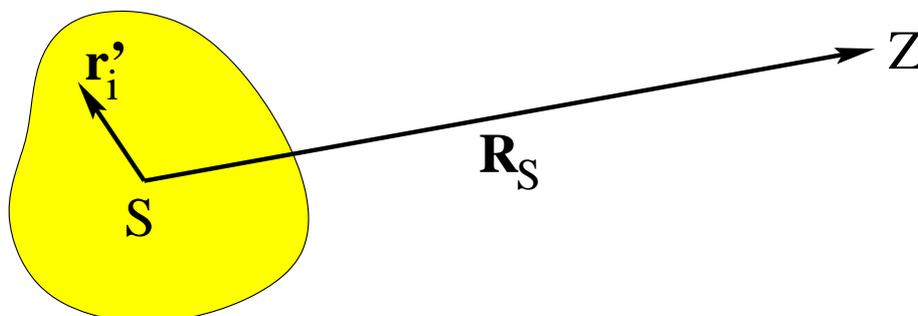
$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + O(x^3) \quad (16.81)$$

erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{R_S^2 + r_i'^2 - 2\mathbf{R}_S \cdot \mathbf{r}'_i}} = \frac{1}{R_S} + \frac{\mathbf{R}_S \cdot \mathbf{r}'_i}{R_S^3} + \frac{3(\mathbf{R}_S \cdot \mathbf{r}'_i)^2 - R_S^2 r_i'^2}{2R_S^5} + O(R_S^{-4}) \quad (16.82)$$

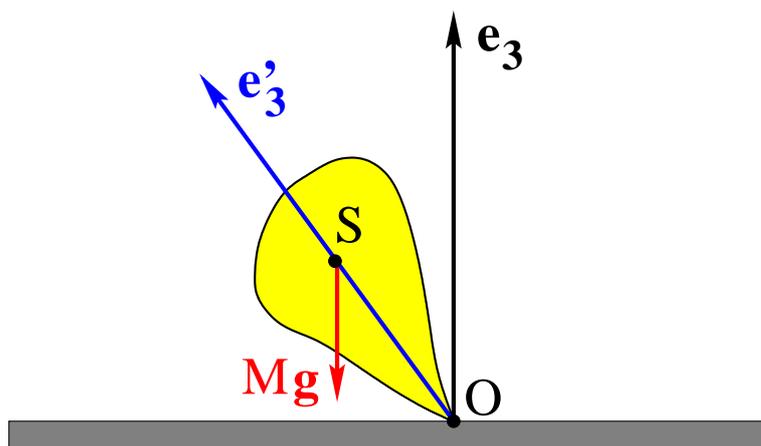
und damit für die potentielle Energie des starren Körpers

$$\sum_{i=1}^n V_i = -\frac{\gamma M}{R_S} + \frac{\gamma}{2R_S^3} \left[\frac{3}{R_S^2} \sum_{\mu,\nu} R_{S\mu} \Theta_{\mu\nu} R_{S\nu} - \text{Sp} \Theta \right] + O(R_S^{-4}). \quad (16.83)$$



Der erste Beitrag stellt das für punkthafte Objekte bekannte Gravitationspotential dar, während der zweite Beitrag von der Orientierung der Hauptachsen des starren Körpers relativ zum Verbindungsvektor zum Gravitationszentrum abhängt. Dieses **Quadrupolpotential** verschwindet für isotrope Körper. Für anisotrope erzeugt es ein Drehmoment und damit eine Zeitabhängigkeit des Drehimpulses des starren Körpers. Im Falle der abgeplatteten Erde ist das von der Sonne und dem Mond erzeugte Quadrupolpotential verantwortlich für die **astronomische Präzession** der Erdachse um die Normale zur Ekliptik in etwa 26000 Jahren.

Interessante Beispiele für die Bewegung starrer Körper im homogenen Schwerfeld sind **Kreisel**. Als Kreisel bezeichnet man einen starren Körper, der an einem Punkt fixiert ist und dem Schwerfeld unterliegt. Ein Kreisel hat damit drei Freiheitsgrade. Man erkennt sofort zwei Erhaltungsgrößen, nämlich die Energie und die Komponente L_3 des Drehimpulses parallel zur Richtung der Erdbeschleunigung, zu der das Drehmoment (16.79) orthogonal steht. Leider gibt es keine weitere Erhaltungsgröße, so daß der Kreisel im allgemeinen nicht integrierbar ist. Für die komplexe Bewegung eines allgemeinen Kreisels existiert daher keine Lösung durch Integrale.

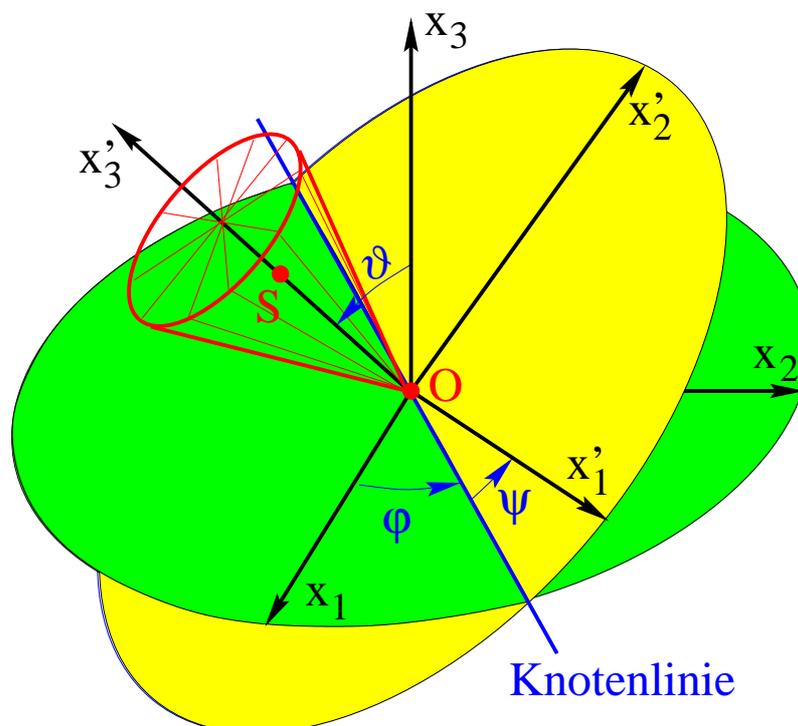


Eine weitere Erhaltungsgröße existiert jedoch für einen speziellen Kreisel, den **symmetrischen** oder **Lagrangeschen Kreisel**. Ein Kreisel heißt symmetrisch, wenn sein Trägheitsellipsoid bezüglich des Festpunktes O ein Rotationsellipsoid ist, auf dessen Rotationsachse der Massenmittelpunkt S liegt. Wenn wir wieder die Bezeichnungen $\Theta'_\perp = \Theta'_1 = \Theta'_2$ und $\Theta'_\parallel = \Theta'_3$ verwenden und den Abstand zwischen dem Festpunkt O und dem Massenmittelpunkt S mit l bezeichnen, erhalten wir mittels (16.50) für den symmetrischen Kreisel die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Theta'_\perp(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2}\Theta'_\parallel(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 - Mgl \cos \vartheta. \quad (16.84)$$

In dieser Lagrangefunktion sind die beiden generalisierten Koordinaten ψ und φ zyklisch. Die beiden zugehörigen generalisierten Impulse p_ψ und p_φ sind daher erhalten und involutorisch zueinander. Da wir aus (16.56) und (16.58) die Beziehungen $p_\varphi = L_3$ und $p_\psi = L'_3$ ablesen, sind die Energie E , die vertikale Komponente

des Drehimpulses L_3 und die Komponente L'_3 des Drehimpulses in Richtung der Figurenachse drei involutorische Erhaltungsgrößen und daher ist der Lagrangesche Kreisel integrabel. Die folgende Figur zeigt noch einmal die geometrische Bedeutung der Eulerschen Winkel für das hier betrachtete Problem.



Da zwei der generalisierten Impulse schon zyklisch sind, erübrigt sich hier die Durchführung einer kanonischen Transformation. Wir erhalten aus (16.51) und (16.53) die Formeln

$$L_3 = p_\varphi = \dot{\varphi} (\Theta'_\perp \sin^2 \vartheta + \Theta'_\parallel \cos^2 \vartheta) + \dot{\psi} \Theta'_\parallel \cos^2 \vartheta \quad (16.85)$$

und

$$L'_3 = p_\psi = (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) \Theta'_\parallel. \quad (16.86)$$

Mittels der Auflösung dieser Formeln nach den generalisierten Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{L_3 - L'_3 \cos \vartheta}{\Theta'_\perp \sin^2 \vartheta} \\ \dot{\psi} &= \frac{L'_3}{\Theta'_\parallel} - \frac{L_3 - L'_3 \cos \vartheta}{\Theta'_\perp \sin^2 \vartheta} \cos \vartheta \end{aligned} \quad (16.87)$$

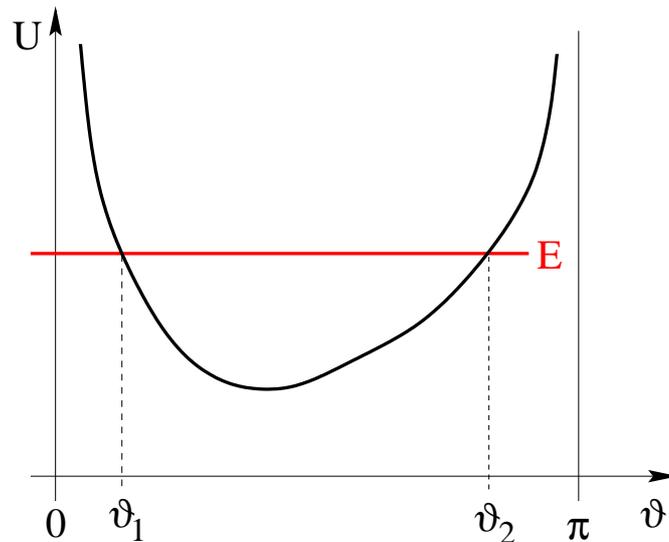
erhalten wir für die Energie die Gleichung

$$E = \frac{1}{2} \Theta'_\perp \dot{\vartheta}^2 + U(\vartheta) \quad (16.88)$$

mit der effektiven potentiellen Energie

$$U(\vartheta) = \frac{(L_3 - L'_3 \cos \vartheta)^2}{2\Theta'_\perp \sin^2 \vartheta} + Mgl \cos \vartheta + \frac{L_3'^2}{2\Theta'_\parallel}, \quad (16.89)$$

deren qualitatives Verhalten in der folgenden Figur gezeigt ist.



Dieses eindimensionale Problem kann nunmehr mit den in Kapitel 3 diskutierten Methoden gelöst werden. Der **Inklinationswinkel** ϑ läuft periodisch zwischen den Extremalwerten ϑ_1 und ϑ_2 hin und her. Diese periodische Änderung des Inklinationswinkels nennt man **Nutation**. Die Lösung gestaltet sich besonders übersichtlich, wenn man anstelle des Eulerschen Winkels ϑ die Variable $u = \cos \vartheta$ einführt. Mit $\dot{u}^2 = \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \vartheta$ nimmt dann der Energiesatz (16.88) die Gestalt

$$\dot{u}^2 = f(u) \quad (16.90)$$

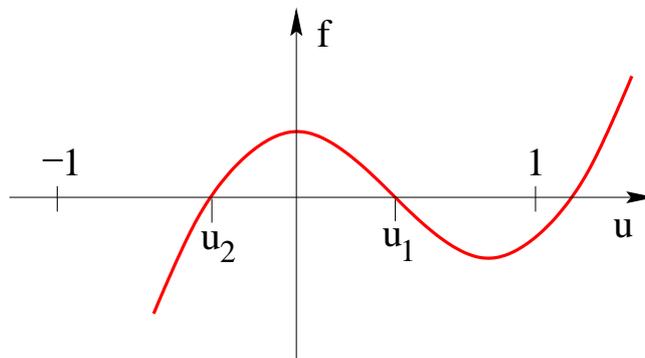
an, wobei

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2 \quad (16.91)$$

ein Polynom dritten Grades in u ist und die verwendeten Abkürzungen die Bedeutung

$$a = \frac{L_3}{\Theta'_\perp}, \quad b = \frac{L'_3}{\Theta'_\perp}, \quad \alpha = \frac{2E - L_3'^2/\Theta'_\parallel}{\Theta'_\perp} > 0, \quad \beta = \frac{2Mgl}{\Theta'_\perp} > 0 \quad (16.92)$$

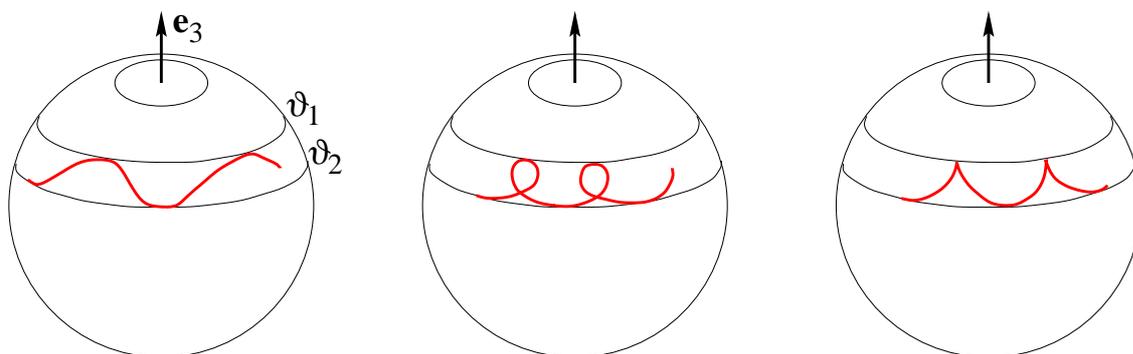
haben. Die Lösung der Gleichung (16.90) führt auf ein elliptisches Integral.



Die erste Gleichung in (16.87) für den **Azimuthalwinkel** φ schreibt sich in der Variablen u als

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}. \quad (16.93)$$

Die zeitliche Änderung des Azimuthalwinkels nennt man **Präzession**. Für ihr qualitatives Verhalten kann man verschiedene Fälle unterscheiden. Falls der Zähler $a - bu$ in (16.93) im Intervall $[u_2, u_1]$ nicht verschwindet, hat der Azimuthalwinkel eine monotone Zeitabhängigkeit. Falls der Zähler im Intervall $[u_2, u_1]$ eine Nullstelle besitzt, entwickelt sich der Azimuthalwinkel nichtmonoton. Falls der Zähler schließlich am Rande des Intervalls $[u_2, u_1]$ verschwindet, wird der Azimuthalwinkel an diesem Punkte stationär. Die sich in diesen Fällen ergebenden Bewegungen der Kreiselachse sind in der folgenden Figur dargestellt.



Die Bewegung des dritten Eulerschen Winkels ψ , die aus der zweiten Gleichung in (16.87) oder mit der neuen Variablen u aus der Differentialgleichung

$$\dot{\psi} = \frac{L'_3}{\Theta'_{\parallel}} - \frac{a - bu}{1 - u^2} u \quad (16.94)$$

folgt, beschreibt die Rotation des Kreisels um seine Figurenachse.

IV. Mechanik deformierbarer Medien

17. Einführung

Mit dem starren Körper haben wir im vorigen Teil der Vorlesung den einfachsten Typ von Systemen vieler Massenpunkte behandelt. Wir haben damit gelernt, wie man die Bewegung fester Körper beschreiben kann. Sehr wichtig ist aber auch, die Bewegung nichtfester Materie mit sehr vielen Freiheitsgraden zu beherrschen. Man braucht also eine **Mechanik der Flüssigkeiten und Gase** (**Hydromechanik, Aeromechanik**). Die festen Körper sind jedoch auch nicht wirklich völlig starr und man braucht daher oft eine Beschreibung für die **Verformungen fester Körper** unter der Wirkung von Kräften (**Elastomechanik**).

Ähnlich wie bei den starren Körpern wird im allgemeinen die atomare Struktur der Materie für die Beschreibung ihrer makroskopischen Eigenschaften belanglos sein. Man wird also dazu neigen, makroskopische Systeme durch eine kontinuierliche Massenverteilung zu erfassen. Ein solches **Kontinuumsmodell** bringt gegenüber einem **atomistischen Modell** erhebliche Vereinfachungen mit sich. Wir werden in den nächsten drei Kapiteln die Grundbegriffe der **Kontinuumsmechanik** diskutieren.

Die Einfachheit des Kontinuumsmodells wird mit dem Nachteil bezahlt, daß seine Möglichkeiten in gewisser Weise begrenzt sind. Es gelingt mit diesem Modell, die makroskopisch beobachteten Erscheinungen wie etwa das Strömen von Flüssigkeiten oder die elastische Verformung von Festkörpern quantitativ zu beschreiben. Eine Begründung der beobachteten Phänomene ist aber nicht möglich. Eine solche Theorie nennt man **phänomenologisch**. Die Kontinuums-
theorie kann nicht erklären, warum ein bestimmtes System flüssig oder fest ist oder warum es genau die beobachteten elastischen Eigenschaften besitzt. All dies hängt mit der atomaren Struktur der Materie zusammen und kann im Rahmen einer atomaren (mikroskopischen) Theorie sehr wohl verstanden werden. Die atomare Physik wird im übrigen weitgehend von Quantenphänomenen dominiert, für deren Beschreibung die klassische Mechanik nicht ausreichen würde. Daher macht es nur bei wenigen Phänomenen Sinn, eine klassische Mechanik für atomistische Systeme aufzustellen.

18. Grundbegriffe der Kontinuumsmechanik

Bei einem System mit endlich vielen Massenpunkten werden die Massenpunkte mittels eines diskreten Index i durchnummeriert. Diese Numerierung muß in einem kontinuierlichen System durch eine kontinuierliche Indizierung ersetzt werden. Es bietet sich an, als Index den Ortsvektor \mathbf{r} zu wählen, an dem sich ein Massenpunkt des kontinuierlichen Systems in einem **Referenzzustand**, z.B. dem Anfangszustand zu einer bestimmten Zeit t_0 , befunden hat. Man bezeichnet dies als die **Lagrangesche Indizierung** kontinuierlicher Medien. Ein beliebiger anderer Zustand des Mediums kann dann durch den Verschiebungsvektor \mathbf{s} gekennzeichnet werden, um den der Massenpunkt \mathbf{r} gegenüber dem Referenzzustand verschoben ist. Ein beliebiger Zustand wird damit durch das **Verschiebungsfeld** $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ beschrieben, so daß

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{s}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) \quad (18.1)$$

die Position des Massenpunktes ist, der im Referenzzustand bei \mathbf{r} lag.

Das Verschiebungsfeld ist ein **Vektorfeld**, das jedem Punkt \mathbf{r} einen Vektor $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ zuordnet. Nach Wahl eines Koordinatensystems werden die Vektoren \mathbf{s} bzw. \mathbf{r} durch Komponenten s_μ bzw. x_ν dargestellt. Diese Komponenten transformieren sich beim Übergang zu einem anderen, verdrehten Koordinatensystem mit einer orthogonalen Matrix B in die neuen Komponenten

$$\tilde{x}_\mu = \sum_{\nu=1}^3 b_{\mu\nu} x_\nu \quad (18.2)$$

und das Vektorfeld transformiert sich nach (14.35) wie

$$\tilde{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{x}}) = B \mathbf{s}(B^t \tilde{\mathbf{x}}) \quad (18.3)$$

oder in Komponentenschreibweise wie

$$\tilde{s}_\mu(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \sum_{\lambda} b_{\mu\lambda} s_\lambda \left(\sum_{\alpha} b_{\alpha 1} \tilde{x}_\alpha, \sum_{\beta} b_{\beta 2} \tilde{x}_\beta, \sum_{\gamma} b_{\gamma 3} \tilde{x}_\gamma \right). \quad (18.4)$$

Wir werden reguläre Verschiebungsfelder betrachten, die in glatter Weise vom Referenzpunkt abhängen, und daher als nächstes die (3×3) -Matrix der Ableitungen

$$s_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{\partial s_\mu(\mathbf{x})}{\partial x_\nu} \quad (18.5)$$

auf ihr Transformationsverhalten untersuchen. Wir finden durch Differentiation von (18.4)

$$\tilde{s}_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial \tilde{x}_\nu} = \sum_{\lambda} b_{\mu\lambda} \sum_{\kappa} \frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\kappa} b_{\nu\kappa} = \sum_{\kappa\lambda} b_{\mu\lambda} b_{\nu\kappa} s_{\lambda\kappa}. \quad (18.6)$$

Daher transformieren sich die Ableitungen (18.5) wie ein Tensorfeld zweiter Stufe. Man nennt diesen Tensor den **Verschiebungstensor**.

Hinter dem Ergebnis (18.6) verbirgt sich die Tatsache, daß sich nach der Kettenregel das Tripel der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_\nu} = \sum_{\kappa} b_{\nu\kappa} \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \quad (18.7)$$

wie ein Vektor transformiert.

Da Tensoren geometrische Objekte sind, fragen wir nach der anschaulichen Bedeutung des Verschiebungstensors. Wir betrachten dazu die Verschiebungen der Massenpunkte, die einem Massenpunkt \mathbf{r}_0 benachbart sind. Seien also $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$ die Massenpunkte in einer kleinen Umgebung von \mathbf{r}_0 . Ist die Umgebung klein genug, so kann man die Verschiebungen des Massenpunktes \mathbf{r} nach $\delta\mathbf{r}$ entwickeln und erhält

$$\mathbf{s}_\mu(\mathbf{x}) = s_\mu(\mathbf{x}_0) + \sum_{\nu} s_{\mu\nu}(\mathbf{x}_0) \delta x_\nu + \dots \quad (18.8)$$

Die Verschiebung einer kleinen Umgebung von \mathbf{r}_0 besteht also aus einer Translation um $\mathbf{s}(\mathbf{r}_0)$ und einem durch den Verschiebungstensor gegebenen Anteil. Wenn der Verschiebungstensor antisymmetrisch wäre, würde der zweite Term in (18.8) eine Drehung des Vektors $\delta\mathbf{r}$ bewirken (siehe z.B. (14.51,52)). Wir zerlegen daher den Verschiebungstensor in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil. Der symmetrische Anteil ist

$$\epsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(s_{\mu\nu} + s_{\nu\mu}) \quad (18.9)$$

und der antisymmetrische ist

$$\Phi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(s_{\mu\nu} - s_{\nu\mu}), \quad (18.10)$$

so daß

$$s_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu} \quad (18.11)$$

gilt. Hierbei ist wichtig, daß diese Zerlegung geometrisch ist, d.h. daß die beiden Anteile (18.9) und (18.10) ihre Symmetrien unter Koordinatentransformationen beibehalten.

Für einen antisymmetrischen Tensor hatten wir schon früher gezeigt, daß die Komponenten

$$\varphi_\kappa = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \epsilon_{\kappa\mu\nu} \Phi_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \epsilon_{\kappa\mu\nu} s_{\nu\mu} \quad (18.12)$$

einen Pseudovektor $\boldsymbol{\varphi}$ bilden (siehe (14.57)). Mit seiner Hilfe kann der antisymmetrische Anteil der Verschiebung in (18.8) als Kreuzprodukt $\boldsymbol{\varphi} \times \delta\mathbf{r}$ geschrieben werden, oder in Komponenten

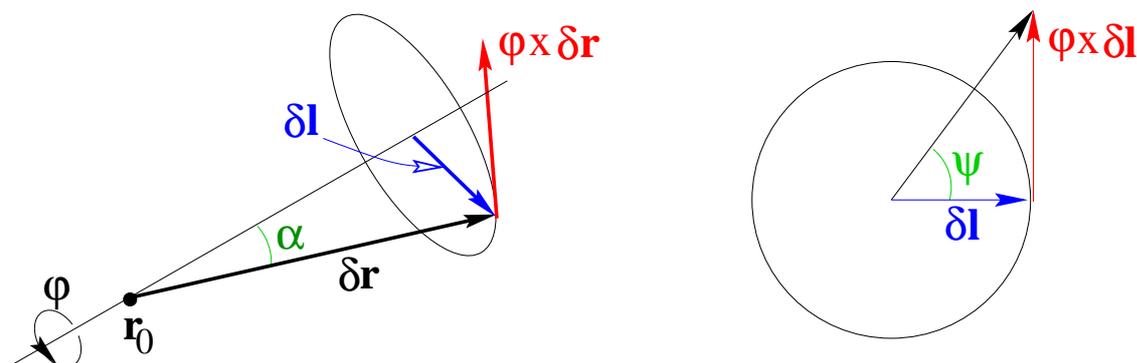
$$\sum_{\nu} \Phi_{\mu\nu} \delta x_\nu = \sum_{\kappa\lambda} \epsilon_{\kappa\lambda\mu} \varphi_\kappa \delta x_\lambda. \quad (18.13)$$

Die anschauliche Bedeutung dieses Beitrags zu (18.8) ist die folgende. Der zu $\delta \mathbf{r}$ gehörige Massenpunkt wird in der zu $\boldsymbol{\varphi}$ senkrechten Ebene um den Vektor $\boldsymbol{\varphi} \times \delta \mathbf{r}$ verschoben. Bei endlicher Länge von $\boldsymbol{\varphi}$ bedeutet dies eine Drehung des Vektors $\delta \mathbf{r}$ um den Winkel ψ , der durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \varphi \quad (18.14)$$

gegeben ist, sowie eine Streckung der zu $\boldsymbol{\varphi}$ senkrechten Komponente $\delta \mathbf{l}$ des Vektors $\delta \mathbf{r}$ um den Faktor

$$\frac{1}{\cos \psi} = \sqrt{1 + \varphi^2}. \quad (18.15)$$



Für kleine φ ($|\varphi| \ll 1$), die die einzig relevanten sein werden, wird allerdings $\psi = \varphi + O(\varphi^3)$, so daß der Beitrag (18.13) eine (infinitesimale) Rotation des Vektors $\delta \mathbf{r}$ um die $\boldsymbol{\varphi}$ -Achse erzeugt.

Es sei noch bemerkt, daß der Pseudovektor $\boldsymbol{\varphi}$ auch durch die suggestivere Formel

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{s}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{s}(\mathbf{r}) \quad (18.16)$$

definiert werden kann. Die Wirbelstärke eines Vektorfeldes ist immer ein Pseudovektorfeld.

Der symmetrische Anteil des Verschiebungstensors hat in einem geeigneten Koordinatensystem Diagonalgestalt und lautet dann

$$\epsilon_D = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (18.17)$$

Sein Beitrag zu (18.8) bedeutet daher eine Verzerrung der Umgebung des Punktes \mathbf{r}_0 um den Faktor $1 + \epsilon_\nu$ in Richtung der ν -ten Hauptachse des Tensors ϵ . Der Tensor $\epsilon_{\mu\nu}$ heißt deshalb **Deformations-** oder **Verzerrungstensor**. Die Eigenwerte des Verzerrungstensors in (18.17) nennt man auch die **Hauptdehnungskoeffizienten** oder **Hauptdilatationen**.

Zusammenfassend können wir nun sagen, daß die allgemeinste Verschiebung eines hinreichend kleinen Volumens sich aus drei Anteilen zusammensetzt:

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_{\text{rot}} + \mathbf{s}_{\text{def}}. \quad (18.18)$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{s}_0 eine Translation, \mathbf{s}_{rot} eine Rotation und \mathbf{s}_{def} eine Deformation.

Die Deformation ist natürlich hier die einzig neue Erscheinung im Vergleich zum starren Körper, der nur Translationen und Rotationen erfahren kann. Wir werden daher jetzt Verschiebungen näher betrachten, die reine Deformationen sind. Der Massenpunkt $\delta\mathbf{r}$ wird dabei in den Punkt $\delta\mathbf{r}' = \delta\mathbf{r} + \epsilon\delta\mathbf{r} = (1 + \epsilon)\delta\mathbf{r}$ überführt, so daß in Komponenten

$$\delta x'_\mu = \delta x_\mu + \sum_\nu \epsilon_{\mu\nu} \delta x_\nu = \sum_\nu (\delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}) \delta x_\nu \quad (18.19)$$

gilt. Im Hauptachsensystem des Verzerrungstensors wird also $\delta x'_\mu = (1 + \epsilon_\mu)\delta x_\mu$ und man hat eine Dehnung für $\epsilon_\mu > 0$ und eine Stauchung für $\epsilon_\mu < 0$. Oft wünscht man sich jedoch auch eine anschauliche Vorstellung von Verzerrungen in einem beliebigen Koordinatensystem. Wir wollen dies insbesondere für infinitesimale Verzerrungen $|\epsilon| \ll 1$ untersuchen. Seien also \mathbf{e}_ν die drei Einheitsvektoren in Richtung der Achsen des beliebigen Koordinatensystems. Sie haben die Komponenten $(\mathbf{e}_\nu)_\mu = \delta_{\mu\nu}$. Bei der Deformation (18.19) gehen diese Vektoren über in drei Vektoren mit den Komponenten $(\mathbf{e}'_\nu)_\mu = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}'_\nu = \sum_\lambda (\delta_{\mu\lambda} + \epsilon_{\mu\lambda}) \delta_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}$, d.h. es gilt

$$\mathbf{e}'_\nu = \mathbf{e}_\nu + \sum_\mu \mathbf{e}_\mu \epsilon_{\mu\nu}. \quad (18.20)$$

Daher ist das Skalarprodukt zweier verzerrter Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}'_\nu \cdot \mathbf{e}'_\lambda = \left(\mathbf{e}_\nu + \sum_\mu \mathbf{e}_\mu \epsilon_{\mu\nu} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_\lambda + \sum_\kappa \mathbf{e}_\kappa \epsilon_{\kappa\lambda} \right) = \delta_{\nu\lambda} + \epsilon_{\lambda\nu} + \epsilon_{\nu\lambda} + \sum_\mu \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\lambda}. \quad (18.21)$$

Für infinitesimale Verzerrungen schließen wir daraus, daß $|\mathbf{e}'_\nu|^2 = 1 + 2\epsilon_{\nu\nu} + O(\epsilon^2)$ oder

$$|\mathbf{e}'_\nu| - |\mathbf{e}_\nu| = \epsilon_{\nu\nu} + O(\epsilon^2). \quad (18.22)$$

Die Diagonalelemente des Verzerrungstensors geben also die relative Längenänderung in der zugehörigen Achsenrichtung an. Für verschiedene Einheitsvektoren $\nu \neq \lambda$ gilt andererseits $\mathbf{e}'_\nu \cdot \mathbf{e}'_\lambda = 2\epsilon_{\nu\lambda} + O(\epsilon^2)$, d.h. die beiden Vektoren \mathbf{e}'_ν und \mathbf{e}'_λ stehen im allgemeinen nicht mehr senkrecht aufeinander, sondern schließen einen Winkel $\pi/2 - \gamma_{\nu\lambda}$ miteinander ein. Mit $\mathbf{e}'_\nu \cdot \mathbf{e}'_\lambda = |\mathbf{e}'_\nu| \cdot |\mathbf{e}'_\lambda| \cdot \cos(\pi/2 - \gamma_{\nu\lambda}) = \sin \gamma_{\nu\lambda} (1 + O(\epsilon))$ folgt

$$\gamma_{\nu\lambda} = 2\epsilon_{\nu\lambda} + O(\epsilon^2). \quad (18.23)$$

Die Nichtdiagonalelemente des Verzerrungstensors geben also die Hälfte der Winkeländerung zwischen den zugehörigen Achsen an. Daher werden die Diagonalelemente **Dehnungen** und die Nichtdiagonalelemente **Scherungen** genannt.

Ähnlich wie den Trägheitstensor mit Gleichung (16.24) kann man auch den Verzerrungstensor anschaulich darstellen. Man kann dazu entweder durch die Gleichung

$$\mathbf{s}^t \epsilon \mathbf{s} = \pm 1 \quad (18.24)$$

eine **Dehnungsfläche** definieren, die je nach den Vorzeichen der Hauptdilatationen ein Ellipsoid oder ein Hyperboloid ist, oder (wenn die Hauptdilatationen klein sind, $|\epsilon_\nu| < 1$), durch die Gleichung

$$\mathbf{s}^t (I + \epsilon) \mathbf{s} = 1 \quad (18.25)$$

ein **Deformationsellipsoid**.

Wir betrachten nunmehr die **Volumenänderung**, die ein Parallelepiped, das von drei Vektoren \mathbf{a}_ν ($\nu = 1, 2, 3$) aufgespannt wird, durch eine Verzerrung ϵ erfährt. Wir fassen die Komponenten $a_{\kappa\nu}$ der Vektoren \mathbf{a}_ν zu einer (3×3) -Matrix A zusammen. Dann ist das Volumen des Parallelepipeds durch $V = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 = \sum_{\lambda\mu\nu} \epsilon_{\lambda\mu\nu} a_{\lambda 1} a_{\mu 2} a_{\nu 3} = \det A$ gegeben. Wenn jetzt die drei Vektoren \mathbf{a}'_ν aus den Vektoren \mathbf{a}_ν durch eine lineare Transformation L hervorgehen, $a'_{\mu\nu} = \sum_{\kappa} L_{\mu\kappa} a_{\kappa\nu}$, dann gilt in Matrixschreibweise die Beziehung $A' = LA$ und daher für das linear transformierte Volumen $V' = \det A' = \det L \cdot \det A = \det L \cdot V$. Angewandt auf die Verzerrung (18.19) bedeutet dies eine Änderung des Volumens nach der Gleichung

$$V' = V \cdot \det(I + \epsilon). \quad (18.26)$$

Für eine infinitesimale Verzerrung gilt $\det(I + \epsilon) = 1 + \sum_{\mu} \epsilon_{\mu\mu} + O(\epsilon^2)$ und die **relative Volumenänderung** Θ ist durch die Formel

$$\Theta = \frac{V' - V}{V} = \sum_{\mu} \epsilon_{\mu\mu} = \text{Sp } \epsilon \quad (18.27)$$

gegeben. Da die relative Volumenänderung für alle Parallelepipede gleich ist, gilt die koordinatenunabhängige Formel (18.27) für Volumina beliebiger Gestalt. Die Koordinatenunabhängigkeit der relativen Volumenänderung ist auch anhand der alternativen Formel

$$\Theta(\mathbf{r}) = \text{Sp } \epsilon = \text{div } \mathbf{s}(\mathbf{r}) \quad (18.28)$$

evident.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung von Bewegungen in kontinuierlichen Medien über, die wir durch zeitabhängige Verschiebungsfelder $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ beschreiben können. Offenbar hat

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (18.29)$$

die Bedeutung der Geschwindigkeit des Massenpunktes mit dem Index \mathbf{r} zur Zeit t . Wir betonen hier nochmals, daß der durch \mathbf{r} indizierte Massenpunkt zur Zeit t im allgemeinen nicht am Ort \mathbf{r} sein wird, sondern am Ort $\mathbf{r} + \mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$.

Es ist nun klar, daß wir mit dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ dieselben Manipulationen vornehmen können wie mit dem Verschiebungsfeld $\mathbf{s}(\mathbf{r})$. Insbesondere kann in Analogie zu (18.5) ein Geschwindigkeitstensor gebildet und in einen antisymmetrischen und einen symmetrischen Teil zerlegt werden. Das Geschwindigkeitsfeld in einer kleinen Umgebung eines Massenpunktes \mathbf{r}_0 kann dann in die drei Anteile

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{\text{rot}} + \mathbf{v}_{\text{def}} \quad (18.30)$$

zerlegt werden, wobei $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$ die **Translationsgeschwindigkeit**, $\mathbf{v}_{\text{rot}} = \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}$ die **Rotationsgeschwindigkeit** mit dem sogenannten **Wirbelvektor**

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_0) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \quad (18.31)$$

und $\mathbf{v}_{\text{def}} = \dot{\epsilon} \delta \mathbf{r}$ die **Deformationsgeschwindigkeit** ist, die durch die zeitliche Ableitung des Deformationstensors $\dot{\epsilon}$ gegeben ist. Speziell bezeichnet

$$\dot{\Theta} = \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \quad (18.32)$$

die **Dilatationsgeschwindigkeit**.

Die Beschleunigung eines Massenpunktes in einem kontinuierlichen Medium ist durch die Formel

$$\mathbf{a}_{\text{tot}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_L(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (18.33)$$

definiert. Hier haben wir durch den Index L an der Geschwindigkeit daran erinnert, daß wir hier die Lagrangesche Indizierung verwenden. Mit \mathbf{r} wird in dieser Indizierung nicht der Ort, sondern nur der Index eines Massenpunktes zur Zeit t bezeichnet. Daher ist $\mathbf{a}_{\text{tot}}(\mathbf{r}, t)$ die Beschleunigung, die der Massenpunkt \mathbf{r} zur Zeit t erfährt, während er sich an der durch (18.1) definierten Stelle $\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, t)$ befindet. Diese Beschleunigung heißt die **totale** oder **substanzielle Beschleunigung**.

Alternativ zur Lagrangeschen kann man auch die **Eulersche Indizierung** verwenden, bei der man die Massenpunkte durch die Orte \mathbf{r} kennzeichnet, an denen sie sich zur Zeit t befinden. Mit dem so indizierten Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}_E(\mathbf{r}, t)$ berechnet man dann die **lokale Beschleunigung** als

$$\mathbf{a}_{\text{lok}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_E(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (18.34)$$

die beiden Geschwindigkeitsfelder \mathbf{v}_L und \mathbf{v}_E sind über die Gleichung

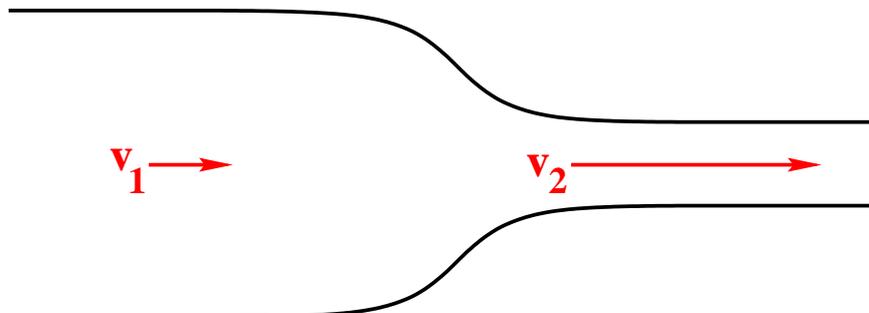
$$\mathbf{v}_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_E(\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, t), t) \quad (18.35)$$

miteinander verknüpft. Die totale und die lokale Beschleunigung können daher durch die Kettenregel miteinander in Beziehung gesetzt werden. Wenn wir mit \mathbf{v} in Zukunft immer das Eulersche Geschwindigkeitsfeld bezeichnen, gilt die Gleichung

$$\mathbf{a}_{\text{tot}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{a}_{\text{lok}} + \mathbf{a}_{\text{konv}}, \quad (18.36)$$

nach der die totale Beschleunigung sich additiv aus der lokalen und der **Konvektionsbeschleunigung** \mathbf{a}_{konv} zusammensetzt.

Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts betrachten wir in der folgenden Figur die stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit durch ein sich verengendes Rohr. Wegen der Stationarität der Strömung verschwindet die lokale Beschleunigung überall, während im Bereich der Verengung eine totale Beschleunigung vorhanden ist, die auf die Konvektionsbeschleunigung zurückzuführen ist.



Die obige Überlegung gilt gleichermaßen für jedes physikalische Feld $A(\mathbf{r}, t)$, das auf einem kontinuierlichen Medium mit einem (Eulerschen) Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ definiert ist. Analog zu (18.36) gilt dann

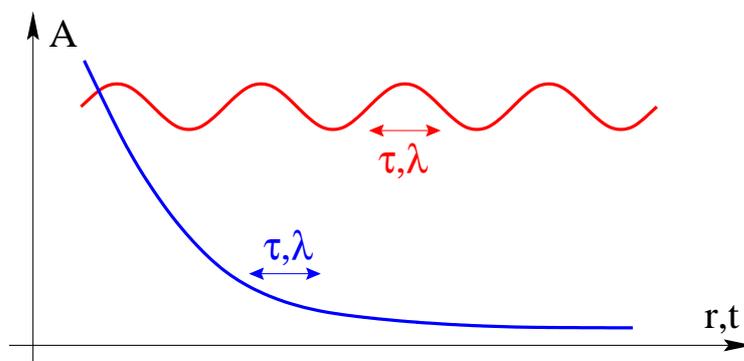
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) A. \quad (18.37)$$

Es gibt Situationen, in denen der Konvektionsterm $(\mathbf{v} \cdot \nabla) A$ gegenüber dem lokalen Term $\partial A(\mathbf{r}, t)/\partial t$ vernachlässigt werden kann. Dies hängt ab von dem Verhältnis typischer Längen- und Zeitskalen, auf denen sich das Feld A ändert, relativ zur Geschwindigkeit \mathbf{v} des Mediums. Anhand der beiden Beispiele in der folgenden Figur macht man sich klar, daß eine typische Längenskala λ und eine typische Zeitskala τ auch für nichtperiodische Funktionen durch Gleichungen

$$\lambda \approx \frac{\partial A}{\partial r} / \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}, \quad \tau \approx \frac{\partial A}{\partial t} / \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (18.38)$$

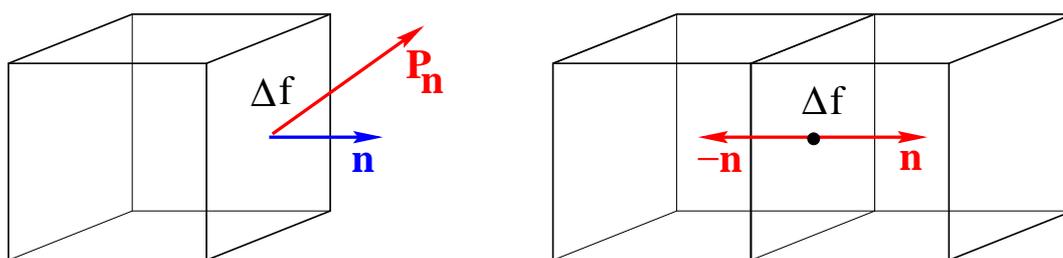
definiert werden können. Die Bedingung für die Irrelevanz des Konvektionsterms im Vergleich zum lokalen Term ist dann

$$v \ll \lambda/\tau. \quad (18.39)$$



Als Beispiel für die Gültigkeit der Ungleichung (18.39) stellen wir die Schallausbreitung in Materie vor und betrachten z.B. die Beschleunigungsgleichung (18.36). Hier ist die Längenskala λ durch die Wellenlänge und die Zeitskala τ durch die Frequenz des Schalls gegeben, so daß $\lambda/\tau = s$ die Schallgeschwindigkeit ist. Für das Geschwindigkeitsfeld $v = \text{Amplitude}/\tau$ ist dagegen die Schallamplitude relevant, die im allgemeinen sehr viel kleiner als die Wellenlänge ist. Daher ist die Ungleichung (18.39) in diesem Falle sehr gut erfüllt und die Konvektionsbeschleunigung kann gegenüber der lokalen Beschleunigung in sehr guter Näherung vernachlässigt werden.

Wir wollen jetzt die Kräfte diskutieren, die in kontinuierlichen Medien wirken. Man unterscheidet hierbei **Volumenkräfte** und **Flächenkräfte**. Ein kleines Massenelement $\Delta m = \rho \Delta V$ kann eine seinem Volumen proportionale Kraft $\mathbf{F} \Delta V$ erfahren, z.B. aufgrund der Schwerkraft, wobei hier \mathbf{F} eine **Kraftdichte** ist. Es gibt in kontinuierlichen Medien aber auch Kräfte, die nur auf die Begrenzungsfläche (Oberfläche) des Volumenelementes wirken. Solche Flächenkräfte (Spannungen, Drücke) rühren von den unmittelbar benachbarten Massenelementen des Mediums her. Sie sind proportional der Fläche Δf eines betrachteten Oberflächenelementes mit dem nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} und werden mittels des **Spannungsvektors** \mathbf{P}_n als $\mathbf{P}_n \cdot \Delta f$ geschrieben. Der Spannungsvektor kann dabei eine beliebige Richtung haben wie in der folgenden Figur links gezeigt.



Zwei benachbarte Massenelemente üben Flächenkräfte aufeinander aus, die dem Reaktionsprinzip genügen. Deshalb gilt für die Spannungsvektoren ein Reaktionsprinzip der Form

$$\mathbf{P}_{-\mathbf{n}} = -\mathbf{P}_n. \quad (18.40)$$

Die Bewegungsgleichung für ein kleines Massenelement mit der Oberfläche O lautet nunmehr

$$\mathbf{a} \cdot \rho \Delta V = \mathbf{F} \cdot \Delta V + \iint_O \mathbf{P}_n df, \quad (18.41)$$

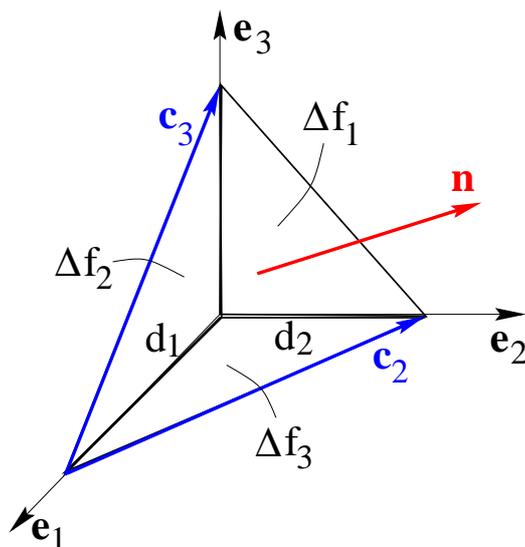
woraus im Grenzfall verschwindenden Volumens die Bewegungsgleichung

$$\rho \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} + \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_O \mathbf{P}_n df \quad (18.42)$$

wird. Aus der Forderung, daß der Grenzwert im Flächenkraftterm der Gleichung (18.42) existiert und unabhängig von der Gestalt des Volumenelementes ist, kann man ableiten, wie der Spannungsvektor \mathbf{P}_n von der Flächennormalen abhängt. Wir betrachten dazu ein kleines tetraederförmiges Volumenelement \mathcal{T} ,

das wie in der folgenden Figur gezeigt in ein Koordinatendreiein eingepaßt ist. Die von den beiden Vektoren \mathbf{c}_2 und \mathbf{c}_3 aufgespannte Basisfläche des Tetraeders hat den Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} und die Größe Δf . Für die folgende Analyse brauchen wir die Beziehung zwischen \mathbf{n} , Δf und den Größen Δf_ν der drei anderen Tetraederflächen. Wenn n_ν die ν -te Komponente des Normalenvektors \mathbf{n} in dem gezeigten Koordinatensystem ist, lautet diese Beziehung

$$\Delta f_\nu = \Delta f \cdot n_\nu. \quad (18.43)$$



Wir rechnen (18.43) für $\nu = 3$ mittels der in der Figur eingetragenen Bezeichnungen leicht nach: Es gilt zunächst $\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_3 = 2\Delta f \cdot \mathbf{n}$ und daraus folgt sofort $2\Delta f \cdot n_3 = (\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_3) \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{c}_2 \cdot (\mathbf{c}_3 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{c}_2 \cdot d_1 \cdot \mathbf{e}_2 = d_1 \cdot d_2 = 2\Delta f_3$.

Mit Hilfe von (18.43) und (18.40) können wir nun die gesamte auf das Tetraeder \mathcal{T} wirkende Flächenkraft folgendermaßen ausrechnen:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{T}} \mathbf{P}_{\mathbf{n}} df &= \Delta f \cdot (\mathbf{P}_{\mathbf{n}} + \mathbf{P}_{-\mathbf{e}_1} \cdot n_1 + \mathbf{P}_{-\mathbf{e}_2} \cdot n_2 + \mathbf{P}_{-\mathbf{e}_3} \cdot n_3) \\ &= \Delta f \cdot (\mathbf{P}_{\mathbf{n}} - \mathbf{P}_{\mathbf{e}_1} \cdot n_1 - \mathbf{P}_{\mathbf{e}_2} \cdot n_2 - \mathbf{P}_{\mathbf{e}_3} \cdot n_3). \end{aligned} \quad (18.44)$$

Damit der Grenzwert in (18.42) existiert, muß wegen $\Delta f/\Delta V \rightarrow \infty$ ($\Delta V \rightarrow 0$) der Ausdruck in Klammern in (18.44) verschwinden und wir erhalten die Bedingung

$$\mathbf{P}_{\mathbf{n}} = \mathbf{P}_{\mathbf{e}_1} \cdot n_1 + \mathbf{P}_{\mathbf{e}_2} \cdot n_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{e}_3} \cdot n_3 = \sum_{\nu} \mathbf{P}_{\mathbf{e}_\nu} \cdot n_\nu, \quad (18.45)$$

die den Spannungsvektor zu einem beliebigen Einheitsvektor auf die drei Spannungsvektoren eines orthonormalen Dreieins zurückführt. Wir bilden aus diesen drei Spannungsvektoren die (3×3) -Matrix

$$P_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{e}_\nu}. \quad (18.46)$$

Die μ -te Komponente des Spannungsvektors \mathbf{P}_n ist dann durch

$$P_{\mu\mathbf{n}} = \sum_{\nu} P_{\mu\nu} n_{\nu} \quad (18.47)$$

gegeben. Die Matrix $P_{\mu\nu}$ definiert also eine lineare Abbildung, die jedem Einheitsvektor \mathbf{n} einen Spannungsvektor \mathbf{P}_n zuordnet. Sie muß sich daher unter Koordinatentransformationen wie ein Tensor zweiter Stufe transformieren. Diesen Tensor bezeichnet man als den **Spannungstensor** \mathcal{P} . Diagonalelemente des Spannungstensors $P_{\mu\mu}$ nennt man **Druckspannungen**, wenn sie negativ sind, und **Zugspannungen**, wenn sie positiv sind. Nichtdiagonalelemente $P_{\mu\nu}$ für $\mu \neq \nu$ nennt man **Scherspannungen**.

Wir wollen nun den Impuls- und den Drehimpulssatz für ein Massenelement eines kontinuierlichen Mediums mit dem Volumen ΔV betrachten. Den **Impulssatz** hatten wir schon in Gleichung (18.42) vorbereitet. Zur Berechnung des Grenzwertes für die μ -te Komponente der dortigen Flächenkraft können wir nun den Gaußschen Integralsatz verwenden und erhalten

$$\oint_O P_{\mu\mathbf{n}} df = \oint \sum_{\nu} P_{\mu\nu} n_{\nu} df = \iiint_{\Delta V} dV \sum_{\nu} \frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}. \quad (18.48)$$

Mit dem erhaltenen Volumenintegral kann jetzt der Grenzwert gebildet werden und wir erhalten für die μ -te Komponente des Impulssatzes die Gleichung

$$\rho a_{\mu} = F_{\mu} + \sum_{\nu} \frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} \quad (18.49)$$

oder schließlich in Tensorschreibweise

$$\rho \mathbf{a}_{\text{tot}} = \mathbf{F} + \text{Div } \mathcal{P}. \quad (18.50)$$

Die Definition des hierbei benutzten Differentialoperators der **Vektordivergenz**, der auf einen Tensor höherer Stufe wirkt, ist aus der Gleichung (18.49) zu entnehmen.

Zur Aufstellung des **Drehimpulssatzes** für ein kleines Massenelement beginnen wir mit der Gleichung

$$\iiint_{\Delta V} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \rho dV = \iiint_{\Delta V} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dV + \oint_O (\mathbf{r} \times \mathbf{P}_n) df. \quad (18.51)$$

Auch diese Gleichung wollen wir wieder durch das Volumen ΔV dividieren und dann den Grenzwert $\Delta V \rightarrow 0$ bilden. Um mit der μ -ten Komponente des Oberflächenintegrals eine zu (18.48) analoge Umformung vornehmen zu können, brauchen wir die folgenden beiden Identitäten. Zunächst gilt die Identität

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{P}_n)_{\mu} = \sum_{\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{\nu} P_{\lambda\mathbf{n}} = \sum_{\nu\lambda\kappa} \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{\nu} P_{\lambda\kappa} n_{\kappa}. \quad (18.52)$$

Nach der Anwendung des Gaußschen Integralsatzes werden wir zudem die weitere Identität

$$\frac{\partial}{\partial x_\kappa}(x_\nu P_{\lambda\kappa}) = x_\nu \frac{\partial P_{\lambda\kappa}}{\partial x_\kappa} + \delta_{\kappa\nu} P_{\lambda\kappa} \quad (18.53)$$

brauchen. Wir erhalten jetzt unter Benutzung von (18.52,53)

$$\begin{aligned} \oint_O (\mathbf{r} \times \mathbf{P}_n)_\mu df &= \oint_O \sum_{\nu\lambda\kappa} \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu P_{\lambda\kappa} n_\kappa df \\ &= \iiint_{\Delta V} \sum_{\nu\lambda\kappa} \frac{\partial}{\partial x_\kappa} (\epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu P_{\lambda\kappa}) dV \\ &= \iiint_{\Delta V} \sum_{\nu\lambda\kappa} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \left(x_\nu \frac{\partial P_{\lambda\kappa}}{\partial x_\kappa} + \delta_{\kappa\nu} P_{\lambda\kappa} \right) dV \\ &= \iiint_{\Delta V} [(\mathbf{r} \times \text{Div } \mathcal{P})_\mu + \sum_{\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} P_{\lambda\nu}] dV. \end{aligned} \quad (18.54)$$

Wenn wir jetzt den vorgesehenen Grenzwert bilden, wird der Vektor \mathbf{r} auf den Ort des punktförmigen Massenelementes fixiert und wir erhalten die Gleichung

$$[\mathbf{r} \times (\rho \cdot \mathbf{a} - \mathbf{F} - \text{Div } \mathcal{P})]_\mu = \sum_{\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} P_{\lambda\nu}. \quad (18.55)$$

Wegen des Impulssatzes (18.50) verschwindet die linke Seite dieser Gleichung. Damit auch die rechte Seite verschwindet, muß der Spannungstensor die Bedingungen

$$P_{\lambda\nu} = P_{\nu\lambda} \quad (18.56)$$

erfüllen, er muß also immer ein symmetrischer Tensor sein. Wir halten fest:

Aus der simultanen Gültigkeit des Impulssatzes und des Drehimpulssatzes ergibt sich, daß der Spannungstensor immer symmetrisch sein muß. Wenn umgekehrt ein symmetrischer Spannungstensor vorausgesetzt wird, impliziert der Impulssatz den Drehimpulssatz.

Weil Spannungstensoren immer symmetrisch sind, können sie diagonalisiert werden und besitzen daher **Hauptspannungsachsen** und **Hauptspannungen**.

Wir fassen die obigen Ergebnisse noch einmal zusammen. Die Bewegungsgleichung der Kontinuumsmechanik ist der Impulssatz (18.50). Sie bestimmt die Beschleunigungen und damit auch die Verzerrungen, die aufgrund der Volumen- und Flächenkräfte entstehen. Die Flächenkräfte werden dabei durch den Spannungstensor beschrieben, der immer symmetrisch ist. Zur Ergänzung der Bewegungsgleichungen werden Beziehungen zwischen den Verzerrungen und den Spannungen, sogenannte **Spannungs-Dehnungs-Beziehungen**, benötigt, die von den Eigenschaften des betrachteten Mediums abhängen und die wir in den folgenden Kapiteln diskutieren werden.

19. Elastische Festkörper

In diesem Kapitel werden wir einige Grundbegriffe der Beschreibung elastischer Festkörper diskutieren. Man spricht bei kontinuierlichen Medien von elastischem Verhalten, wenn sie eine eindeutige lokale Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen besitzen. Viele Festkörper können sich auch plastisch verhalten, die meisten reagieren jedoch elastisch, solange die Verzerrungen nicht zu groß sind.

Das elastische Verhalten für kleine Verzerrungen wird nach dem **Hookeschen Gesetz** durch eine lineare Beziehung zwischen dem Verzerrungstensor und dem Spannungstensor beschrieben (**Robert Hooke, 1635-1703**). Die allgemeinste lineare Beziehung zwischen zwei Tensoren zweiter Stufe lautet

$$P_{\mu\nu} = \sum_{\kappa\lambda} c_{\mu\nu;\kappa\lambda} \epsilon_{\kappa\lambda}, \quad (19.1)$$

wobei die **Elastizitätsmoduln** c einen Tensor vierter Stufe bilden. Der allgemeinste Tensor vierter Stufe würde $3^4 = 81$ unabhängige Komponenten haben. Nun sind aber die hier verknüpften Tensoren zweiter Stufe beide symmetrisch. Deshalb müssen die Elastizitätsmoduln bezüglich einer Vertauschung der ersten beiden Indizes μ und ν ebenfalls symmetrisch sein. Außerdem würde ein antisymmetrischer Anteil von c bezüglich einer Vertauschung der letzten beiden Indizes κ und λ in der Summe in (19.1) keinen Beitrag leisten. Daher kann man annehmen, daß der Elastizitätsmodul bezüglich beider Indexpaare symmetrisch ist, d.h. in Formeln

$$c_{\mu\nu;\kappa\lambda} = c_{\nu\mu;\kappa\lambda} = c_{\mu\nu;\lambda\kappa}. \quad (19.2)$$

Da die beiden Indexpaare je sechs verschiedene Werte annehmen, bleiben damit $6 \times 6 = 36$ unabhängige Elastizitätsmoduln.

Eine weitere Reduktion dieser Zahl ergibt sich aus der Annahme der **Existenz eines elastischen Potentials**. Wir betrachten dazu die durch eine kleine Verzerrung $d\epsilon_{\mu\nu}$ an einem Volumenelement geleistete mechanische Arbeit. Wir werden zeigen, daß diese Arbeit pro Volumeneinheit durch

$$\delta\Phi = \sum_{\mu\nu} P_{\nu\mu} d\epsilon_{\mu\nu} \quad (19.3)$$

gegeben ist. Zur Herleitung dieser Formel betrachten wir einen kleinen Quader, der schon einer gewissen Verzerrung unterworfen ist, die den lokalen Spannungstensor \mathcal{P} erzeugt hat und damit den Quader vorverspannt hat (siehe die folgende Figur links). Wir wenden dann eine zusätzliche kleine Verschiebung $d\mathbf{s}(\mathbf{r})$ auf diesen Quader an, die eine weitere kleine Verzerrung $d\epsilon_{\mu\nu} = (\partial ds_\mu / \partial x_\nu + \partial ds_\nu / \partial x_\mu) / 2$ des Quaders bewirkt. Auf die rückseitige Quaderfläche senkrecht zu \mathbf{e}_1 mit der Größe $\Delta f_1 = \Delta_2 \cdot \Delta_3$ wirkt die Kraft $\mathbf{P}_{-\mathbf{e}_1}(\mathbf{r}) \Delta f_1$. Sie leistet aufgrund der Verschiebung $d\mathbf{s}(\mathbf{r})$ an dem Quader die Arbeit

$$\delta A_{-\mathbf{e}_1} = -\mathbf{P}_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{r}) \Delta f_1. \quad (19.4)$$

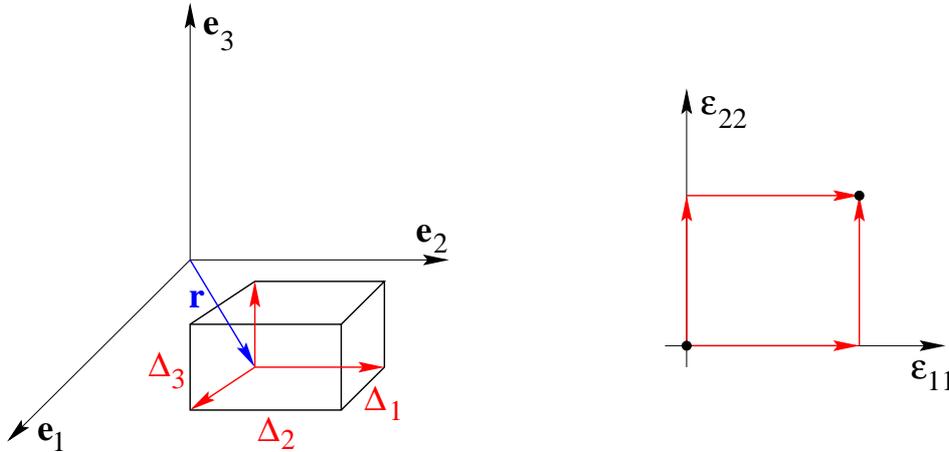
Die an der vorderseitigen Fläche senkrecht zu \mathbf{e}_1 geleistete Arbeit ist dagegen durch

$$\begin{aligned}\delta A_{\mathbf{e}_1} &= (\mathbf{P}_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{r} + \Delta_1 \mathbf{e}_1) \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{r} + \Delta_1 \mathbf{e}_1)) \Delta f_1 \\ &= (\mathbf{P}_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{r})) \Delta f_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathbf{P}_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{r})) \Delta f_1 \cdot \Delta_1\end{aligned}\quad (19.5)$$

gegeben, wobei wir zuletzt eine Taylorentwicklung nach der Kantenlänge Δ_1 durchgeführt haben. An den gesamten auf alle sechs Quaderflächen wirkenden Flächenkräften und eventuellen Volumenkräften wird schließlich die Arbeit

$$\begin{aligned}\delta A &= \sum_{\mu} \left[\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (P_{\mu\nu} ds_{\mu}) + F_{\mu} ds_{\mu} \right] \cdot \Delta V \\ &= \sum_{\mu} \left[\sum_{\nu} P_{\mu\nu} \frac{\partial ds_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \left(\sum_{\nu} \frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} + F_{\mu} \right) ds_{\mu} \right] \cdot \Delta V\end{aligned}\quad (19.6)$$

geleistet. Wenn die Verschiebung $d\mathbf{s}$ genügend langsam (quasistatisch) erfolgt, entstehen keine Beschleunigungen und keine kinetischen Energien und die gesamte geleistete Arbeit findet sich in elastischer Energie wieder. Da dann wegen $\text{Div} \mathcal{P} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (siehe (18.50)) der zweite Term in der zweiten Zeile von (19.6) verschwindet und da im ersten Term nur der symmetrische Anteil $\epsilon_{\mu\nu}$ des Verschiebungstensors $\partial ds_{\mu} / \partial x_{\nu}$ beiträgt, haben wir damit die Formel (19.3) für die elastische Arbeit pro Volumeneinheit bewiesen.



Wir werden jetzt die zusätzliche Annahme machen, daß $\delta\Phi$ ein totales Differential ist. Aus der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes (19.1) alleine kann man das nicht folgern. Es folgt aber, wenn man annimmt, daß der einer bestimmten Verzerrung entsprechende Zustand des Mediums nicht davon abhängt, auf welchem Wege man die Verzerrung erzeugt hat (siehe die obige Figur rechts für zwei Wege zu demselben Endzustand). Dieser eindeutige Zustand sollte dann eine eindeutig bestimmte elastische Energie $\Phi(\epsilon)$ haben. Das elastische Potential Φ ist dann wegen (19.1) und (19.3) eine quadratische Form in den Verzerrungen und es gelten die Beziehungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{\mu\mu}} = P_{\mu\mu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{\mu\nu}} = 2P_{\mu\nu} \quad (\mu \neq \nu), \quad (19.7)$$

wobei der Faktor 2 in der rechten Gleichung sich wegen $\epsilon_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\nu\mu}$ ergibt. Aus der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_{\mu\nu} \partial \epsilon_{\kappa\lambda}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_{\kappa\lambda} \partial \epsilon_{\mu\nu}} \quad (19.8)$$

folgt dann wegen (19.1) die zusätzliche Symmetrieeigenschaft

$$c_{\mu\nu;\kappa\lambda} = c_{\kappa\lambda;\mu\nu} \quad (19.9)$$

der Elastizitätsmoduln, mit der die (6×6) -Matrix nur noch 21 unabhängige Koeffizienten hat.

Um handliche Ausdrücke für die elastischen Potentiale zu erhalten und unterschiedliche Formeln für $\mu = \nu$ und $\mu \neq \nu$ wie in (19.7) zu vermeiden, ist eine veränderte Notation üblich, die in der folgenden Tabelle zusammengefaßt ist.

Indizes		Verzerrung	Spannung
neu	alt		
1	11	$\epsilon_1 = \epsilon_{11}$	$P_1 = P_{11}$
2	22	$\epsilon_2 = \epsilon_{22}$	$P_2 = P_{22}$
3	33	$\epsilon_3 = \epsilon_{33}$	$P_3 = P_{33}$
4	23, 32	$\epsilon_4 = \epsilon_{23} + \epsilon_{32}$	$P_4 = P_{23} = P_{32}$
5	31, 13	$\epsilon_5 = \epsilon_{31} + \epsilon_{13}$	$P_5 = P_{31} = P_{13}$
6	12, 21	$\epsilon_6 = \epsilon_{12} + \epsilon_{21}$	$P_6 = P_{12} = P_{21}$

Man numeriert die 6 Komponenten der beiden symmetrischen Tensoren ϵ und P wie in der Tabelle angegeben durch die Ziffern $i = 1, \dots, 6$ durch. Dann bilden die Elastizitätsmoduln die symmetrische (6×6) -Matrix

$$c_{ik} = c_{ki} \quad (19.10)$$

und das Hookesche Gesetz (19.1) erhält die Gestalt

$$P_i = \sum_{k=1}^6 c_{ik} \epsilon_k. \quad (19.11)$$

Das positiv definite elastische Potential ist dann durch

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^6 c_{ik} \epsilon_i \epsilon_k \quad (19.12)$$

gegeben und anstelle von (19.7) tritt die einfache Beziehung

$$P_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_i} \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (19.13)$$

Bei kristallinen Medien niedrigster Symmetrie (**trikline Kristalle**) ist das elastische Verhalten tatsächlich durch 21 unabhängige Moduln festgelegt, deren experimentelle Bestimmung einen sehr großen Aufwand erfordert. Viele Kristalle haben jedoch eine höhere Symmetrie, die unter anderem durch eine endliche Untergruppe der Drehgruppe $O(3)$ gekennzeichnet werden kann. Solche Untergruppen heißen **Punktgruppen**. Man kann zeigen, daß alle Tensoren, die makroskopische Materialeigenschaften eines Kristalls beschreiben, unter den in der Punktgruppe des Kristalls enthaltenen Drehungen invariant sind.

Wir wollen hier als erstes Beispiel explizit untersuchen, welche Konsequenzen die Existenz einer 2-zähligen Drehachse für den Elastizitätsmodul hat (**monokline Kristalle**). Dazu wählen wir die Drehachse z.B. als dritte Koordinatenachse. Sei also ein Kristall invariant unter einer Drehung \mathcal{B}_2 um die 3-Achse um den Winkel π . Dann muß das elastische Potential (19.12) unter dieser Drehung, die durch die Matrix

$$\mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19.14)$$

beschrieben wird, invariant sein. Da \mathcal{B}_2 die Vorzeichen der 1- und 2-Achse umkehrt, kehren sich unter \mathcal{B}_2 die Vorzeichen der Verzerrungen ϵ_4 und ϵ_5 um, während die anderen vier Verzerrungen unverändert bleiben. Das Potential Φ ist daher genau dann invariant, wenn die acht Elastizitätsmoduln $c_{ik} = c_{ki}$ für $i = 1, 2, 3, 6$ und $k = 4, 5$ verschwinden:

$$c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{64} = c_{65} = 0. \quad (19.15)$$

Monokline Kristalle haben daher nur noch 13 unabhängige Elastizitätsmoduln.

Als zweites Beispiel betrachten wir einen Kristall mit einer 4-zähligen Drehachse. Wir wählen wieder die Drehachse als 3-Achse, so daß die 1-Achse durch die $\pi/2$ -Drehung in die 2-Achse überführt wird und die 2-Achse in die negative 1-Achse. Die Drehmatrix hat dann die Gestalt

$$\mathcal{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19.16)$$

und bewirkt die folgende Transformation der Verzerrungen:

$$\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2 \rightarrow \epsilon_1, \quad \epsilon_3 \rightarrow \epsilon_3, \quad \epsilon_5 \rightarrow \epsilon_4 \rightarrow -\epsilon_5, \quad \epsilon_6 \rightarrow -\epsilon_6. \quad (19.17)$$

Das allgemeinste elastische Potential, das unter dieser Transformation invariant ist, lautet

$$\begin{aligned} \Phi_4 = & \frac{c_{11}}{2}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) + \frac{c_{33}}{2}\epsilon_3^2 + \frac{c_{44}}{2}(\epsilon_4^2 + \epsilon_5^2) + \frac{c_{66}}{2}\epsilon_6^2 \\ & + c_{12}\epsilon_1\epsilon_2 + c_{13}(\epsilon_1 + \epsilon_2)\epsilon_3 + c_{16}(\epsilon_1 - \epsilon_2)\epsilon_6 \end{aligned} \quad (19.18)$$

und hat nur noch 7 unabhängige Parameter.

Als weiteres Beispiel betrachten wir eine 3-zählige Drehachse. In diesem Fall legen wir das Koordinatensystem so, daß die Drehachse durch $x_1 = x_2 = x_3$ gegeben ist. Dann bewirkt eine Drehung um den Winkel $2\pi/3$ eine zyklische Vertauschung der Koordinaten ($x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$) und die Drehmatrix lautet

$$\mathcal{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19.19)$$

Die Verzerrungen werden durch die zyklische Vertauschung wie

$$\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2 \rightarrow \epsilon_3 \rightarrow \epsilon_1, \quad \epsilon_4 \rightarrow \epsilon_5 \rightarrow \epsilon_6 \rightarrow \epsilon_4 \quad (19.20)$$

transformiert. Das allgemeinste elastische Potential mit dieser Symmetrie hat ebenfalls nur noch 7 unabhängige Parameter und lautet

$$\begin{aligned} \Phi_3 = & \frac{c_{11}}{2}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) + \frac{c_{44}}{2}(\epsilon_4^2 + \epsilon_5^2 + \epsilon_6^2) + c_{12}(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3\epsilon_1) \\ & + c_{45}(\epsilon_4\epsilon_5 + \epsilon_5\epsilon_6 + \epsilon_6\epsilon_4) + c_{14}(\epsilon_1\epsilon_4 + \epsilon_2\epsilon_5 + \epsilon_3\epsilon_6) \\ & + c_{15}(\epsilon_1\epsilon_5 + \epsilon_2\epsilon_6 + \epsilon_3\epsilon_4) + c_{16}(\epsilon_1\epsilon_6 + \epsilon_2\epsilon_4 + \epsilon_3\epsilon_5). \end{aligned} \quad (19.21)$$

Viele Kristalle haben die höchstmögliche Symmetrie, die **kubische Symmetrie**. Sie ist vorhanden, wenn eine Invarianz sowohl unter der Drehung (19.19) als auch unter der Drehung (19.14) vorliegt (diese beiden Drehungen erzeugen die sogenannte **Tetraedergruppe**). Von den 7 in (19.21) verbliebenen Parametern müssen laut (19.15) 4 aufgrund der Invarianz unter \mathcal{B}_2 verschwinden, nämlich

$$c_{45} = c_{56} = 0, \quad c_{14} = 0, \quad c_{15} = 0, \quad c_{16} = c_{24} = 0 \quad (19.22)$$

und damit lautet das allgemeinste kubisch invariante elastische Potential

$$\Phi_{\text{kubisch}} = \frac{c_{11}}{2}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) + \frac{c_{44}}{2}(\epsilon_4^2 + \epsilon_5^2 + \epsilon_6^2) + c_{12}(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3\epsilon_1). \quad (19.23)$$

Bei kubischer Symmetrie kann auch eine Invarianz unter der **Oktaedergruppe** vorliegen, die durch die beiden Drehungen (19.14) und (19.15) aufgespannt wird und die eine Erweiterung der Tetraedergruppe ist. Diese höhere Symmetrie führt aber zu keinen weiteren Einschränkungen hinsichtlich des elastischen Potentials, so daß (19.23) für alle kubischen Kristalle gilt.

Die elastisch einfachsten Festkörper sind die **isotropen Festkörper**. Solche Festkörper, die unter beliebigen Drehungen invariant sind, werden durch amorphe oder polykristalline Systeme realisiert. Um ihr elastisches Verhalten zu verstehen, legen wir zunächst das Koordinatendreibein auf das Hauptachsendreibein des Verzerrungstensors, so daß

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (19.24)$$

gilt. Da der isotrope Festkörper selbst keine Richtung auszeichnet, muß in diesem Koordinatensystem auch der Spannungstensor diagonal sein und die Gestalt

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix} \quad (19.25)$$

haben. Das Hookesche Gesetz muß sich jetzt mit nur zwei Parametern formulieren lassen:

$$\begin{aligned} P_1 &= a\epsilon_1 + b(\epsilon_2 + \epsilon_3) = (a - b)\epsilon_1 + b(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \\ P_2 &= a\epsilon_2 + b(\epsilon_3 + \epsilon_1) = (a - b)\epsilon_2 + b(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \\ P_3 &= a\epsilon_3 + b(\epsilon_1 + \epsilon_2) = (a - b)\epsilon_3 + b(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3), \end{aligned} \quad (19.26)$$

weil für eine Spannung P_i in Richtung i die beiden anderen Richtungen äquivalent sind. Unter Einführung der beiden **Laméschen Elastizitätsmoduln** $\lambda = b$ und $\mu = (a - b)/2$ schreiben wir nun (19.26) kompakter als

$$P_i = 2\mu\epsilon_i + \lambda\text{Sp}\epsilon \quad (i = 1, 2, 3). \quad (19.27)$$

Die Verallgemeinerung der Beziehung (19.27) auf beliebige Koordinatensysteme können wir nun wegen der Invarianz der relativen Volumenänderung $\Theta = \text{Sp}\epsilon$ unter Drehungen leicht angeben. In der alten Tensornotation lautet sie

$$P_{\kappa\nu} = 2\mu\epsilon_{\kappa\nu} + \lambda\Theta\delta_{\kappa\nu}. \quad (19.28)$$

In der neuen Notation impliziert die Tensorrelation (19.28) zum einen die drei Gleichungen (19.27) und zusätzlich die drei weiteren Gleichungen

$$P_i = \mu\epsilon_i \quad (i = 4, 5, 6). \quad (19.29)$$

Das zugehörige elastische Potential können wir jetzt mittels (19.13) durch Integration zu

$$\Phi_{\text{isotrop}} = \frac{\mu}{2}(2\epsilon_1^2 + 2\epsilon_2^2 + 2\epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 + \epsilon_5^2 + \epsilon_6^2) + \frac{\lambda}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2 \quad (19.30)$$

bestimmen.

Das isotrope elastische Potential (19.30) muß ein Spezialfall des kubischen Potentials (19.23) sein. Durch Vergleich der beiden Potentiale erhalten wir die Relationen

$$c_{12} = \lambda, \quad c_{44} = \mu, \quad c_{11} = 2\mu + \lambda. \quad (19.31)$$

Das isotrope elastische Potential geht also aus dem kubischen durch die zusätzliche Bedingung

$$c_{11} = c_{12} + 2c_{44} \quad (19.32)$$

hervor.

Die möglichen Werte der Laméschen Moduln μ und λ sind durch eine **Stabilitätsbedingung** eingeschränkt, nach der das elastische Potential (19.30) positiv definit sein muß. Diese Bedingung muß erfüllt sein, weil andernfalls das Medium sich spontan verzerren würde, um seine Energie abzusenken. Als Eigenwerte der (6×6) -Matrix, aus der die quadratische Form (19.30) gebildet ist, findet man μ (fünffach) und $\mu + 3\lambda/2$. Aus deren Positivität folgen die Ungleichungen

$$\mu > 0, \quad \lambda > -\frac{2\mu}{3}. \quad (19.33)$$

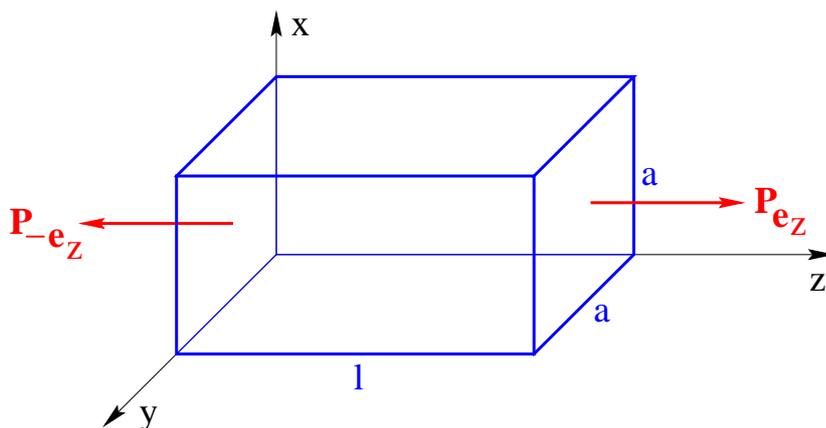
Wir wollen jetzt die Bewegungsgleichung (18.50) auf den Fall eines isotropen Festkörpers spezifizieren. Dazu drücken wir die Divergenz des Spannungstensors unter Benutzung der Relationen (18.9) und (19.28) durch den Verschiebungsvektor \mathbf{s} aus und erhalten

$$\begin{aligned} (\text{Div} \mathcal{P})_\kappa &= \sum_\nu \frac{\partial P_{\kappa\nu}}{\partial x_\nu} = \mu \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial s_\kappa}{\partial x_\nu} + \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\kappa} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \sum_\nu \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} \\ &= \mu \sum_\nu \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} s_\kappa + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \sum_\nu \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu}. \end{aligned} \quad (19.34)$$

Die Bedingung (18.39) für die Vernachlässigbarkeit der Konvektionsbeschleunigung ist für elastische Festkörper im allgemeinen erfüllt. Damit erhalten die **Hauptgleichungen der Elastizitätstheorie** die Gestalt

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \mathbf{F} + \mu \Delta \mathbf{s} + (\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{s}. \quad (19.35)$$

Die Volumenkräfte \mathbf{F} sind bei vielen Problemen der Elastizitätstheorie ebenfalls vernachlässigbar.



Um die physikalische Bedeutung der beiden Laméschen Moduln zu erhellen, betrachten wir das Anwendungsbeispiel eines Quaders aus einem isotropen elastischen Material, der einem einseitigen (uniaxialen) Zug (oder Druck) ausgesetzt ist. Wie in der obigen Figur gezeigt, soll auf eine der Oberflächen des Quaders

eine Zugspannung $\mathbf{P}_{\mathbf{e}_z}$ wirken, deren Betrag $P = Q/q$ durch das Verhältnis aus der Kraft Q und der Fläche $q = a^2$ bestimmt ist. Die gegenüberliegende Fläche des Quaders soll festgehalten werden. Diese Zwangsbedingung erzeugt auf dieser Fläche eine entgegengesetzte Zugspannung $P_{-\mathbf{e}_z} = -P_{\mathbf{e}_z}$. Wir wollen den stationären verzerrten Gleichgewichtszustand des Quaders berechnen. In diesem Zustand muß $\text{Div } \mathcal{P} = \mathbf{0}$ gelten. Weil Zugspannungen nur in z -Richtung auftreten sollten, muß der Spannungstensor räumlich homogen sein und seine einzige nicht verschwindende Komponente ist $P_{33} = Q/q$. Unsere Aufgabe besteht nun darin, mittels (19.28) die dieser Spannung entsprechende Verzerrung zu finden.

Durch Spurbildung gewinnen wir zunächst aus (19.28) die Beziehung

$$\sum_{\alpha} P_{\alpha\alpha} = (2\mu + 3\lambda)\Theta \quad (19.36)$$

zwischen der Spur des Spannungstensors und der relativen Volumenänderung Θ und können damit (19.28) nach dem Verzerrungstensor auflösen mit dem Ergebnis

$$\epsilon_{\kappa\nu} = \frac{1}{2\mu} P_{\kappa\nu} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \delta_{\kappa\nu} \sum_{\alpha} P_{\alpha\alpha}. \quad (19.37)$$

In Richtung der Zugspannung erwarten wir eine Dehnung des Quaders, die durch die Verzerrung $\epsilon_{33} = \partial s_z / \partial z = \Delta l / l$ gegeben ist. Nach (19.37) hat diese Verzerrung die Größe

$$\epsilon_{33} = \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} P_{33}. \quad (19.38)$$

Für den durch die Gleichung

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{Q}{q} \quad (19.39)$$

definierten **Youngschen Modul** E erhalten wir demnach

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}. \quad (19.40)$$

Offenbar ist aber ϵ_{33} nicht die einzige von Null verschiedene Komponente des Verzerrungstensors. Aus (19.37) lesen wir auch Kontraktionen

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} P_{33} \quad (19.41)$$

des Quaders senkrecht zur Richtung der uniaxialen Zugspannung ab. Zur Charakterisierung dieses Effektes definiert man den **Querkontraktionskoeffizienten**

$$\sigma = -\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}} = -\frac{\Delta a}{a} : \frac{\Delta l}{l} \quad (19.42)$$

(auch **Poissonsche Zahl** genannt), der hier den Wert

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \quad (19.43)$$

hat. Durch Umkehrung der Beziehungen (19.40) und (19.43) können die beiden Laméschen Moduln

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad \lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \quad (19.44)$$

aus dem obigen uniaxialen Zugspannungsexperiment bestimmt werden. Für die relative Volumenänderung (19.36) erhalten wir den Ausdruck

$$\Theta_{\text{uni}} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \frac{Q}{q} = \frac{1 - 2\sigma}{E} \frac{Q}{q}. \quad (19.45)$$

Besonders einfach ist die Reaktion eines isotropen Festkörpers auf eine gleichmäßige Kompression. In diesem Falle ist der Spannungstensor isotrop und wird durch die Formel

$$P_{\kappa\nu} = -p \delta_{\kappa\nu} \quad (19.46)$$

beschrieben, wobei p der äußere Druck auf den Festkörper beliebiger Gestalt ist. Da man einen gleichmäßigen Druck am besten durch Einbettung des Festkörpers in eine Flüssigkeit realisiert, nennt man den gleichmäßigen Druck auch **hydrostatischen Druck**. Da der Verzerrungstensor in diesem Falle ebenfalls isotrop ist, wird die Verzerrung durch die relative Volumenänderung vollständig charakterisiert und man erhält anhand von (19.36) die Beziehung

$$\Theta_{\text{hydro}} = -\frac{3}{2\mu + 3\lambda} p = -\kappa p. \quad (19.47)$$

Den Parameter κ nennt man die **Kompressibilität** des Festkörpers.

Die aus dem Stabilitätskriterium gewonnenen Ungleichungen (19.33) haben entsprechende Ungleichungen für die oben diskutierten elastischen Konstanten zur Folge. Man findet die Ungleichungen

$$E > 0, \quad -1 < \sigma < \frac{1}{2}, \quad \kappa > 0. \quad (19.48)$$

Für viele Materialien gilt die stärkere Ungleichung $\lambda > 0$, die nur positive Poissonzahlen $\sigma > 0$ zuläßt, die aber nicht aus generellen Prinzipien folgt.

Als eine Anwendung der Bewegungsgleichung (19.35) behandeln wir abschließend die Ausbreitung von Schallwellen in einem isotropen Medium. Man sucht dazu wellenartige Lösungen der Bewegungsgleichung. Für eine ebene Welle, die in Richtung der 3-Achse mit der Geschwindigkeit c läuft, machen wir den vektoriellen Ansatz

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(x_3 - c \cdot t). \quad (19.49)$$

Für die ν -te Komponente dieses Ansatzes ergibt die Bewegungsgleichung (19.35) die Bedingung

$$[\rho c^2 - \mu - (\mu + \lambda) \delta_{\nu 3}] f''_{\nu} = 0, \quad (19.50)$$

aus der wir die Schallgeschwindigkeit ablesen können. Die Schallgeschwindigkeit hängt von der **Polarisation** der Schallwelle ab. Wenn die Auslenkungsvektoren \mathbf{s} parallel zur Ausbreitungsrichtung des Schalles sind, spricht man von **longitudinalen Schallwellen**, wenn sie senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen, von **transversalen Schallwellen**. Die entsprechenden Schallgeschwindigkeiten sind nach (19.50) durch

$$c_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (19.51)$$

gegeben. Die Stabilitätsbedingung (19.33) hat zur Folge, daß generell die Ungleichung $c_l > c_t$ gilt.

20. Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

In diesem Kapitel werden wir kurz auf die elementarsten Grundbegriffe der Mechanik der Flüssigkeiten und Gase eingehen. Wie man im Rahmen der Thermodynamik lernt gibt es keinen qualitativen Unterschied zwischen der flüssigen und der gasförmigen Phase einer Substanz. Beide Phasen zeichnen sich im Vergleich zu Festkörpern mechanisch dadurch aus, daß der Spannungstensor im Gleichgewichtszustand (Ruhezustand) immer isotrop ist. Das impliziert richtungsunabhängige Druckspannungen und verschwindende Scherspannungen und einen Spannungstensor der Form

$$P_{\mu\nu} = -p \cdot \delta_{\mu\nu} \quad (\text{Ruhe}). \quad (20.1)$$

Es ist meist nicht sinnvoll, insbesondere für Gase nicht, den Druck p im Sinne von (19.28) und (19.47) mit der relativen Volumenänderung Θ in die Beziehung

$$p = -\lambda \cdot \Theta = -\frac{1}{\kappa} \cdot \Theta \quad (20.2)$$

zu setzen, weil die **Kompressibilität** κ für größere Volumenänderungen vom Volumen abhängt. Zur Erfassung solcher Effekte zieht man anstelle von (20.2) die thermodynamische Zustandgleichung

$$p = p(\rho, T) \quad \text{bzw.} \quad \rho = \rho(p, T) \propto \frac{1}{V(p, T)} \quad (20.3)$$

hinzu und definiert die Kompressibilität durch

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}. \quad (20.4)$$

Es gibt auch **anisotrope Flüssigkeiten** (auch **flüssige Kristalle** genannt), deren mechanisches Verhalten komplexer ist als das der **isotropen Flüssigkeiten**, auf die wir uns in diesem Kapitel beschränken werden.

In bewegten Flüssigkeiten und Gasen gibt es jedoch durchaus Scherspannungen, die mit den **Deformationsgeschwindigkeiten** (siehe (18.30) und (18.32)) anwachsen. Für nicht zu große Deformationsgeschwindigkeiten wird man in Analogie zum Hookeschen Gesetz (19.28) in isotropen Festkörpern und in Erweiterung von (20.1) die lineare Beziehung

$$P_{\mu\nu} = -p \cdot \delta_{\mu\nu} + 2\eta \dot{\epsilon}_{\mu\nu} + \eta' \dot{\Theta} \delta_{\mu\nu} \quad (20.5)$$

annehmen. Hier entsprechen die **dynamische Zähigkeit** (oder **Viskosität**) η und der zweite Parameter η' den Laméschen Moduln μ und λ . Aufgrund der Reibungsterme in (20.5) ist die mechanische Energie des Systems nicht länger erhalten. Der Verlust an mechanischer Energie, die sich in Form von Wärme wiederfindet, wird auch **Dissipation** genannt.

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichung (18.50) brauchen wir die zu (19.34) analoge Gleichung (beachte dazu $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v}$)

$$\text{Div } \mathcal{P} = -\text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \eta') \text{grad div } \mathbf{v}. \quad (20.6)$$

Die (18.50) entsprechende Bewegungsgleichung stellt man für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ in Eulerscher Parameterisierung auf. Wenn man zur Beschreibung der Volumenkräfte anstelle der in Kapitel 18 verwendeten Kraftdichte \mathbf{F} (Kraft pro Volumeneinheit) noch die Notation $\rho \mathbf{F}$ verwendet, in der \mathbf{F} die Kraft pro Masseneinheit ist, erhält man die aus dem 19. Jahrhundert (Navier 1822, Stokes 1845) stammende **Navier–Stokessche Bewegungsgleichung**

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \rho \mathbf{F} - \text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \eta') \text{grad div } \mathbf{v} \quad (20.7)$$

(**Claude Navier (1785-1836)** und **Georges Stokes (1819-1903)**).

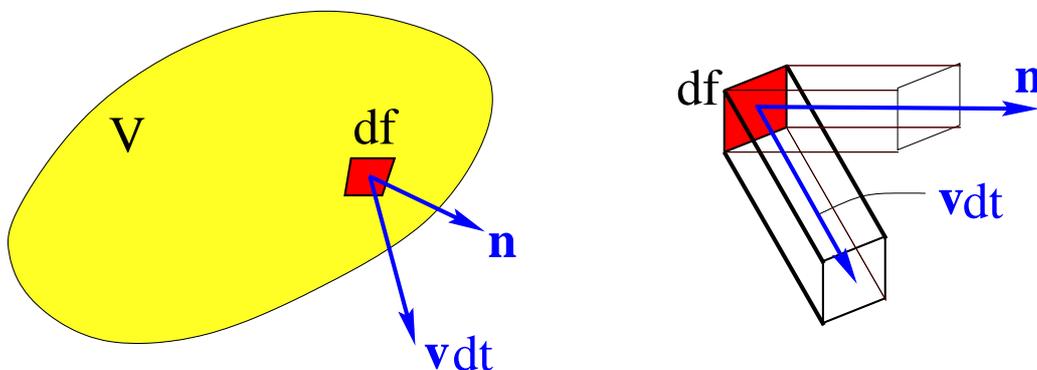
Im allgemeinen haben wir bei dem hier betrachteten Problem drei ortsabhängige Felder zu berechnen, das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sowie die Massendichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und den Druck $p(\mathbf{r}, t)$. Mit der **Zustandsgleichung** (20.3) und der **Bewegungsgleichung** (20.7) haben wir zunächst zwei Gleichungen für diese Felder. Die dritte noch fehlende Gleichung drückt die Erhaltung der Masse aus. Die Masse

$$M_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r}, \quad (20.8)$$

die in einem beliebig gewählten Teilvolumen V enthalten ist, kann sich nämlich nur dadurch ändern, daß Masse durch die Oberfläche von V strömt. Durch ein kleines Flächenelement Δf auf der Oberfläche von V mit der Außennormalen \mathbf{n} strömt im Zeitintervall dt die Masse $\rho \cdot \Delta f \mathbf{v} dt \cdot \mathbf{n}$, die zur Erniedrigung der in V enthaltenen Masse beiträgt. Der gesamte Massenfluß durch die Oberfläche O von V während des Zeitintervalls dt ist deshalb gleich der Reduktion $-dM_V$ der Masse (20.8) in diesem Zeitintervall und die **Massenerhaltung** wird durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt} M_V + \iint_O \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df = 0 \quad (20.9)$$

ausgedrückt.



Wenn wir das Flußintegral mittels des Gaußschen Integralsatzes in ein Volumenintegral umwandeln, erhalten wir mit (20.8) aus (20.9) die Bedingung

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] d^3 \mathbf{r} = 0. \quad (20.10)$$

Da diese Bedingung für beliebige Volumina V gilt, muß der Integrand verschwinden und wir erhalten die **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (20.11)$$

als Ausdruck der lokalen Massenerhaltung. Anhand der allgemeinen Beziehung (18.37) zwischen lokalen und totalen (oder **substantiellen**) Zeitableitungen und der Identität $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$ kann die Kontinuitätsgleichung auch in die Form

$$\frac{d}{dt} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (20.12)$$

gebracht werden.

Die Navier–Stokes–Gleichung (im Zusammenspiel mit der Kontinuitätsgleichung und einer Zustandsgleichung) gestattet die Behandlung der Dynamik einer Vielzahl von Phänomenen, die wir hier nicht weiter betrachten können. Wir wollen hier abschließend nur noch einige wichtige Spezialfälle der Flüssigkeitsdynamik aufzählen.

Bei Flüssigkeiten ändert sich im Gegensatz zu Gasen die Dichte oft so wenig mit dem Druck, daß man die Dichte als unveränderlich ansehen kann. In diesem Sinne nennt man eine Flüssigkeit **inkompressibel**, wenn sie die Bedingung

$$\frac{d}{dt} \rho = 0 \quad (20.13)$$

erfüllt. Wegen der Kontinuitätsgleichung (20.12) sind die Geschwindigkeitsfelder inkompressibler Flüssigkeiten immer quellenfrei, d.h. für sie gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (20.14)$$

Homogene Flüssigkeiten sind durch die Bedingung

$$\operatorname{grad} \rho = 0 \quad (20.15)$$

charakterisiert. Wenn eine Flüssigkeit homogen und inkompressibel ist, ziehen wir aus (20.11) die Folgerung $\partial \rho / \partial t = 0$, d.h. die Dichte ist räumlich und zeitlich konstant: $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0$.

Schon im Jahre 1755 hat Leonard Euler die Bewegungsgleichung für **ideale Flüssigkeiten**

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (20.16)$$

aufgestellt (**Eulersche Gleichungen der Hydrodynamik**), die sich aus der Navier–Stokes–Gleichung im Grenzfall verschwindender Zähigkeitskoeffizienten ergibt. Da bei normalen Flüssigkeiten (im Gegensatz zu Superflüssigkeiten) die Zähigkeit nicht verschwindet, stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen die Zähigkeitsterme in (20.7) vernachlässigt werden können. Wir bringen die Navier–Stokes–Gleichung zur Beantwortung dieser Frage in eine dimensionslose Form, indem wir mittels

$$\mathbf{v} = v_0 \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{r} = l_0 \cdot \mathbf{x}, \quad t = \frac{l_0}{v_0} \tau, \quad \rho = \rho_0 \cdot \sigma \quad (20.17)$$

typische Einheiten für die Geschwindigkeit v_0 , die Länge l_0 und die Dichte ρ_0 einführen und annehmen, die Zeit skalieren wie das Verhältnis aus Länge und Geschwindigkeit. In den skalierten Größen hat die Navier–Stokes–Gleichung die Gestalt (dividiere Gleichung (20.7) durch $\rho_0 v_0^2 / l_0$)

$$\sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \sigma \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u} = \dots + \frac{\eta}{\rho_0 l_0 v_0} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u} + \dots \quad (20.18)$$

Ein Vergleich der Terme auf der linken Seite dieser Gleichung mit dem ersten Zähigkeitsterm auf der rechten Seite zeigt, daß die Größe der **Reynoldsen Zahl**

$$R \doteq \frac{\rho_0 l_0 v_0}{\eta} \quad (20.19)$$

über die Relevanz der Zähigkeitsterme entscheidet. Eine ideale Flüssigkeit liegt im Grenzfall $R \rightarrow \infty$ vor.

Falls die eingeprägte Kraft pro Masseneinheit \mathbf{F} sich wie z.B. beim Schwerfeld aus einem Potential ableitet,

$$\mathbf{F} = - \text{grad } U(\mathbf{r}), \quad (20.20)$$

bietet sich die folgende Umformung der Eulerschen Gleichung (20.16) für ideale Flüssigkeiten an. Für den Konvektionsterm benutzt man die Identität

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}. \quad (20.21)$$

Mittels der aus der Zustandsgleichung $\rho = \rho(p)$ gewonnenen Stammfunktion

$$P(p) \doteq \int^p \frac{dp'}{\rho(p')} \quad (20.22)$$

läßt sich der Druckterm als

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } P \quad (20.23)$$

schreiben. Damit lautet die Eulersche Gleichung nunmehr

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + U + P \right) + \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}. \quad (20.24)$$

Da die Wirbelstärke jedes Gradientenfeldes verschwindet, folgt aus dieser Gleichung

$$\frac{\partial \text{rot} \mathbf{v}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}). \quad (20.25)$$

Falls das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} zu einem Zeitpunkt t_0 wirbelfrei ist, $\text{rot} \mathbf{v} \equiv 0$, verschwindet an diesem Zeitpunkt die Zeitableitung von $\text{rot} \mathbf{v}$ und das Feld ist zu allen Zeiten wirbelfrei. Da wirbelfreie Felder sich als Gradient eines Potentials darstellen lassen,

$$\mathbf{v} = \text{grad} \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (20.26)$$

spricht man in diesem Falle von **Potentialströmungen**. Die Theorie dieser Strömungen hat große Ähnlichkeit mit der **Elektrostatik**, weil elektrostatische Felder ebenfalls wirbelfrei sind.

Falls man (20.21) nicht benutzt, erhält man anstelle von (20.24) für die Eulersche Gleichung die Gestalt

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad}(U + P). \quad (20.27)$$

Für den **Wirbelvektor** (siehe auch (18.31))

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \doteq \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \quad (20.28)$$

des Geschwindigkeitsfeldes erhält man durch Anwendung der Operation rot auf (20.27) den Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (20.29)$$

Er drückt das Verschwinden der substantiellen Zeitableitung des Wirbelvektors aus, aus dem die **Helmholtzschen Wirbelsätze** folgen.

In nicht idealen Flüssigkeiten ändert sich der Wirbelvektor im Laufe der Zeit aufgrund der Wirkung der Zähigkeitsterme.

Als Anwendung wollen wir kurz auf die Schallausbreitung in idealen Flüssigkeiten oder Gasen eingehen. Unter Vernachlässigung des Konvektionsterms und der Volumenkräfte lautet die zu verwendende Bewegungsgleichung nach (20.16) hier

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} p = 0. \quad (20.30)$$

Sie ist zu ergänzen durch die Kontinuitätsgleichung (20.11) und durch die Zustandsgleichung (20.3). Wir nehmen kleine Abweichungen vom Gleichgewicht an, wobei die Geschwindigkeiten sowie die Abweichungen $\delta p \doteq p - p_0$ und $\delta \rho \doteq \rho - \rho_0$

als kleine Größen betrachtet werden, in denen alle Gleichungen linearisiert werden können. Aus der Zustandsgleichung (20.3) ergibt sich zwischen den Druck- und den Dichteabweichungen die Beziehung

$$\delta p = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \cdot \delta \rho \quad (20.31)$$

und die linearisierte Bewegungsgleichung und linearisierte Kontinuitätsgleichung lauten

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } \delta p = 0 \quad (20.32)$$

und

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (20.33)$$

Nach nochmaliger Ableitung von (20.33) nach der Zeit eliminiert man mittels (20.31) und (20.32) sowohl δp als auch \mathbf{v} und erhält die **Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \cdot \Delta \delta \rho = 0 \quad (20.34)$$

für die Dichteschwankung $\delta \rho$. Mit dem zu (19.47) analogen Ansatz $\delta \rho = g(x_3 - c \cdot t)$ für eine ebene Welle in Richtung der 3-Achse finden wir für die Schallgeschwindigkeit die Formel

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0}. \quad (20.35)$$

Das Geschwindigkeitsfeld einer Schallwelle kann nach Gleichung (20.26) als Potentialströmung angenommen werden, wodurch Gleichung (20.32) in die Gestalt

$$\text{grad} \left(\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \delta p \right) = 0 \quad (20.36)$$

überführt werden kann. Diese Gleichung sagt uns, daß die in Klammern stehende Größe nicht vom Ort \mathbf{r} abhängt, also eine reine Funktion der Zeit t ist. Diese Zeitfunktion kann man dann aber durch einen additiven Zusatz zum Geschwindigkeitspotential Φ kompensieren, der das aus Φ abgeleitete Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} nicht berührt. Nach dieser Umeichung des Geschwindigkeitspotentials gilt daher

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \delta p = 0, \quad (20.37)$$

während Gleichung (20.33) sich mit dem Potential jetzt als

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \Delta \Phi = 0 \quad (20.38)$$

schreiben läßt. Nach nochmaliger Zeitdifferentiation der Gleichung (20.37) kann man hier mittels (20.38) und (20.31) $\delta\rho$ und δp eliminieren und erhält für das Geschwindigkeitspotential ebenfalls die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \Phi = 0. \quad (20.39)$$

Mit dem Ansatz

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - c \cdot t) \quad (20.40)$$

für eine ebene Welle in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{n} erhält man aus (20.26) die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \cdot f', \quad (20.40)$$

aus (20.37) die Druckschwankung

$$\delta p = c \rho_0 \cdot f' \quad (20.41)$$

und aus (20.31) und (20.35) die Dichteschwankung

$$\delta \rho = \frac{\rho_0}{c} \cdot f'. \quad (20.42)$$

Wir erkennen anhand dieser Lösung, daß es sich um **longitudinale Schallwellen** handelt. Transversale Schallwellen sind im Gegensatz zu Festkörpern wegen der verschwindenden Scherspannungen nicht möglich.

Nach diesem sehr kurzen Abriß über einige Begriffe der Hydromechanik und der Berechnung der Schallgeschwindigkeit als einzigem Anwendungsbeispiel beenden wir dieses Kapitel.

V. Anhänge

A. Zentralpotentiale mit geschlossenen Bahnen

Dieser Anhang ist der Suche nach denjenigen Zentralpotentialen (4.10) gewidmet, für die **alle gebundenen Bewegungen** geschlossene Bahnen sind. Als zwei solche Zentralpotentiale haben wir in Kapitel 4 die beiden Potentiale (4.17) und (4.29) identifiziert. Wir werden im folgenden zeigen, daß dies die einzigen Zentralpotentiale mit dieser Eigenschaft sind.

Wir knüpfen an die Formel (4.34) an, aus der wir den Winkelabstand $\Delta\varphi$ zwischen benachbarten Perizentren und Apozentren (Punkten kürzesten und weitesten Abstandes zum Kraftzentrum) ablesen können. Wir erhalten dafür die Formel

$$\Delta\varphi = \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho/\rho^2}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}(E - V(\rho)) - \frac{1}{\rho^2}}}, \quad (\text{A.1})$$

wobei der Abstand ρ_+ des Apozentrums und der Abstand ρ_- des Perizentrums jeweils Nullstellen der Wurzel im Nenner sind. Wir benutzen hier aus Gründen der größeren physikalischen Anschaulichkeit den Abstand ρ und nicht den inversen Abstand u als Integrationsvariable. Wie schon am Ende von Kapitel 4 erwähnt, muß der Winkelabstand $\Delta\varphi$ kommensurabel mit der Zahl π sein, damit eine Bahn geschlossen ist. Alle Bahnen zu einem gegebenen Zentralpotential können daher nur dann geschlossen sein, wenn $\Delta\varphi$ ein festes rationales Vielfaches von π unabhängig von der Wahl der Parameter E und L ist.

Wir behandeln dieses hübsche Problem hier nicht etwa, weil es ein besonders wichtiges Problem der theoretischen Mechanik wäre, sondern weil seine Lösung schöne Beispiele für die Suche nach lösbaren **Grenzfällen** von nicht allgemein lösbaren Problemen liefert. Die geschickte Vereinfachung mathematisch schwieriger Probleme in Grenzfällen gehört zu den Fertigkeiten, die ein Physiker beherrschen sollte.

Wir beginnen mit der Betrachtung des Grenzfalls **nahezu kreisförmiger Bahnen**. Für solche Bahnen muß die Energie dicht oberhalb eines Minimums $V_0 \doteq V_{\text{eff}}(\rho_0)$ des effektiven Potentials

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2} \quad (\text{A.2})$$

liegen. Für $E \searrow V_0$ geht die Differenz

$$\Delta\rho \doteq \frac{\rho_+ - \rho_-}{2} \quad (\text{A.3})$$

zwischen den Abständen im Apo- und im Perizentrum gegen 0. Daher kann man das effektive Potential in (A.1) durch seine Taylorentwicklung

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V_0 + \frac{1}{2}V_{\text{eff}}''(\rho_0)(\rho - \rho_0)^2 \quad (\text{A.4})$$

approximieren. Man erhält dann unter geschickter Benutzung der Substitution $\rho = \rho_0 + \Delta\rho \cdot x$ das Ergebnis

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho/\rho^2}{\sqrt{\frac{m}{L^2} V_{\text{eff}}''(\rho_0) (\Delta\rho^2 - (\rho - \rho_0)^2)}} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{dx/\rho_0^2}{\sqrt{\frac{m}{L^2} V_{\text{eff}}''(\rho_0) (1 - x^2)}} = \frac{\pi L}{\rho_0^2 \sqrt{m V_{\text{eff}}''(\rho_0)}}.\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

Um dieses Ergebnis auf das Potential $V(\rho)$ umzurechnen, braucht man die Formeln

$$\begin{aligned}V'_{\text{eff}}(\rho_0) &= V'(\rho_0) - \frac{L^2}{m\rho_0^3} = 0, \\ V''_{\text{eff}}(\rho_0) &= V''(\rho_0) + \frac{3L^2}{m\rho_0^4}\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

und erhält

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3 + \frac{\rho_0 V''(\rho_0)}{V'(\rho_0)}}}.\quad (\text{A.7})$$

Hier konnte der Parameter L^2/m mittels der ersten Gleichung in (A.6) eliminiert werden, so daß $\Delta\varphi$ allein durch lokale Eigenschaften des Potentials am Minimum ρ_0 des effektiven Potentials ausgedrückt ist.

Wegen der Kommensurabilität von $\Delta\varphi$ mit π muß die Wurzel in (A.7) immer eine rationale Zahl sein und darf daher nicht vom Bahnradius ρ_0 abhängen. Diese Forderung verschafft uns die Differentialgleichung

$$\alpha \doteq 1 + \frac{\rho V''(\rho)}{V'(\rho)},\quad (\text{A.8})$$

deren Lösung

$$V(\rho) = \begin{cases} a\rho^\alpha & (\alpha \neq 0) \\ a \log \rho & (\alpha = 0) \end{cases}\quad (\text{A.9})$$

(unter Vernachlässigung einer physikalisch irrelevanten additiven konstanten Energie) die in Frage kommenden Potentiale schon sehr stark einschränkt. Wir halten fest, daß für die Potentiale (A.9) der Winkelabstand $\Delta\varphi$ nur vom Exponenten α abhängt und durch

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{2 + \alpha}}\quad (\text{A.10})$$

gegeben ist, so daß der Exponent aus dem Wertebereich $\alpha > -2$ kommen muß. Außerdem folgt aus der Forderung nach der Existenz des Minimums im effektiven Potential

$$V'_{\text{eff}}(\rho_0) = a\alpha\rho_0^{\alpha-1} - \frac{L^2}{m\rho_0^3} \doteq 0\quad (\text{A.11})$$

die Vorzeichenregel $a\alpha > 0$ für die Potentiale (A.9). Der Fall $\alpha = 0$ kann wegen des inkommensurablen Wertes $\Delta\varphi = \pi/\sqrt{2}$ ausgeschlossen werden. Im folgenden werden wir zwei weitere Grenzfälle der Formel (A.1) betrachten, die sich auf die beiden Fälle $\alpha > 0$ und $-2 < \alpha < 0$ beziehen.

Für $\alpha > 0$ steigt das Potential (A.9) mit $\rho \rightarrow \infty$ unbegrenzt an und deshalb sind alle Bahnen gebunden. Wir betrachten für diese Potentiale den **Grenzfall $E \rightarrow \infty$ bei festgehaltenem Drehimpuls L** . In dem betrachteten Grenzfall gilt $\rho_- \propto 1/\sqrt{E} \rightarrow 0$ und $\rho_+ \propto E^{1/\alpha} \rightarrow \infty$. Da der Hauptbetrag zu $\Delta\varphi$ in dieser Situation von der Umgebung des Perizentrums zu erwarten ist, spalten wir das Integral (A.1) am Minimum des ρ_0 effektiven Potentials in zwei Anteile auf und führen in diesen beiden Anteilen verschiedene Substitutionen $\rho = \rho_- \cdot s$ und $\rho = \rho_+ \cdot s$ durch. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \int_{\rho_-}^{\rho_0} \frac{d\rho/\rho^2}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}(V(\rho_-) - V(\rho)) + \frac{1}{\rho_-^2} - \frac{1}{\rho^2}}} \\ &+ \int_{\rho_0}^{\rho_+} \frac{d\rho/\rho^2}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}(V(\rho_+) - V(\rho)) + \frac{1}{\rho_+^2} - \frac{1}{\rho^2}}} \\ &= \int_1^{\rho_0/\rho_-} \frac{ds/s^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{s^2} + \frac{2ma}{L^2}\rho_-^{2+\alpha}(1-s^\alpha)}} \\ &+ \rho_+^{-1-\alpha/2} \int_{\rho_0/\rho_+}^1 \frac{ds/s^2}{\sqrt{\frac{2ma}{L^2}(1-s^\alpha) + \rho_+^{-2-\alpha}(1-\frac{1}{s^2})}}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Den zweiten Term kann man jetzt als $O(\rho_+^{-\alpha/2}) = O(1/\sqrt{E})$ abschätzen und der erste Term ergibt im Grenzfall $E \rightarrow 0$

$$\Delta\varphi = \int_1^\infty \frac{ds/s^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{\pi}{2}. \tag{A.13}$$

Durch Vergleich von (A.10) mit (A.13) bleibt als einziges Potential für $\alpha > 0$ das **harmonische Potential** mit $\alpha = 2$.

Für $-2 < \alpha < 0$ ist das Potential (A.9) nach unten unbeschränkt. Hier liegt es nahe, den **Grenzfall $L \rightarrow 0$ bei festgehaltener Energie E** zu betrachten, in dem das Minimum des effektiven Potentials beliebig nahe an das Kraftzentrum rückt und beliebig tief wird. Als Parameter für das Potential werden wir $k \doteq -a > 0$ und $0 < \beta \doteq -\alpha < 2$ benutzen. Wir werden die Integrationsvariable in diesem Grenzfall mit der Nullstelle ρ_0 des effektiven Potentials skalieren, deren Relation zum Drehimpuls aus der Gleichung

$$\rho_0^{2-\beta} = \frac{L^2}{2mk} \tag{A.14}$$

entnommen werden kann. Mit der Substitution $\rho = \rho_0 \cdot s$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \lim_{L \rightarrow 0} \int_{\rho_-/\rho_0}^{\rho_+/\rho_0} \frac{ds/s^2}{\sqrt{\frac{E}{k}\rho_0^\beta + \frac{1}{s^\beta} - \frac{1}{s^2}}} = \int_1^\infty \frac{ds/s^2}{\sqrt{\frac{1}{s^\beta} - \frac{1}{s^2}}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^\beta - x^2}} = \frac{2}{2-\beta} \arcsin(x^{\frac{2-\beta}{2}}) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2+\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Durch Vergleich von (A.10) mit (A.15) bleibt als einziges Potential für $-2 < \alpha < 0$ das **Keplerpotential** mit $\alpha = -1$.

Insgesamt sind damit das harmonische und das Keplerpotential als die einzigen Zentralpotentiale identifiziert, für die alle gebundenen Bahnen geschlossen sind.

B. Keplerbahnen kleiner Exzentrizität

In diesem Anhang werfen wir einen kurzen Blick auf Keplerbahnen kleiner Exzentrizität $\epsilon \ll 1$. Wir lesen aus Gleichung (4.23) die Relation

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = a(1 - \epsilon^2/2 + \dots) \quad (\text{B.1})$$

ab, die uns zeigt, daß das Verhältnis der beiden Halbachsen nur quadratisch in ϵ vom Wert 1 abweicht. Dies impliziert nur sehr geringe Abweichungen von der Kreisförmigkeit bei nicht zu großen Exzentrizitäten. Zur quantitativen Demonstration dieses Aspektes zeigen wir im folgenden eine Tabelle mit den Exzentrizitäten der Planeten des Sonnensystems und den zugehörigen Abweichungen $\epsilon^2/2$.

Planet	ϵ	$\epsilon^2/2$
Merkur	0,2056	0,021
Venus	0,0068	0,000023
Erde	0,0167	0,00014
Mars	0,0934	0,0044
Jupiter	0,0482	0,0012
Saturn	0,0553	0,00115
Uranus	0,0474	0,0011
Neptun	0,0104	0,000054
Pluto	0,2476	0,0307

Der Haupteffekt kleiner Exzentrizitäten ist also nicht eine elliptische Verformung der Bahn, sondern die Verschiebung des Brennpunktes aus dem Zentrum der Bahn.

C. Wirkungs- und Winkelvariable beim Keplerproblem

In diesem Anhang stellen wir als Anwendung der Behandlung integrierbarer Systeme nach Kapitel 13 die Bestimmung von Wirkungs- und Winkelvariablen für das Keplerproblem vor.

Ein Massenpunkt in einem zentralen Gravitationspotential wird durch die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \quad (\text{C.1})$$

beschrieben. Wir hatten schon in Kapitel 4 gezeigt, daß dieses Problem aufgrund der vielen Erhaltungsgrößen durch Integrationen gelöst werden kann. Erhalten ist neben der Energie H der Drehimpulsvektor \mathbf{L} . Um die Integrabilität des Systems im Sinne von Kapitel 13 zu zeigen, müssen wir aus diesen Erhaltungsgrößen mindestens drei Erhaltungsgrößen konstruieren, die paarweise in Involution zueinander sind, d.h. die die Gleichungen (13.85) erfüllen. Wegen der Erhaltung des Drehimpulses lesen wir aus (13.43) ab, daß

$$[\mathbf{L}, H] = 0 \quad (\text{C.2})$$

gilt und daher alle drei Komponenten des Drehimpulsvektors in Involution zur Hamiltonfunktion sind. Damit haben wir allerdings unser Problem noch nicht gelöst, weil die verschiedenen Komponenten L_i des Drehimpulses nicht zueinander in Involution stehen. Es gilt vielmehr

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k. \quad (\text{C.3})$$

Wegen der Derivationseigenschaft (13.38) der Poissonklammern ist jedoch auch jede Funktion der Drehimpulses \mathbf{L} in Involution zur Hamiltonfunktion. So gilt insbesondere auch

$$[H, \mathbf{L}^2] = \sum_{i=1}^3 ([H, L_i] L_i + L_i [H, L_i]) = 0. \quad (\text{C.4})$$

Man kann zeigen, daß jeder Skalar, d.h. jede unter allen Rotationen um den Koordinatenursprung invariante Phasenraumfunktion, mit dem Drehimpulsvektor in Involution steht. Hinsichtlich des Skalars \mathbf{L}^2 überzeugen wir uns hier mittels der Hilfsformeln

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p}, & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} &= \times \mathbf{p}, & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{p}} &= \mathbf{r} \times \\ \mathbf{L}^2 &= \mathbf{r}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2, & \frac{\partial \mathbf{L}^2}{\partial \mathbf{r}} &= 2\mathbf{p}^2 \mathbf{r} - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}, & \frac{\partial \mathbf{L}^2}{\partial \mathbf{p}} &= 2\mathbf{p}r^2 - 2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

von der Identität

$$[\mathbf{L}, \mathbf{L}^2] = (2\mathbf{r}^2 \mathbf{p} - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r}) \times \mathbf{p} - \mathbf{r} \times (2\mathbf{p}r^2 - 2\mathbf{p}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})) = 0. \quad (\text{C.6})$$

Angesichts der verschwindenden Poissonklammern (C.2), (C.4) und (C.6) kann man jetzt eine Komponente, etwa L_z , des Drehimpulsvektors auswählen und erhält die drei paarweise involutorischen Erhaltungsgrößen

$$F_1 = H, \quad F_2 = \mathbf{L}^2, \quad F_3 = L_z. \quad (\text{C.7})$$

Um die erzeugende Funktion (13.87) zu bilden, muß man zunächst das Gleichungssystem (C.7) nach den Impulsen auflösen. Dies stellt sich als einfacher heraus, wenn man anstelle der kartesischen Kugelkoordinaten verwendet. Aus der Lagrangefunktion für das Keplerproblem in Kugelkoordinaten

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{k}{r} \quad (\text{C.8})$$

lesen wir die generalisierten Impulse

$$p_r = m \dot{r}, \quad p_\vartheta = m r^2 \dot{\vartheta}, \quad p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta \quad (\text{C.9})$$

und die Hamiltonfunktion

$$F_1 = E = H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) - \frac{k}{r} \quad (\text{C.10})$$

ab. Die beiden anderen Erhaltungsgrößen in (C.7) haben in diesen Koordinaten die Darstellungen

$$F_2 = L^2 = \mathbf{L}^2 = p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \quad (\text{C.11})$$

und

$$F_3 = L_z = p_\varphi. \quad (\text{C.12})$$

Wir werden die Erhaltungsgrößen im folgenden zugunsten einer besseren physikalischen Transparenz mit E , L^2 und L_z bezeichnen, wobei L der Betrag des Drehimpulses ist. Die Auflösung der Gleichungen (C.10-12) nach den Impulsen ergibt jetzt

$$p_\varphi = L_z, \quad p_\vartheta = \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \vartheta}}, \quad p_r = \sqrt{2m \left(E + \frac{k}{r} \right) - \frac{L^2}{r^2}}. \quad (\text{C.13})$$

Die erzeugende Funktion (13.87) berechnet sich mit diesen Impulsen als die Summe

$$S_2(F_1, F_2, F_3; \varphi, \vartheta, r) = \int (p_\varphi d\varphi + p_\vartheta d\vartheta + p_r dr) \quad (\text{C.14})$$

von drei Stammfunktionen. Da die Variable φ schon zyklisch ist, ist die erste Stammfunktion natürlich trivial. Die anderen beiden Stammfunktionen sind aber

auch elementar und man erhält insgesamt

$$\begin{aligned}
S_2 = & L_z \varphi + \left(L \operatorname{arctg} \frac{L \cos \vartheta}{\sqrt{L^2 \sin^2 \vartheta - L_z^2}} \right. \\
& + \frac{L_z}{2} \operatorname{arctg} \frac{L_z^2 - L^2(1 + \cos \vartheta)}{L_z \sqrt{L^2 \sin^2 \vartheta - L_z^2}} - \frac{L_z}{2} \operatorname{arctg} \frac{L_z^2 - L^2(1 - \cos \vartheta)}{L_z \sqrt{L^2 \sin^2 \vartheta - L_z^2}} \left. \right) \\
& + \left(\sqrt{2mr(k + Er) - L^2} + L \operatorname{arctg} \frac{L^2 - kmr}{L \sqrt{2mr(k + Er) - L^2}} \right. \\
& \left. - k \sqrt{\frac{m}{-2E}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{m}{-2E}}(k + 2Er)}{\sqrt{2mr(k + Er) - L^2}} \right). \tag{C.15}
\end{aligned}$$

Hier haben wir berücksichtigt, daß die durch (C.7) definierten Phasenraumflächen nur für negative Energien kompakt sind. Bei der Berechnung der Wirkungsvariablen (13.98) beachten wir zunächst, daß die Koordinate φ ja schon zyklisch ist. Daher gilt

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = p_\varphi = L_z = F_3 \tag{C.16}$$

und die erste Wirkungsvariable ist identisch mit der Erhaltungsgröße L_z . Die beiden anderen Ringintegrale über geschlossene Kurven auf der Phasenraumfläche können ohne Benutzung der expliziten Stammfunktionen in (C.15) mittels funktionentheoretischer Methoden berechnet werden. Da wir die Stammfunktionen jedoch zur Hand haben, können wir diese Integrale aus (C.15) ablesen. Wir müssen dazu die Nullstellen der beiden anderen Impulse in (C.13) bestimmen. Die Nullstellen ϑ_\pm von p_ϑ ergeben sich aus

$$\cos \vartheta_\pm = \pm \sqrt{1 - \frac{L_z^2}{L^2}} \tag{C.17}$$

und die zugehörige Wirkungsvariable ist

$$I_\vartheta = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} p_\vartheta - \int_{\vartheta_+}^{\vartheta_-} p_\vartheta \right) = \frac{1}{\pi} \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} p_\vartheta = L - |L_z|. \tag{C.18}$$

Das einfache Ergebnis folgt aus der Beobachtung, daß die Argumente der arctg -Funktionen in (C.15) an den Integrationsgrenzen immer die Werte $\pm\infty$ haben und daß die Zähler in den arctg -Funktionen auf dem Integrationsweg immer das Vorzeichen wechseln. Dadurch erhalten die Integrale über jede der arctg -Funktionen die Werte $\pm\pi$.

Die Nullstellen von p_r bestimmen sich zu

$$r_\pm = \frac{1}{-2E} \left(k \pm \sqrt{k^2 + \frac{2EL^2}{m}} \right). \tag{C.19}$$

Hier garantieren die beiden Ungleichungen

$$r_- < \frac{L^2}{km} < r_+, \quad \text{und} \quad r_- < \frac{k}{-2E} < r_+, \quad (\text{C.20})$$

daß die beiden letzten arctg-Funktionen in (C.15) ebenfalls längs des Integrationsweges ihr Vorzeichen umkehren, und wir erhalten daher

$$I_r = \frac{1}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} p_r dr = -L + k \sqrt{\frac{m}{-2E}}. \quad (\text{C.21})$$

Wie in Kapitel 13 gezeigt wurde, ist die Hamiltonfunktion in den zu den Wirkungsvariablen gehörigen Koordinaten zyklisch. Daher muß sie eine Funktion alleine der Wirkungsvariablen sein. Tatsächlich erhalten wir durch Auflösen der Gleichungen (C.21), (C.18) und (C.16) nach der Energie die Beziehungen

$$L = I_\vartheta + |I_\varphi| \quad (\text{C.22})$$

und

$$H = -\frac{mk^2}{2(I_r + I_\vartheta + |I_\varphi|)^2}. \quad (\text{C.23})$$

Aufgrund der einfachen Abhängigkeit der Hamiltonfunktion von der Summe der Wirkungsvariablen stehen die drei Kreisfrequenzen (13.102) nunmehr in der einfachen Beziehung

$$\Omega_r = \Omega_\vartheta = \Omega_\varphi \cdot \text{sign } I_\varphi = \frac{mk^2}{(I_r + I_\vartheta + |I_\varphi|)^3}. \quad (\text{C.24})$$

Die Gleichheit der Kreisfrequenzen garantiert die bekannte Geschlossenheit aller gebundenen Bahnen beim Keplerproblem, weil nach (13.103) die Zeitentwicklung aller drei Winkelvariablen die gleiche Periode hat.

Die Winkelvariablen leiten sich jetzt nach (13.100) aus den partiellen Ableitungen der erzeugenden Funktion (C.15) nach den Wirkungsvariablen ab. Wir bilden zunächst die Ableitungen nach den Erhaltungsgrößen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_2}{\partial E} &= \frac{\sqrt{2mr(k+Er)} - L^2}{2E} - \sqrt{\frac{mk^2}{-8E^3}} \arctg \frac{(k+2Er)\sqrt{\frac{m}{-2E}}}{\sqrt{2mr(k+Er)} - L^2} \\ \frac{\partial S_2}{\partial L} &= \arctg \frac{L^2 - kmr}{L\sqrt{2mr(k+Er)} - L^2} + \arctg \frac{L \cos \vartheta}{\sqrt{L^2 \sin^2 \vartheta - L_z^2}} \\ \frac{\partial S_2}{\partial L_z} &= \varphi + \frac{1}{2} \arctg \frac{L_z^2 - L^2(1 + \cos \vartheta)}{L_z \sqrt{L^2 \sin^2 \vartheta - L_z^2}} - \frac{1}{2} \arctg \frac{L_z^2 - L^2(1 - \cos \vartheta)}{L_z \sqrt{L^2 \sin^2 \vartheta - L_z^2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Angesichts der Beziehungen (C.16), (C.22) und (C.23) berechnen sich daraus leicht mittels der Kettenregel die Ableitungen nach den Wirkungsvariablen. Man erhält so die drei Winkelvariablen

$$\begin{aligned}
\Theta_r &= \frac{\partial S_2}{\partial I_r} = \frac{\partial S_2}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial I_r} \\
&= -\frac{\sqrt{2mr(k+Er) - L^2}}{I_r + I_\vartheta + |I_\varphi|} - \operatorname{arctg} \frac{(1 + \frac{2Er}{k})(I_r + I_\vartheta + |I_\varphi|)}{\sqrt{2mr(k+Er) - L^2}} \\
\Theta_\vartheta &= \frac{\partial S_2}{\partial I_\vartheta} = \frac{\partial S_2}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial I_\vartheta} + \frac{\partial S_2}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial I_\vartheta} = \Theta_r + \frac{\partial S_2}{\partial L} \\
\Theta_\varphi &= \frac{\partial S_2}{\partial I_\varphi} = \frac{\partial S_2}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial I_\varphi} + \frac{\partial S_2}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial I_\varphi} + \frac{\partial S_2}{\partial L_z} \frac{\partial L_z}{\partial I_\varphi} \\
&= (\Theta_r + \frac{\partial S_2}{\partial L}) \cdot \operatorname{sign} I_\varphi + \frac{\partial S_2}{\partial L_z}.
\end{aligned} \tag{C.26}$$

Ähnlich wie Gleichung (4.26) lassen sich diese Gleichungen zwar nicht elementar nach den ursprünglichen Variablen r , ϑ und φ auflösen, aber man überzeugt sich anhand der obigen Gleichungen, daß man die folgende Parameterdarstellung der Bewegung ausschließlich mittels elementarer Funktionen erhält:

- (a) Man gibt r vor und berechnet aus der ersten Gleichung in (C.26) Θ_r .
- (b) Aus der Zeitentwicklung (13.103) bestimmt man sodann die Zeit t und die Werte Θ_ϑ und Θ_φ der beiden anderen Winkelvariablen zu dieser Zeit.
- (c) Da man die zweite Gleichung in (C.25) elementar nach ϑ auflösen kann, berechnet sich nunmehr ϑ elementar aus der zweiten Gleichung in (C.26).
- (d) φ bestimmt man dann leicht aus den dritten Gleichungen in (C.25) und (C.26).

D. Kleine Schwingungen

In diesem Anhang werden wir die Behandlung von Bewegungen eines Systems von Massenpunkten in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtskonfiguration vorstellen. Formal zusammengefaßt handelt es sich um das Problem, die Bewegung von Systemen mit f Freiheitsgraden zu berechnen, die durch eine Lagrangefunktion

$$L = T - V \tag{D.1}$$

mit

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^f a_{\mu\nu} \dot{q}_\mu \dot{q}_\nu \tag{D.2}$$

und

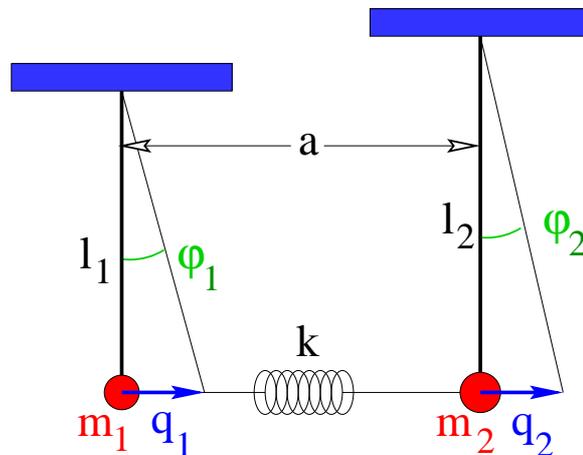
$$V = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^f b_{\mu\nu} q_\mu q_\nu \tag{D.3}$$

beschrieben werden. Hierbei soll die Massenmatrix $\mathcal{A} = (a_{\mu\nu})$ positiv definit und die Potentialmatrix $\mathcal{B} = (b_{\mu\nu})$ positiv semidefinit sein. Beide Matrizen kann man als symmetrisch annehmen. Diese Systeme sind unabhängig von der Zahl der Freiheitsgrade immer integrabel. Bevor wir die allgemeine Lösung beschreiben, werden wir im folgenden einige Beispiele vorstellen, die alle in das obige Schema passen.

1. Gekoppelte Pendel.

Wir betrachten zwei ebene Pendel mit Massen m_i , Längen l_i und kleinen Auslenkungen $q_i = l_i \varphi_i$ aus der Ruhelage, die durch eine Feder so miteinander verbunden sind, daß bei einer Änderung des Gleichgewichtsabstandes a eine rücktreibende Kraft vom Betrage $k|q_1 - q_2|$ entsteht, die sich aus einer potentiellen Energie $\frac{k}{2}(q_1 - q_2)^2$ ableitet. Die potentielle Energie eines der Pendel ist für kleine Auslenkungen durch $mgl(1 - \cos \varphi) = mgl(q/l)^2/2$ gegeben. Daher lautet die Lagrangefunktion der gekoppelten Pendel

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{q}_2^2 - \frac{m_1 g}{2l_1} q_1^2 - \frac{m_2 g}{2l_2} q_2^2 - \frac{k}{2} (q_1 - q_2)^2. \tag{D.4}$$



2. Doppelpendel.

Das Doppelpendel besteht aus zwei aneinander aufgehängten ebenen Pendeln, die wir mit den generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2 beschreiben. Die kartesischen Koordinaten der beiden Massenpunkte sind durch

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1, & x_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \\ y_1 &= l_1 \cos \varphi_1, & y_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

und ihre Geschwindigkeiten durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1, & \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \\ \dot{y}_1 &= -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1, & \dot{y}_2 &= -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

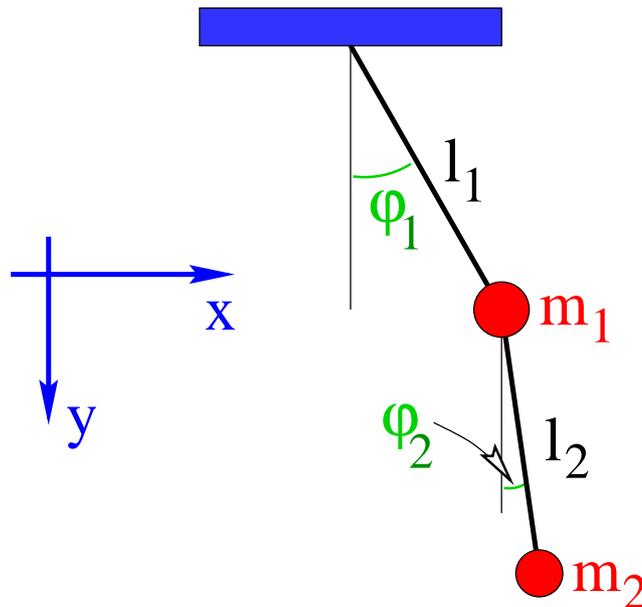
gegeben. Damit ergibt sich für die kinetische Energie der Ausdruck

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\rightarrow \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

und für die potentielle Energie der Ausdruck

$$\begin{aligned} V &= -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2 \\ &\rightarrow -[(m_1 + m_2) l_1 + m_2 l_2] g + \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \varphi_1^2 + \frac{m_2}{2} g l_2 \varphi_2^2. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

In beiden Formeln wurde zuletzt nach kleinen Auslenkungen entwickelt.



3. Molekülschwingungen.

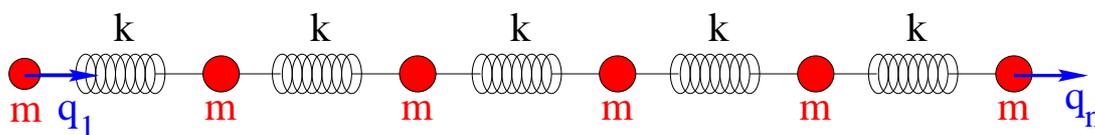
Die Kerne eines n -atomigen Moleküls befinden sich im Gleichgewicht in einer bestimmten Konfiguration \mathbf{r}_{i0} ($i = 1, \dots, n$), die durch die elektrostatische Abstoßung der Kerne untereinander und durch ihre anziehende Wechselwirkung mit den Elektronen bestimmt ist. Die räumliche Verteilung der Elektronen kann nur im Rahmen der Quantenmechanik verstanden werden. Eine Auslenkung der Kerne aus ihren stabilen Gleichgewichtspositionen kostet eine nicht negative potentielle Energie V . Da Auslenkungen der Kerne im allgemeinen zu Umlagerungen der Elektronen führen, kann diese potentielle Energie nicht durch eine Summe von Zweikörperpotentialen dargestellt werden. Wir beschreiben die Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage durch $3n$ (z.B. kartesische) Koordinaten q_μ ($\mu = 1, \dots, 3n$). Da die potentielle Energie V für verschwindende Auslenkungen minimal ist, hat ihre Taylorentwicklung um die Gleichgewichtskonfiguration die Form

$$V(q_1, \dots, q_{3n}) = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^{3n} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_\mu \partial q_\nu} \right|_0 q_\mu q_\nu + \dots \quad (\text{D.9})$$

Die Reduktion der potentiellen Energie auf die quadratischen Terme in den Auslenkungen heißt die **harmonische Näherung** für die Behandlung der Molekülschwingungen. Wir bemerken, daß in diesem Falle das Potential (D.3) wirklich nicht positiv definit, sondern nur semidefinit ist, weil jede starre Bewegung des Moleküls die potentielle Energie nicht verändert.

Es seien n Massenpunkte der gleichen Masse m mit $n - 1$ gleichen Federn mit der Federkonstanten k zu einer Kette verknüpft. Man betrachtet Auslenkungen q_ν in Richtungen der Kette. Dieses System kann als Modell für ein sehr langes gestrecktes Molekül aus identischen Atomen oder als Vorstufe der Modellierung eines Kristalls angesehen werden. Seine Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m}{2} \sum_{\mu=1}^n \dot{q}_\mu^2 - \frac{k}{2} \sum_{\mu=1}^{n-1} (q_{\mu+1} - q_\mu)^2. \quad (\text{D.10})$$



5. Kristallschwingungen.

Die Beschreibung von Schwingungen der Atomkerne in einem Kristall geschieht grundsätzlich analog zur obigen Beschreibung von Molekülschwingungen. Beim Kristall ist man allerdings am Fall einer sehr großen Zahl von Atomen (z.B. 10^{23}) interessiert. Zur Vereinfachung dient dabei die räumlich periodische Anordnung der Atome im Kristall. Ein Kristall ist aus lauter identischen Gitterzellen zusammengesetzt, die auseinander durch **Translationen** $\mathbf{t}_{n_1 n_2 n_3} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3$

hervorgehen, die mit ganzen Zahlen n_i ($i = 1, 2, 3$) aus drei **primitiven Translationen** \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$) linear kombiniert werden. In jeder Gitterzelle liegen r Atome, deren Kerne die Gleichgewichtspositionen $\mathbf{R}_{\nu, n_1, n_2, n_3}^0 = \mathbf{c}_\nu + \mathbf{t}_{n_1 n_2 n_3}$ ($\nu = 1, \dots, r$) haben. Wenn wir die Abweichungen von den Gleichgewichtspositionen durch Vektoren $\mathbf{r}_{\nu n_1 n_2 n_3}$ mit kartesischen Komponenten $\mathbf{x}_{\nu n_1 n_2 n_3}^\alpha$ beschreiben, ist die kinetische Energie des Kristalls

$$T = \sum_{\nu n_1 n_2 n_3 \alpha} \frac{m_\nu}{2} (\dot{\mathbf{x}}_{\nu n_1 n_2 n_3}^\alpha)^2 \quad (\text{D.11})$$

und die potentielle Energie in harmonischer Näherung

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\nu n_1 n_2 n_3 \alpha, \nu' n_1' n_2' n_3' \alpha'} V_{\nu n_1 n_2 n_3, \nu' n_1' n_2' n_3'}^{\alpha \alpha'} \mathbf{x}_{\nu n_1 n_2 n_3}^\alpha \mathbf{x}_{\nu' n_1' n_2' n_3'}^{\alpha'}. \quad (\text{D.12})$$

Die Handhabung der Vielfachsumme in der potentiellen Energie vereinfacht sich wegen der **Translationsinvarianz** des Kristalls, aufgrund derer die Kraftkonstanten $V_{\nu n_1 n_2 n_3, \nu' n_1' n_2' n_3'}^{\alpha \alpha'}$ in der potentiellen Energie nur von den Differenzen $n_i - n_i'$ ($i = 1, 2, 3$) abhängen.

Nach Vorstellung der 5 Beispiele werden wir jetzt zur Lösung des in (D.1-3) gestellten Problems schreiten. Zunächst werden wir neben den Matrizen \mathcal{A} und \mathcal{B} die Spalten- und Zeilenvektoren

$$\mathbf{q} \doteq \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^t \doteq (q_1 \dots q_f) \quad (\text{D.13})$$

für die generalisierten Koordinaten einführen, um die Notation kompakter zu gestalten. Mit dieser Notation schreibt sich die Lagrangefunktion (D.1) in der Form

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathcal{A} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathcal{B} \mathbf{q}. \quad (\text{D.14})$$

Die f Lagrangeschen Bewegungsgleichungen lassen sich in der Matrixnotation zu der kompakten Vektorgleichung

$$\mathcal{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{B} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (\text{D.15})$$

zusammenfassen, die ein System von f gekoppelten linearen Bewegungsgleichungen darstellt.

Wir werden im folgenden versuchen, dieses Gleichungssystem durch eine lineare Koordinatentransformation der Gestalt

$$\mathbf{q} = \mathcal{C} \mathbf{Q} \quad (\text{D.16})$$

mit einer konstanten ($f \times f$)-Matrix \mathcal{C} zu entkoppeln. Mit dem Spaltenvektor \mathbf{Q} der neuen Koordinaten schreibt sich die Lagrangefunktion (D.14) dann als

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^t \mathcal{C}^t \mathcal{A} \mathcal{C} \dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^t \mathcal{C}^t \mathcal{B} \mathcal{C} \mathbf{Q}. \quad (\text{D.17})$$

Wir wollen die Matrix \mathcal{C} so wählen, daß sowohl die Matrix $\mathcal{C}^t \mathcal{A} \mathcal{C}$ als auch die Matrix $\mathcal{C}^t \mathcal{B} \mathcal{C}$ Diagonalgestalt haben. Es sei angemerkt, daß die gesuchte Matrix \mathcal{C} im allgemeinen nicht orthogonal sein wird und deshalb nicht die Beziehung $\mathcal{C}^t = \mathcal{C}^{-1}$ gelten muß. Mit der letzteren Beziehung wäre die Transformation (D.16) eine Äquivalenztransformation, mit der man die beiden Matrizen \mathcal{A} und \mathcal{B} nur dann simultan diagonalisieren könnte, wenn sie vertauschen, d.h. wenn $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ gilt.

Wir beginnen die Bestimmung der Transformationsmatrix \mathcal{C} , indem wir aus der positiv definiten symmetrischen Matrix \mathcal{A} die Wurzel ziehen. Dazu diagonalisieren wir die symmetrische Matrix \mathcal{A} zunächst mithilfe einer orthogonalen Matrix O und erhalten die diagonale Massenmatrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_f \end{pmatrix} = O^t \mathcal{A} O \quad (\text{D.18})$$

mit lauter positiven Diagonalelementen m_μ . Aus dieser Diagonalmatrix können wir elementweise die positive Wurzel ziehen, die durch

$$\mathcal{M}^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{m_f} \end{pmatrix} \quad (\text{D.19})$$

definiert ist. Die positive Wurzel aus der Matrix \mathcal{A} ist dann durch

$$\mathcal{A}^{1/2} \doteq O \mathcal{M}^{1/2} O^t \quad (\text{D.20})$$

gegeben. Denn man rechnet leicht nach: $\mathcal{A}^{1/2} \mathcal{A}^{1/2} = O \mathcal{M}^{1/2} O^t O \mathcal{M}^{1/2} O^t = \mathcal{A}$.

In analoger Weise bildet man die inverse Matrix zur Wurzel durch

$$\mathcal{A}^{-1/2} \doteq O \mathcal{M}^{-1/2} O^t, \quad (\text{D.21})$$

die ebenfalls positiv definit und symmetrisch ist. Würden wir als Transformationsmatrix \mathcal{C} die Matrix $\mathcal{A}^{-1/2}$ wählen, dann würde die Matrix \mathcal{A} in der kinetischen Energie der Lagrangefunktion (D.17) wegen $\mathcal{C}^t \mathcal{A} \mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1/2} \mathcal{A} \mathcal{A}^{-1/2} = I$ in die Einheitsmatrix I transformiert. Gleichzeitig würde die Matrix \mathcal{B} in der potentiellen Energie in die Matrix

$$\hat{\mathcal{B}} \doteq \mathcal{A}^{-1/2} \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1/2} \quad (\text{D.22})$$

überführt. Eine anschließende Diagonalisierung der symmetrischen Matrix $\hat{\mathcal{B}}$ durch die orthogonale Matrix U mit

$$\mathcal{D} = U^t \hat{\mathcal{B}} U \quad (\text{D.23})$$

läßt die Einheitsmatrix I in der kinetischen Energie invariant. Insgesamt haben wir somit mittels der Transformationsmatrix

$$\mathcal{C} \doteq \mathcal{A}^{-1/2} U \quad (\text{D.24})$$

simultan die Diagonalisierungen

$$\mathcal{C}^t \mathcal{A} \mathcal{C} = U^t \mathcal{A}^{-1/2} \mathcal{A} \mathcal{A}^{-1/2} U = I \quad (\text{D.25})$$

und

$$\mathcal{C}^t \mathcal{B} \mathcal{C} = U^t \mathcal{A}^{-1/2} \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1/2} U = U^t \hat{\mathcal{B}} U = \mathcal{D} \quad (\text{D.26})$$

erreicht. In den neuen generalisierten Koordinaten \mathbf{Q} hat die Lagrangefunktion (D.17) also die Form

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^t \dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^t \mathcal{D} \mathbf{Q} \quad (\text{D.27})$$

und die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathbf{Q}} + \mathcal{D} \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (\text{D.28})$$

beschreiben f voneinander unabhängige harmonische Oszillatoren. Aus den f Eigenwerten d_ν der positiv semidefiniten Diagonalmatrix \mathcal{D} kann man f nicht negative Kreisfrequenzen $\omega_\nu \doteq \sqrt{d_\nu}$ bilden, mit denen die Bewegungsgleichungen (D.28) sich als

$$\ddot{Q}_\nu + \omega_\nu^2 Q_\nu = 0 \quad (\nu = 1, \dots, f) \quad (\text{D.29})$$

schreiben. Sie haben die allgemeine Lösung

$$Q_\nu(t) = \begin{cases} Q_\nu^0 \cos(\omega_\nu t + \alpha_\nu) & (\omega_\nu > 0) \\ \dot{Q}_\nu^0 \cdot t + Q_\nu^0 & (\omega_\nu = 0). \end{cases} \quad (\text{D.30})$$

Die generalisierten Koordinaten Q_ν heißen die **Normalkoordinaten** und die positiven Frequenzen ω_ν die **Normalfrequenzen** des Systems (D.14) von gekoppelten linearen Oszillatoren. Jede der periodischen Bewegungen in (D.30) nennt man eine **Normalschwingung** des Systems. Die ν -te Normalschwingung impliziert für $\omega_\nu > 0$ wegen (D.16) für die ursprünglichen Koordinaten eine Bewegung der Gestalt

$$\mathbf{q} = \mathbf{c}_\nu Q_\nu^0 \cos(\omega_\nu t + \alpha_\nu), \quad (\text{D.31})$$

wenn \mathbf{c}_ν die ν -te Spalte der Transformationsmatrix \mathcal{C} bezeichnet. Eine Normalschwingung zeichnet sich daher dadurch aus, daß alle Massenpunkte des Systems eine harmonische Schwingung **gleicher Frequenz** ω_ν und **gleicher Phase** $\alpha_\nu \pmod{\pi}$ ausführen.

Indem man die Normalschwingung (D.31) in die Bewegungsgleichung (D.15) einsetzt, erhält man das lineare Gleichungssystem

$$(-\omega_\nu^2 \mathcal{A} + \mathcal{B}) \mathbf{c}_\nu = \mathbf{0} \quad (\text{D.32})$$

das eine nichtriviale Lösung $\mathbf{c}_\nu \neq \mathbf{0}$ genau dann besitzt, wenn die Säkulargleichung

$$\det(-\omega_\nu^2 \mathcal{A} + \mathcal{B}) = 0 \quad (\text{D.33})$$

erfüllt ist. Wenn man nicht an der expliziten Bestimmung der Normalkoordinaten interessiert ist, kann man aus der Säkulargleichung direkt die Normalfrequenzen berechnen.

Abschließend werden wir kurz auf die zu Anfang skizzierten Beispiele zurückkommen.

1. Gekoppelte Pendel.

Die potentielle Energie in (D.4) ist positiv definit, so daß man 2 Normalschwingungen mit positiver Frequenz erwartet, die aus der Säkulargleichung

$$\det \begin{pmatrix} -m_1 \omega^2 + \frac{m_1 g}{l_1} + k & -k \\ -k & -m_2 \omega^2 + \frac{m_2 g}{l_2} + k \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{D.34})$$

folgen. Wir diskutieren nur kurz den Spezialfall identischer Pendel ($m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$), in dem die beiden Pendel bei verschwindender Kopplung $k = 0$ die gleiche Frequenz $\omega = \sqrt{g/l}$ haben. Die Normalfrequenzen der gekoppelten Pendel ergeben sich zu

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} > \omega_1. \quad (\text{D.35})$$

Die beiden zugehörigen Eigenvektoren, die das Gleichungssystem (D.32) erfüllen, sind $\mathbf{c}_1^t = (1, 1)$ und $\mathbf{c}_2^t = (1, -1)$ (Zeilenvektoren). Der Eigenvektor \mathbf{c}_1^t beschreibt die synchrone Bewegung der beiden identischen Pendel, bei der die Kopplung gar nicht in Erscheinung tritt und daher auch nicht die Eigenfrequenz modifiziert. Der Eigenvektor \mathbf{c}_2^t beschreibt dagegen ein Gegeneinanderschwingen der beiden Pendel, bei dem die Kopplung eine zusätzliche, frequenzerhöhende rücktreibende Kraft erzeugt.

2. Doppelpendel.

Bei diesem Beispiel erfolgt die Kopplung zwischen den beiden Pendeln nicht durch die potentielle, sondern durch die kinetische Energie und die Säkulargleichung lautet

$$\det \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)(l_1^2 \omega^2 - gl_1) & m_2 l_1 l_2 \omega^2 \\ m_2 l_1 l_2 \omega^2 & m_2 (l_2^2 \omega^2 - gl_2) \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{D.36})$$

Da in diesem Falle die potentielle Energie schon diagonal und positiv definit ist, kann man bei der oben beschriebenen Diagonalisierung die Rolle der Matrizen

\mathcal{A} und \mathcal{B} vertauschen, d.h. zunächst mittels $\mathcal{B}^{-1/2}$ die Matrix \mathcal{B} auf die Einheitsmatrix I transformieren und dann im zweiten Schritt die kinetische Energie diagonalisieren.

3. Molekülschwingungen.

Ein n -atomiges Molekül hat $f = 3n$ Freiheitsgrade für die Bewegung seiner Atomkerne. Wir wissen, daß darunter sechs Freiheitsgrade der starren Bewegung des Moleküls sind (fünf für lineare Moleküle), die sich in sechs (bzw. fünf) verschwindenden Eigenfrequenzen $\omega_\nu = 0$ der Säkulargleichung (D.33) wiederfinden müssen. Die restlichen

$$k = \begin{cases} 3n - 6 & \text{(nichtlineare Moleküle)} \\ 3n - 5 & \text{(lineare Moleküle)} \end{cases} \quad (\text{D.37})$$

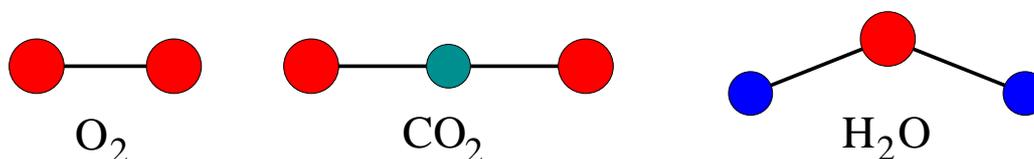
Eigenfrequenzen entsprechen Normalschwingungen (oder **inneren Schwingungen**) des Moleküls. Wir betrachten drei Beispiele. Zweiatomige Moleküle (z.B. O_2) sind immer linear und haben daher genau eine innere Schwingung, die im Massenmittelpunktsystem in einem Gegeneinanderschwingen der beiden Atome besteht. Wir wollen anhand dieses einfachen Beispiels darauf hinweisen, daß die Rotation und die inneren Schwingungen eines Moleküls nicht ganz unabhängig voneinander erfolgen. Wenn wir den Atomabstand des nichtrotierenden 2-atomigen Moleküls im Gleichgewicht mit a bezeichnen, die Normalkoordinate der inneren Schwingung, die die Änderung dieses Abstandes mißt, mit q und die reduzierte Masse (8.8) des Moleküls mit μ , dann ergibt sich das Trägheitsmoment des Moleküls bezüglich des Massenmittelpunktes als

$$\Theta'(q) = \mu(a + q)^2. \quad (\text{D.38})$$

Mit der Normalfrequenz ω_0 der inneren Schwingung des nichtrotierenden Moleküls lautet die Lagrangefunktion unter Benutzung von (16.62)

$$\mathcal{L} = \frac{\mathbf{L}^2}{2\Theta'(q)} + \frac{\mu}{2}\dot{q}^2 - \frac{\mu}{2}\omega_0^2 q^2. \quad (\text{D.39})$$

Da das Molekül nicht starr ist, geht in die kinetische Energie der Rotation die Normalkoordinate q der inneren Schwingung ein.



Das lineare 3-atomige Molekül CO_2 hat nach (D.37) vier innere Schwingungen. Die Natur dieser Normalschwingungen kann man wegen der hohen Symmetrie des Moleküls ohne Rechnung verstehen. Eine erste innere Schwingung erhält man, indem man die beiden Sauerstoffionen bei ruhendem Kohlenstoffion gegenphasig gegeneinander schwingen läßt. Bei der zweiten Normalschwingung schwingen die beiden Sauerstoffionen gleichphasig gegen das Kohlenstoffion. Die beiden

an. Zur Beschreibung laufender Wellen ist es vorteilhaft, komplexwertige Eigenvektoren anzusetzen. Wegen der Identität

$$\sum_{\mu=1}^n e^{2\pi i \mu(\nu-\nu')/n} = n \cdot \delta_{\nu\nu'} \quad (\text{D.43})$$

ist die so angesetzte Matrix \mathcal{C} unitär. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{BC})_{\mu\nu} &= \frac{k}{\sqrt{n}} (2e^{2\pi i \mu\nu/n} - e^{2\pi i(\mu-1)\nu/n} - e^{2\pi i(\mu+1)\nu/n}) \\ &= \frac{2k}{\sqrt{n}} e^{2\pi i \mu\nu/n} \left(1 - \cos \frac{2\pi\nu}{n}\right) = (\mathcal{CD})_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

mit der Diagonalmatrix

$$\mathcal{D} = 2k \left(1 - \cos \frac{2\pi\nu}{n}\right) \delta_{\mu\nu} = 4k \sin^2 \frac{\pi\nu}{n} \delta_{\mu\nu}. \quad (\text{D.45})$$

Die physikalischen Amplituden (D.31) der Normalschwingungen können aus den Real- oder Imaginärteilen der Matrixelemente (D.42) erhalten werden. Die Normalfrequenzen der zyklischen linearen Kette ergeben sich aus (D.45) unter Berücksichtigung des Massenfaktors in der kinetischen Energie zu

$$\omega_\nu = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\pi\nu}{n} \quad (\nu = 1, \dots, n). \quad (\text{D.46})$$

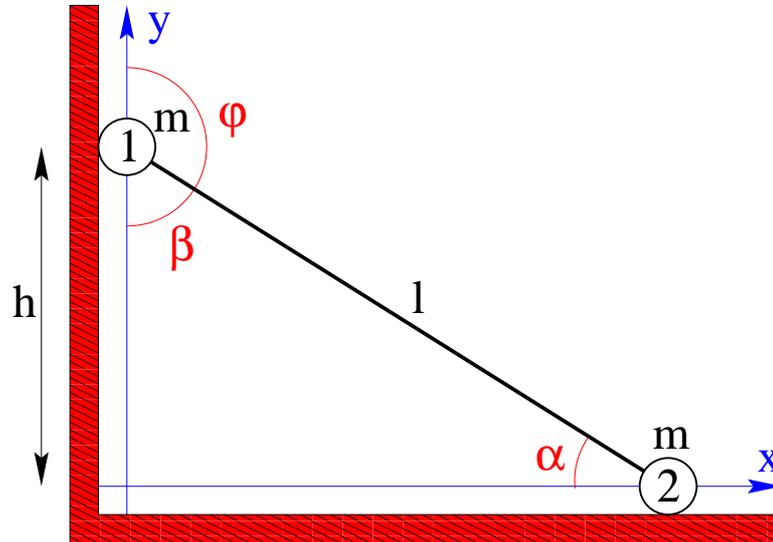
Für $\nu = n$ erhalten wir eine starre zyklische Bewegung mit verschwindender Frequenz. Die Lösung für die offene Kette ist nur wenig aufwändiger. Wir werden sie hier nicht näher beschreiben.

5. Kristallschwingungen.

Die Berechnung der Normalschwingungen in dreidimensionalen Kristallen ist ein wichtiges Problem der Festkörpertheorie, das in den entsprechenden Lehrbüchern behandelt wird (siehe auch mein Vorlesungsmanuskript: “Theoretische Festkörperphysik I”).

E. An Wand gelehnte Hantel

In diesem Anhang behandeln wir als Beispiel für eingeschränkte Bewegungen die in der folgenden Figur dargestellte an eine Wand gelehnte Hantel aus zwei gleichen Massen m und Hantellänge l .



In dem eingezeichneten Koordinatensystem lauten die Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned}
 f_1 &\equiv x_1 \geq 0, \\
 f_2 &\equiv y_2 \geq 0, \\
 f_3 &\equiv (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0, \\
 f_4 &\equiv y_1 \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{E.1}$$

Bewegungen in der dritten Raumrichtung ignorieren wir. (Wir können uns die beiden Massen als stabförmig vorstellen oder die Hantel gleich als Karikatur einer an eine Wand gelehnte Leiter betrachten.) Die Hantel soll aus der gezeichneten Ruheposition, in der die Masse 1 auf der Höhe h liegt, reibungsfrei abrutschen.

Wir wollen zunächst die anfängliche Bewegung studieren, bei der die beiden ersten Zwangsbedingungen durch die holonomen Zwangsbedingungen

$$f_1 = x_1 = 0, \quad f_2 = y_2 = 0 \tag{E.2}$$

ersetzt werden können. Das System hat dann nur einen einzigen Freiheitsgrad und wir können als generalisierte Koordinate z.B. einen der eingezeichneten Winkel ($\varphi = \pi - \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$) verwenden. Da die Energie erhalten ist, können wir sicher sein, daß die Bewegungsgleichung durch Integrationen lösbar ist. Die Beschreibung wird der eines ebenen Pendels, das wir in Kapitel 5 behandelt haben, am ähnlichsten, wenn wir den Winkel φ als Koordinate verwenden. Mit

$$y_1 = l \sin \alpha = -l \cos \varphi, \quad x_2 = l \cos \alpha = l \sin \varphi \tag{E.3}$$

finden wir die Energie

$$E = \frac{m}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2) + mgy_1 = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = mgh = -mgl \cos \varphi_0, \quad (\text{E.4})$$

die tatsächlich mit der Energie eines ebenen Pendels der Länge l und der Masse m übereinstimmt. Der Winkel φ liegt hier im Intervall $\pi/2 \leq \varphi \leq \varphi_0 < \pi$, d.h. das Pendel fällt von einem Winkel $\varphi = \varphi_0 > \pi/2$ bis zum Winkel $\varphi = \pi/2$. Die Integration der aus (E.4) folgenden Gleichung

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)} = -\sqrt{\frac{4g}{l}(\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2))} \quad (\text{E.5})$$

erfolgt bis auf die hier anderen Anfangsbedingungen sehr analog zu (5.28). Zur Standardisierung des sich ergebenden elliptischen Integrals rechnen wir

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{g}{l}}t &= \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi'/2)}} \\ &= \int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi'/2)}} - \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi'/2)}} \\ &= \int_0^{\pi-\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi'/2)}} - \int_0^{\pi-\varphi_0} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi'/2)}}. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Mit den Parametern $k \doteq \sin \frac{\pi-\varphi_0}{2} = \cos(\varphi_0/2)$ und s , definiert durch die Beziehung $k \sin s = \sin \frac{\pi-\varphi}{2} = \cos(\varphi/2)$, erhalten wir schließlich analog zu (5.29)

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}t = F(k, s) - F(k, \frac{\pi}{2}). \quad (\text{E.7})$$

Die Bewegung der Hantel kann dieser Lösung aber nicht bis zum Aufprall der Masse 1 auf dem Boden ($y_1 = 0$ oder $\varphi = \pi/2$) folgen. Beim Auftreffen der Masse 1 auf dem Boden müßte die Horizontalgeschwindigkeit der Masse 2 nämlich verschwinden. Die Masse 2 wird jedoch durch das Abrutschen der Masse 1 nach rechts beschleunigt und kann die dabei erzielte horizontale Geschwindigkeitskomponente nicht wieder reduzieren. Daher muß die Masse 1 sich vor ihrem Auftreffen auf dem Boden von der linken Wand ablösen.

Um festzustellen, wie lange die holonomen Zwangsbedingungen (E.2) gelten, müssen wir die zugehörigen Zwangskräfte mittels der Lagrangegleichungen 1. Art betrachten. Mit Lagrangeparametern λ_i für die Zwangsbedingung $f_i = 0$ lauten diese

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= \lambda_1 + 2\lambda_3(x_1 - x_2) \\ m\ddot{y}_1 &= -mg + 2\lambda_3(y_1 - y_2) \\ m\ddot{x}_2 &= 2\lambda_3(x_2 - x_1) \\ m\ddot{y}_2 &= -mg + \lambda_2 + 2\lambda_3(y_2 - y_1). \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Da hier zunächst $x_1 = y_2 \equiv 0$ gilt, können wir diese beiden Variablen zusammen mit ihren Zeitableitungen null setzen und erhalten sofort

$$\lambda_1 = 2\lambda_3 x_2, \quad \lambda_2 = mg + 2\lambda_3 y_1. \quad (\text{E.9})$$

Den Lagrangeparameter λ_3 bestimmen wir durch zweifache Ableitung der Zwangsbedingung $f_3 = 0$,

$$m(x_2 \ddot{x}_2 + y_1 \ddot{y}_1 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2) = 0, \quad (\text{E.10})$$

und Eliminierung der Beschleunigungen mittels der Bewegungsgleichungen aus (E.8). Wir erhalten damit

$$\lambda_3 = \frac{m}{2l^2} [gy_1 - (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2)] = \frac{m}{2l^2} [gy_1 - l^2 \dot{\varphi}^2] = \frac{mg}{2l^2} (3y_1 - 2h), \quad (\text{E.11})$$

wobei wir rechts die Geschwindigkeiten mittels des Energiesatzes (E.4) eliminiert haben. Wir erkennen nunmehr, daß λ_3 und wegen (E.9) gleichzeitig λ_1 für

$$y_1 = \frac{2}{3} h \quad (\text{E.12})$$

verschwindet. Dies signalisiert den Punkt, an dem die Zwangskraft der Wand auf den Massenpunkt 1 verschwindet und an dem der Massenpunkt 1 sich von der Wand löst. Dieser Punkt konnte allein mittels des Energiesatzes bestimmt werden. Die Lösung (E.7) der Bewegungsgleichung bis zu diesem Punkt dient nur zur Bestimmung der Zeit, zu der dieser Punkt erreicht wird.

Für die Bewegung nach Erreichen des Punktes (E.12) hat das System zwei Freiheitsgrade und gleichzeitig aber auch zwei Erhaltungssätze. Erhalten ist nämlich außer der Energie die horizontale Komponente des Gesamtimpulses. Letzteres folgt sofort aus (E.8) für $\lambda_1 = 0$. Am Ablösepunkt A ergibt sich aus dem Energiesatz (E.4)

$$\dot{\alpha}_A = \dot{\varphi}_A = -\sqrt{\frac{2gh}{3l^2}} \quad (\text{E.13})$$

und daraus für die danach erhaltene x -Komponente der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes

$$V_x = \frac{1}{2} (\dot{x}_2)_A = -\frac{1}{2} l \dot{\alpha}_A \sin \alpha_A = \sqrt{\frac{2gh^3}{27l^2}}. \quad (\text{E.14})$$

Für die Bewegung nach dem Punkt (E.12) kann man daher die x -Komponenten der Geschwindigkeiten beider Massenpunkte als

$$\dot{x}_1 = V_x + \frac{1}{2} l \dot{\alpha} \sin \alpha, \quad \dot{x}_2 = V_x - \frac{1}{2} l \dot{\alpha} \sin \alpha \quad (\text{E.15})$$

schreiben. Damit erhalten wir für den Energieerhaltungssatz jetzt

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2) + mgy_1 = \frac{m}{2} (2V_x^2 + \frac{1}{2} l^2 \dot{\alpha}^2 (1 + \cos^2 \alpha)) + mgy_1 = mgh. \quad (\text{E.16})$$

Wegen des veränderten Ausdrucks (E.16) für die Energie lautet der Ausdruck für den Lagrangeparameter λ_3 in leichter Abwandlung von (E.11) jetzt

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \frac{m}{4l^2 - 2y_1^2} [gy_1 - (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 - \dot{y}_1^2] = \frac{m}{2l^2(1 + \cos^2 \alpha)} [gl \sin \alpha - l^2 \dot{\alpha}^2] \\ &= \frac{mg}{2l^2(1 + \cos^2 \alpha)^2} [l \sin \alpha(1 + \cos^2 \alpha) - 4(h - l \sin \alpha) + \frac{8h^3}{27l^2}].\end{aligned}\tag{E.17}$$

Unter Benutzung dieser Formel kann man jetzt das Vorzeichen des Lagrangeparameters (siehe (E.9))

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= mg + 2\lambda_3 l \sin \alpha \\ &= \frac{mg}{(1 + \cos^2 \alpha)^2} \left[4 - 2 \sin^2 \alpha - 4 \frac{h}{l} \left(1 - \frac{2}{27} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right) \sin \alpha \right]\end{aligned}\tag{E.18}$$

untersuchen. Man findet, daß die Werte von $\sin \alpha$, für die λ_2 verschwinden würde, immer oberhalb des durch den Ablösepunkt (E.12) gegebenen Wertes $\sin \alpha = 2h/3l$ liegen. Daher verschwindet λ_2 nicht, solange die Masse 1 den Boden noch nicht berührt hat, und die Masse 2 hebt nicht vom Boden ab.

Wenn die Masse 1 den Boden erreicht, wird sie elastisch reflektiert und führt im weiteren Verlauf der Bewegung eine unendliche Folge von Hüpfbewegungen durch.

Die obige Analyse sollte die erstaunliche Komplexität der Bewegung in einem einfachen System deutlich machen.

F. Der Kowalewskische Kreisel

In Kapitel 16 haben wir zwei integrable Spezialfälle des schweren Kreisels diskutiert, den **Eulerschen** und den **Lagrangeschen Kreisel**. Im Jahre 1889 zeigte die russische Mathematikerin **Sophya Kowalewski** mit einer von der französischen Akademie der Wissenschaften preisgekrönten Arbeit, daß es genau einen weiteren integrablen Spezialfall gibt.

Zur Charakterisierung eines schweren Kreisels genügen die folgenden Angaben:

- die Hauptträgheitsmomente Θ'_i ($i = 1, 2, 3$) bezüglich des Festpunktes O sowie
- der Vektor $\mathbf{l} = l_1 \mathbf{e}'_1 + l_2 \mathbf{e}'_2 + l_3 \mathbf{e}'_3 = \overrightarrow{OS}$ vom Festpunkt O zum Massenmittelpunkt S des Kreisels. (Die Einheitsvektoren \mathbf{e}'_i zeigen in Richtung der Hauptträgheitsachsen.)

Mittels dieser Parameter können die integrablen Kreisel folgendermaßen beschrieben werden:

- **Eulerscher Kreisel:** $\mathbf{l} = \mathbf{0}$
- **Lagrangescher Kreisel:** $\Theta'_1 = \Theta'_2, \quad l_1 = l_2 = 0$
- **Kowalewskischer Kreisel:** $\Theta'_1 = \Theta'_2 = 2 \Theta'_3, \quad l_3 = 0$

Zunächst wollen wir uns klarmachen, wie ein Kowalewskischer Kreisel realisiert werden kann. Dazu notieren wir als Vorbereitung die aus (16.29) folgende Formel für die Beziehung zwischen dem Trägheitstensor Θ' bezüglich des Festpunktes O und dem Trägheitstensor Θ bezüglich des Massenmittelpunktes S bei Verschiebung um den Vektor $\mathbf{l} = \overrightarrow{OS}$. Sie lautet

$$\Theta'_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + M(l^2 \delta_{\mu\nu} - l_\mu l_\nu). \quad (\text{F.1})$$

Da $\Theta'_1 = \Theta'_2$ gelten soll, können wir das Hauptachsensystem des Trägheitstensors Θ' so wählen, daß neben $l_3 = 0$ auch $l_2 = 0$ gilt. Dann schreibt sich die Gleichung (F.1) im Hauptachsensystem des Trägheitstensors Θ' als

$$\begin{pmatrix} \Theta' & 0 & 0 \\ 0 & \Theta' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \Theta' \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & l_1^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.2})$$

Daher muß der Trägheitstensors Θ im Hauptachsensystem des Trägheitstensors Θ' diagonal sein (mit Hauptträgheitsmomenten $\Theta_i = \Theta_{ii}$) und die Bedingungen

$$\Theta' = \Theta_1, \quad \Theta' = \Theta_2 + Ml_1^2, \quad \frac{1}{2} \Theta' = \Theta_3 + Ml_1^2 \quad (\text{F.3})$$

erfüllen. Dies impliziert für die Hauptträgheitsmomente Θ_i bezüglich des Massenmittelpunktes S die Relation

$$2\Theta_2 = 2\Theta_3 + \Theta_1. \quad (\text{F.4})$$

Die Verschiebung des Festpunktes O muß dann in Richtung der Hauptträgheitsachse 1 des Kreisels erfolgen und die Bedingung

$$\Theta_1 = \Theta_2 + Ml_1^2 \quad (\text{F.5})$$

erfüllen.

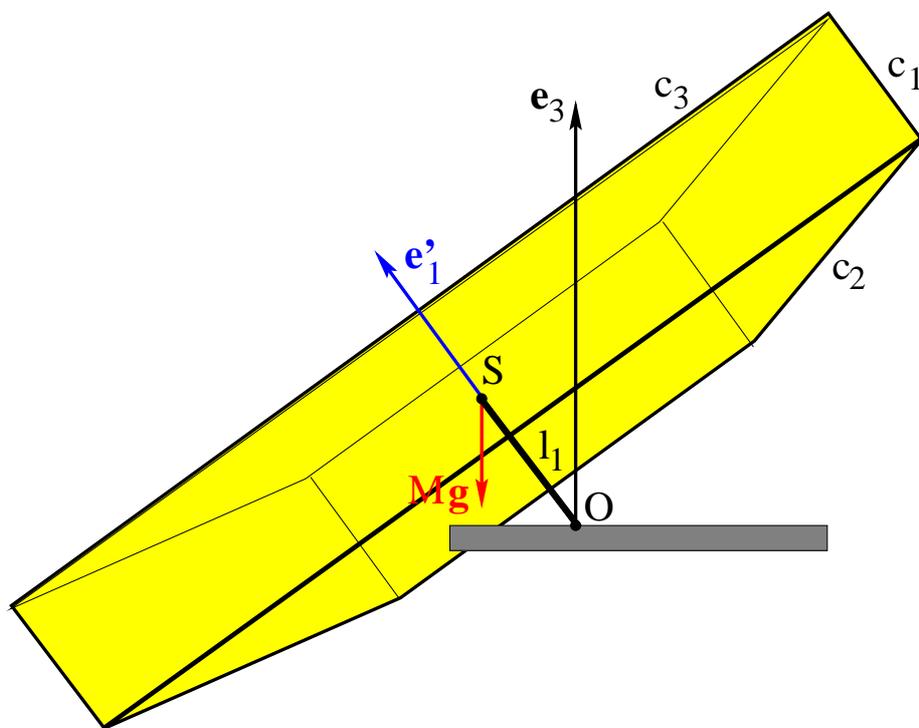
Für einen homogen mit Masse gefüllten Quader der Kantenlängen c_1, c_2, c_3 erhält man für die Hauptträgheitsmomente die Formel

$$\Theta_3 = \frac{M}{12}(c_1^2 + c_2^2) \quad (\text{und zyklisch}). \quad (\text{F.6})$$

Die Gleichungen (F.4) und (F.5) entsprechen dann den beiden Bedingungen

$$c_3^2 = 3c_2^2 \quad \text{und} \quad c_2^2 = c_1^2 + 12l_1^2 \quad (\text{F.7})$$

für die involvierten Längen. Die folgende Figur stellt einen solchen Quaderkreisel dar.



Um die Lagrangefunktion des Kowalewskischen Kreisels aufzustellen, brauchen wir eine Formel für die Höhe seines auf der körperfesten \mathbf{e}'_1 -Achse liegenden Massenmittelpunktes über dem Festpunkt. Aus (14.4) und (14.27) entnehmen wir dafür die Gleichung

$$\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \sin \vartheta \sin \psi. \quad (\text{F.8})$$

In Anlehnung an (16.84) lautet die Lagrangefunktion des Kowalewskischen Kreisels daher

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Theta'(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{4}\Theta'(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 - Mg l_1 \sin \vartheta \sin \psi. \quad (\text{F.9})$$

Als Hamiltonfunktion erhalten wir unter Benutzung von (16.59)

$$H = \frac{1}{2\Theta'}(L_1'^2 + L_2'^2 + 2L_3'^2) + Mg l_1 \sin \vartheta \sin \psi, \quad (\text{F.10})$$

wobei die Drehimpulskomponenten L_i' mittels (16.58) durch die Eulerschen Winkel und ihre Geschwindigkeiten auszudrücken sind. Als zweite Erhaltungsgröße kennen wir (siehe (16.85)) die vertikale Komponente des Drehimpulses

$$L_3 = p_\varphi = \frac{\Theta'}{2} [\dot{\varphi}(1 + \sin^2 \vartheta) + \dot{\psi} \cos^2 \vartheta]. \quad (\text{F.11})$$

Die von Sophya Kowalewski gefundene dritte Erhaltungsgröße ist

$$\begin{aligned} F_3 &= |(L_1' + iL_2')^2 - 2\Theta' Mgl_1(a_{13} + ia_{23})|^2 \\ &= (L_1'^2 - L_2'^2 - 2\Theta' Mgl_1 a_{13})^2 + (2L_1' L_2' - 2\Theta' Mgl_1 a_{23})^2. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Die hier auftauchenden Matrixelemente $a_{13} = \sin \vartheta \sin \psi$ und $a_{23} = \sin \vartheta \cos \psi$ der Drehmatrix (14.27) haben die anschauliche Bedeutung der Komponenten des vertikalen Einheitsvektors \mathbf{e}_3 im körperfesten System. Daß die Größen (F.10-12) in Involution zueinander sind, überprüft man am besten durch Berechnung der Poissonklammern mittels symbolischer algebraischer Manipulation (Mathematica, Maple). Die explizite Lösung für den Kowalewskikreisel ist technisch aufwändig und soll hier nicht weiter verfolgt werden.

G. Raumflug mit vorgegebener Dauer

Angenommen man möchte zu einem vorgegebenen Zeitpunkt t_1 zu einem Raumflug von der Erde zum Mars starten und zu einem vorgegebenen Zeitpunkt t_2 dort ankommen. Nach einer kurzen Anfangsbeschleunigung wird man sich den größten Teil der Reise ballistisch im Schwerfeld der Sonne auf einer elliptischen Bahn bewegen, so daß die Schwerfelder von Erde und Mars vernachlässigt werden können. Die gestellte Aufgabe besteht darin, eine geeignete Trajektorie zu finden, die die obigen Bedingungen erfüllt. Dieses Problem wurde von **Johann Heinrich Lambert (1728-1777)** gelöst.

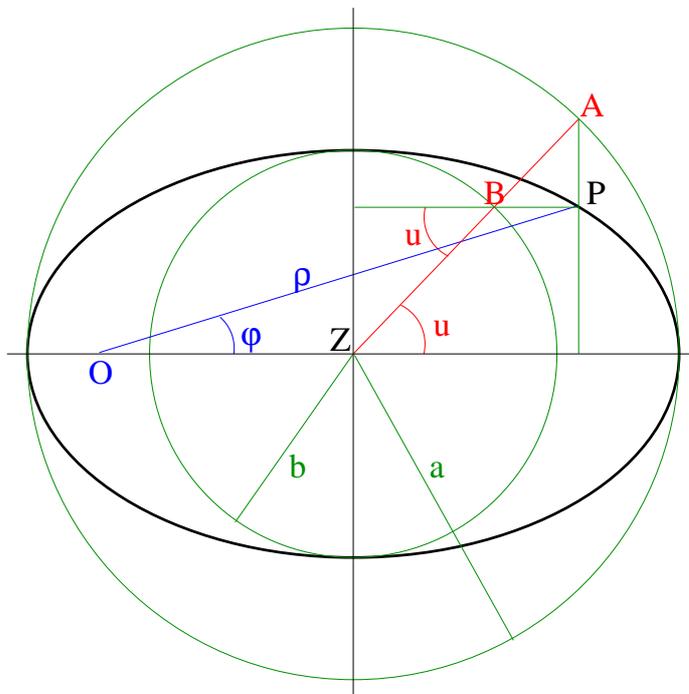
Zur Lösung des Problems erweist sich eine besondere Parametrisierung der Ellipse als nützlich, die auch Kepler schon benutzte. Wir legen im folgenden die x-Achse in die große Halbachse und den Koordinatenursprung in den linken Brennpunkt der Keplerellipse, in dem die Sonne liegen soll. Dann lautet die Bahngleichung der Ellipse in kartesischen Koordinaten

$$\underbrace{\left(\frac{x - e}{a}\right)^2}_{\cos u} + \underbrace{\left(\frac{y}{b}\right)^2}_{\sin u} = 1. \quad (\text{G.1})$$

Die hier angezeigte Parametrisierung durch den Winkelparameter u ist

$$x = a(\cos u + \epsilon), \quad y = b \sin u. \quad (\text{G.2})$$

Die geometrische Bedeutung des Winkels u wird aus der folgenden Figur ersichtlich, in der zur Ellipse konzentrische Kreise mit der großen und der kleinen Halbachse a und b als Radien gezeichnet sind. Die Lote von einem Ellipsenpunkt P auf die x- und die y-Achse schneiden diese Kreise in den Punkten A und B . Dann geht die durch A und B bestimmte Gerade durch das Zentrum Z der Ellipse und bildet mit der großen Halbachse den Winkel u .



In Polarkoordinaten um den Brennpunkt O

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (\text{G.3})$$

schreibt sich die Bahngleichung der Ellipse

$$\rho = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \varphi}. \quad (\text{G.4})$$

Die Parametrisierung der Ellipse in Polarkoordinaten durch den Winkel u ergibt sich aus (G.2,3) nach kurzer Rechnung zu

$$\rho = a(1 + \epsilon \cos u), \quad \text{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} \text{tg} \frac{u}{2}. \quad (\text{G.5})$$

Wenn die Ellipse im Laufe der Zeit durchlaufen wird, ergibt sich zwischen den Zeitableitungen \dot{u} und $\dot{\varphi}$ die einfache Beziehung

$$\rho \dot{\varphi} = b \dot{u}. \quad (\text{G.6})$$

Um sie herzuleiten, kann man z.B. die aus (G.4) und (G.5) folgende Gleichung

$$(1 + \epsilon \cos u)(1 - \epsilon \cos \varphi) = 1 - \epsilon^2$$

nach der Zeit ableiten,

$$-\dot{u} \underbrace{\sin u}_{y/b} \underbrace{(1 - \epsilon \cos \varphi)}_{b^2/a\rho} + \dot{\varphi} \underbrace{\sin \varphi}_{y/\rho} \underbrace{(1 + \epsilon \cos u)}_{\rho/a} = 0,$$

und die angezeigten Ersetzungen vornehmen.

Mittels (G.6) gelingt nunmehr eine elegante Integration des Flächensatzes

$$m\rho^2 \dot{\varphi} = mb\rho \dot{u} = mab(1 + \epsilon \cos u) \dot{u} = L \quad (\text{G.7})$$

mit dem Ergebnis (**Keplersche Gleichung**)

$$u - \epsilon \sin u = \omega(t - t_0), \quad (\text{G.8})$$

wobei

$$\omega = \frac{L}{mab} = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{GM}}{a^{3/2}} \quad (\text{G.9})$$

die mittlere Kreisfrequenz über einen Umlauf ist und die Anfangsbedingung $u(t_0) = 0$ angenommen wurde.

Um auf das zu Anfang des Kapitels formulierte Raumflugproblem zurückzukommen, spezifizieren wir den Startpunkt der Reise (Erde) durch die Polarkoordinaten $\rho_1 = \rho(t_1)$, $\varphi_1 = \varphi(t_1)$ und den Zielpunkt (Mars) durch $\rho_2 = \rho(t_2)$, $\varphi_2 = \varphi(t_2)$.

Wir wollen das Koordinatensystem so legen, daß die gesuchte Keplerellipse durch die Gleichung (G.1) bzw. (G.4) beschrieben wird. Da wir dieses Koordinatensystem zunächst noch gar nicht kennen, sind uns auch die Winkel φ_1 und φ_2 nicht bekannt, sondern nur ihre Differenz $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, die wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit als positiv annehmen können. Die der Problemstellung zugrundeliegenden Eingabeparameter sind daher

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \Delta\varphi \quad \text{und} \quad \Delta t = t_2 - t_1. \quad (\text{G.10})$$

Bekannt sind uns damit auch der Abstand

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \Delta\varphi} \quad (\text{G.11})$$

zwischen Start- und Zielpunkt sowie die beiden Längen

$$l_{\pm} = \rho_1 + \rho_2 \pm d, \quad (\text{G.12})$$

die wir später benutzen werden.

Zu bestimmen sind die Formparameter der Ellipse a und ϵ sowie die Winkel φ_1 oder φ_2 , die die Lage von Erde (zum Zeitpunkt t_1) und Mars (zum Zeitpunkt t_2) auf der Lösungselipse angeben.

Wir denken uns nunmehr die Lösungselipse durch den oben definierten Winkel u parametrisiert. Die Startposition wird dann durch den Winkel $u_1 = u(t_1)$ und die Zielposition durch den Winkel $u_2 = u(t_2)$ gekennzeichnet. Die Lambertsche Problemlösung basiert auf der geschickten Einführung der beiden Winkel α und β durch die Gleichungen

$$\cos \alpha = \epsilon \cos \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad \beta = \frac{u_2 - u_1}{2} \quad (\text{G.13})$$

und der beiden weiteren Winkel

$$\gamma_{\pm} = \alpha \pm \beta. \quad (\text{G.14})$$

Zwischen den hiermit eingeführten Größen findet nach einigem Rechnen die einfachen Beziehungen

$$l_{\pm} = 4a \sin^2 \gamma_{\pm}. \quad (\text{G.15})$$

Zur Herleitung von (G.15) parametrisiert man zunächst die Längen (G.12) mit Hilfe von (G.2) und (G.5) durch die Winkel u_1 und u_2 ,

$$l_{\pm} = a \left[2 - \epsilon(\cos u_1 + \cos u_2) \pm \sqrt{(\cos u_1 - \cos u_2)^2 + (1 - \epsilon^2)(\sin u_1 - \sin u_2)^2} \right]. \quad (\text{G.16})$$

Gleichung (G.15) ergibt sich dann durch geschickten Einsatz von trigonometrischen Halbwinkelformeln und Additionstheoremen, unter anderem durch Verwendung der Identitäten

$$\begin{aligned} \sin u_2 - \sin u_1 &= 2 \sin^2 \frac{u_2 - u_1}{2} \cos^2 \frac{u_2 + u_1}{2} \\ \cos u_2 + \cos u_1 &= 2 \cos^2 \frac{u_2 - u_1}{2} \cos^2 \frac{u_2 + u_1}{2}. \end{aligned}$$

Nach ähnlichen Umformungen erhält man schließlich aus der Keplerschen Gleichung (G.8) unter Verwendung von (G.9) die weitere Beziehung

$$\begin{aligned}\sqrt{GM}\Delta t &= a^{3/2}((u_2 - \sin u_2) - (u_1 - \sin u_1)) \\ &= a^{3/2}((\gamma_+ - \sin \gamma_+) - (\gamma_- - \sin \gamma_-)).\end{aligned}\quad (\text{G.17})$$

Um eine Bestimmungsgleichung für die große Halbachse a zu erhalten, muß man in (G.17) nur noch mittels (G.15) die Winkel γ_{\pm} eliminieren. Dies ist möglich, wenn man die Lösung die Eigenschaft $4a \geq l_+$ besitzt. Mit

$$\sin \frac{\gamma_{\pm}}{2} = \xi_{\pm}(a) \equiv \sqrt{\frac{l_{\pm}}{4a}}\quad (\text{G.18})$$

erhält man die Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned}\sqrt{GM}\Delta t &= a^{3/2} \left[(2 \arcsin \xi_+(a) - 2\xi_+(a)\sqrt{1 - \xi_+^2(a)}) \right. \\ &\quad \left. - (2 \arcsin \xi_-(a) - 2\xi_-(a)\sqrt{1 - \xi_-^2(a)}) \right].\end{aligned}\quad (\text{G.19})$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung bei vorgegebenen l_{\pm} wegen $a \geq l_+/4$ nicht beliebig klein werden kann, existiert eine Lösung a nur für genügend große Reisezeiten Δt .

Nach der Bestimmung der großen Halbachse a folgen die anderen Bestimmungstücke nun leicht, weil mit (G.15) die Winkel γ_{\pm} und mit Gleichung (G.14) dann auch die Winkel α und β bekannt sind. Zur Bestimmung der Winkel u_1 und u_2 reicht dann die Bestimmung ihres Mittelwertes

$$u_0 = \frac{u_1 + u_2}{2},\quad (\text{G.20})$$

wegen $u_2 = u_0 + \beta$ und $u_1 = u_0 - \beta$. Anhand der zweiten Gleichung in (G.5) bringen wir den letzten Eingabeparameter $\Delta\varphi$ ins Spiel und erhalten die Gleichung

$$\Delta\varphi = 2\arctg\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \operatorname{tg} \frac{u_0 + \beta}{2}\right) - 2\arctg\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \operatorname{tg} \frac{u_0 - \beta}{2}\right).\quad (\text{G.21})$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für u_0 , wenn man mittels der ersten Gleichung in (G.13) den Parameter

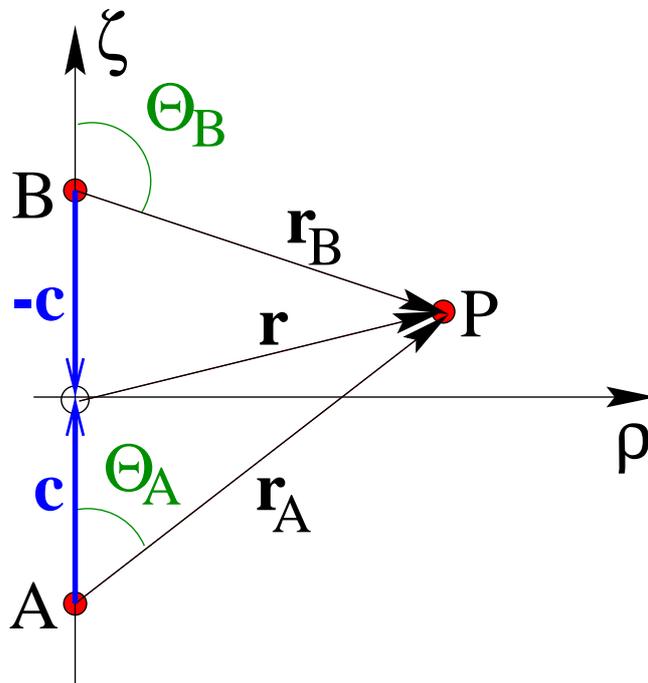
$$\epsilon = \frac{\cos \alpha}{\cos u_0}\quad (\text{G.22})$$

als Funktion von u_0 betrachtet. Der letzte gesuchte Parameter ϵ berechnet sich dann aus (G.22).

H. Das Wasserstoffmoleklion H_2^+

Ein Elektron, das sich unter der Wirkung des anziehenden Coulombpotentials zweier Ladungen Ze bewegt, stellt ein weiteres **integrables System** dar. Wir stellen uns zunächst eine Beschreibung dieses Systems in **Zylinderkoordinaten** (1.9) vor, wobei die beiden Ladungen an den Positionen A und B auf der ζ -Achse $\rho = 0$ bei $\zeta = -c$ und $\zeta = c$ fixiert sind, wie in der folgenden Figur gezeigt. Wenn $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{AP} = \mathbf{r} - \mathbf{c}$ und $\mathbf{r}_B = \overrightarrow{BP} = \mathbf{r} + \mathbf{c}$ die beiden Vektoren von den fixierten Kernladungen zum Elektron bezeichnen, lautet die Hamiltonfunktion des Systems

$$H = \frac{p^2}{2m} - Ze^2 \left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} \right). \quad (\text{H.1})$$



Da das System rotationssymmetrisch um die ζ -Achse ist (die Zylinderkoordinate φ ist zyklisch), erkennen wir in der ζ -Komponente des Drehimpulses

$$L_\zeta = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_\zeta = p_\varphi \quad (\text{H.2})$$

eine **zweite Erhaltungsgröße**. Die **dritte Erhaltungsgröße** schreibt sich unter Verwendung der beiden Winkel Θ_A und Θ_B , die die beiden Vektoren \mathbf{r}_A und \mathbf{r}_B mit der ζ -Achse einschließen, als

$$\Omega = \mathbf{L}_A \cdot \mathbf{L}_B + 2mcZe^2(\cos \Theta_A - \cos \Theta_B), \quad (\text{H.3})$$

wo $\mathbf{L}_A = \mathbf{r}_A \times \mathbf{p}$ und $\mathbf{L}_B = \mathbf{r}_B \times \mathbf{p}$ die Drehimpulse des Elektrons bezüglich der Aufpunkte A und B sind. Diese Erhaltungsgröße geht im isotropen Grenzfall $c \rightarrow 0$ in die dort offensichtliche Erhaltungsgröße L^2 über.

Zur bequemen Berechnung der erforderlichen Poissonklammern benutzen wir im folgenden anstelle der Zylinderkoordinaten ρ und ζ die **rotationselliptischen Koordinaten**

$$\xi = \frac{r_A + r_B}{2c}, \quad \eta = \frac{r_A - r_B}{2c} \quad (\text{H.4})$$

mit der Umkehrbeziehung

$$\rho = c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad z = c \xi \eta \quad (\xi \geq 1, -1 \leq \eta \leq 1). \quad (\text{H.5})$$

Die Flächen zu konstantem ξ sind konfokale Rotationsellipsoide mit den Brennpunkten A und B , die Flächen zu konstantem η dazu orthogonale konfokale zweischalige Rotationshyperboloide.

Die generalisierten Geschwindigkeiten der Zylinderkoordinaten ρ und ζ drücken sich in denen der elliptischen Koordinaten ξ und η wie

$$\dot{\rho} = c \frac{(1 - \eta^2)\xi\dot{\xi} - (\xi^2 - 1)\eta\dot{\eta}}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}}, \quad \dot{z} = c(\eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta}) \quad (\text{H.6})$$

aus, so daß die kinetische Energie in rotationselliptischen Koordinaten die Gestalt

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{m}{2}c^2 \left[\frac{((1 - \eta^2)\xi\dot{\xi} - (\xi^2 - 1)\eta\dot{\eta})^2}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} + \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\dot{\varphi}^2 + (\eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta})^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

annimmt. Für die generalisierten Impulse der rotationselliptischen Koordinaten erhalten wir damit

$$\begin{aligned} p_\xi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = mc^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \dot{\xi}, \\ p_\eta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = mc^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2} \dot{\eta}, \\ p_\varphi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mc^2 (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (\text{H.8})$$

womit die kinetische Energie in den Impulsen die Gestalt

$$T = \frac{1}{2mc^2} \left[\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2} p_\xi^2 + \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} p_\eta^2 + \frac{p_\varphi^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \right] \quad (\text{H.9})$$

erhält.

Da die Energie (H.1) und die in (H.3) definierte Größe Ω nicht von der Koordinate φ abhängen, verschwinden die beiden Poissonklammern

$$\{H, p_\varphi\} = 0, \quad \{\Omega, p_\varphi\} = 0. \quad (\text{H.10})$$

Zum Nachweis der Integrabilität fehlt uns daher nur noch das Verschwinden der Poissonklammer $\{H, \Omega\}$ sowie die Unabhängigkeit (13.86) der drei Erhaltungsgrößen. Im folgenden werden wir anstelle der Erhaltungsgröße Ω die gleichwertige Erhaltungsgröße

$$G = -H - \frac{\Omega}{2mc^2} \quad (\text{H.11})$$

verwenden.

Das Skalarprodukt der beiden Drehimpulse

$$\mathbf{L}_A = (\mathbf{r} + \mathbf{c}) \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{L}_B = (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{p} \quad (\text{H.12})$$

berechnet sich aus

$$\mathbf{L}_A \cdot \mathbf{L}_B = (r^2 - c^2) p^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{p})^2 = (r^2 - c^2) p^2 - (\rho p_\rho + z p_z)^2 + c^2 p_z^2. \quad (\text{H.13})$$

Für die Transformation auf rotationselliptische Koordinaten leiten wir unter Benutzung von (H.5) und (H.8) die Hilfsbeziehungen

$$\begin{aligned} p_\rho = m\dot{\rho} &= mc \frac{(1 - \eta^2)\xi\dot{\xi} - (\xi^2 - 1)\eta\dot{\eta}}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} = \frac{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}}{c(\xi^2 - \eta^2)} (\xi p_\xi - \eta p_\eta), \\ p_z = m\dot{z} &= mc(\eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta}) = \frac{(\xi^2 - 1)\eta p_\xi + (1 - \eta^2)\xi p_\eta}{c(\xi^2 - \eta^2)}. \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

her, aus denen die Darstellung

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} [(\xi^2 - 1)\xi p_\xi + (1 - \eta^2)\eta p_\eta] \quad (\text{H.15})$$

folgt. Unter Verwendung der Darstellung für p^2 aus (H.9) erhalten wir damit schließlich

$$\mathbf{L}_A \cdot \mathbf{L}_B = \frac{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}{\xi^2 - \eta^2} (p_\eta^2 - p_\xi^2) + \left(\frac{1}{1 - \eta^2} - \frac{1}{\xi^2 - 1} \right) p_\varphi^2. \quad (\text{H.16})$$

Für die Darstellung der Potentialterme folgern wir aus (H.4)

$$r_A r_B = c^2 (\xi^2 - \eta^2) \quad (\text{H.17})$$

und damit die Ausdrücke

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} = \frac{2\xi}{c(\xi^2 - \eta^2)}, \quad \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} = \frac{-2\eta}{c(\xi^2 - \eta^2)}, \quad (\text{H.18})$$

die wir für die Hamiltonfunktion (H.1) und für den zweiten Summanden der dritten Erhaltungsgröße (H.3) brauchen. Mit

$$\cos \Theta_A = \frac{z + c}{r_A}, \quad \cos \Theta_B = \frac{z - c}{r_B} \quad (\text{H.19})$$

ergibt sich

$$\cos \Theta_A - \cos \Theta_B = \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) z + \left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} \right) c = 2\xi \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}. \quad (\text{H.20})$$

Das endgültige Ergebnis schreibt sich unter Verwendung der beiden Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} H_\xi &= \frac{1}{2mc^2} \left[(\xi^2 - 1)p_\xi^2 + \frac{p_\varphi^2}{\xi^2 - 1} \right] - 2 \frac{Ze^2}{c} \xi \\ H_\eta &= \frac{1}{2mc^2} \left[(1 - \eta^2)p_\eta^2 + \frac{p_\varphi^2}{1 - \eta^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{H.21})$$

schließlich sehr kompakt als

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} [H_\xi + H_\eta], \\ G &= \frac{-1}{\xi^2 - \eta^2} [\eta^2 H_\xi + \xi^2 H_\eta]. \end{aligned} \quad (\text{H.22})$$

Die Berechnung der Poissonklammer $\{H, G\}$ reduziert sich jetzt wegen der offensichtlichen Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} = \frac{\partial H_\xi}{\partial p_\eta} = \frac{\partial H_\xi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} = \frac{\partial H_\eta}{\partial p_\xi} = \frac{\partial H_\eta}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial p_\xi} = -\eta^2 \frac{\partial H}{\partial p_\xi}, \quad \frac{\partial G}{\partial p_\eta} = -\xi^2 \frac{\partial H}{\partial p_\eta} \end{aligned} \quad (\text{H.23})$$

nach wenig aufwändiger Rechnung auf

$$\{H, G\} = \left(-\eta^2 \frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) \frac{\partial H}{\partial p_\xi} + \left(-\xi^2 \frac{\partial H}{\partial \eta} - \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) \frac{\partial H}{\partial p_\eta} = 0. \quad (\text{H.24})$$

Die Unabhängigkeit der drei Erhaltungsgrößen und damit der vollständige Nachweis der Integrabilität ergibt sich schließlich nach (13.86) aus der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(H, p_\varphi, G)}{\partial(p_\xi, p_\eta, p_\varphi)} = \frac{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)p_\xi p_\eta}{m^2 c^4 (\xi^2 - \eta^2)} \neq 0. \quad (\text{H.25})$$

Um den Lösungsmechanismus für integrable Systeme nach Kapitel 13 in Gang zu setzen, müssen wir die Erhaltungssätze

$$H = E, \quad G = \gamma, \quad p_\varphi = M \quad (\text{H.26})$$

nach den generalisierten Impulsen auflösen. Die Abhängigkeit von den Systemkonstanten gestaltet sich dabei übersichtlicher, wenn man natürliche Einheiten für Energie und Wirkung,

$$E_0 = \frac{Ze^2}{c}, \quad p_0 = \sqrt{mcZe^2}, \quad (\text{H.27})$$

einführt und alle Energien in Einheiten von E_0 und alle Impulse in Einheiten von p_0 mißt. (Da unsere generalisierten Koordinaten dimensionslos sind, haben ihre Impulse die Dimension einer Wirkung.) Wir bezeichnen die skalierten Erhaltungsgrößen mit

$$\tilde{E} = \frac{E}{E_0}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{E_0}, \quad \tilde{M} = \frac{M}{p_0} \quad (\text{H.28})$$

und erhalten nach Auflösen der Gleichungen (H.26) nach den Impulsen

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\xi &= \sqrt{\frac{2\tilde{E}\xi^2 + 4\xi + 2\tilde{\gamma} - \tilde{M}^2/(\xi^2 - 1)}{\xi^2 - 1}}, \\ \tilde{p}_\eta &= \sqrt{\frac{-2\tilde{E}\eta^2 - 2\tilde{\gamma} - \tilde{M}^2/(1 - \eta^2)}{1 - \eta^2}}, \\ \tilde{p}_\varphi &= \tilde{M}. \end{aligned} \quad (\text{H.29})$$

Auf der Grundlage dieser Gleichungen kann man nun leicht für gebundene Bewegung ($E < 0$) die Struktur der Lösungstori im Phasenraum diskutieren und nach den Vorschriften in Kapitel 13 Wirkungs- und Winkelvariable einführen. Die dazu auszuführenden Integrationen führen auf elliptische Funktionen.

Die quantenmechanische Behandlung dieses Problems hat eine interessante Geschichte und konnte die Existenz eines gebundenen Zustandes für das H_2^+ -Ion nachweisen.

I. Die Toda-Kette

Die Toda-Kette ist ein außergewöhnliches integrables System. Es ist ein eindimensionales System mit n Teilchen der Masse m , Koordinaten q_i und Impulsen p_i , die über ein nichtlineares Potential wechselwirken und durch die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n p_i^2 + V_0 \sum_{i=1}^n e^{\frac{q_i - q_{i+1}}{a}} \quad (\text{I.1})$$

beschrieben werden. Die potentielle Energie ist durch die Vorstellung motiviert, daß die Teilchen in der Form $q_1 < q_2 < \dots < q_n$ in aufsteigender Reihenfolge angeordnet sind und daher die Wechselwirkung auf nächste Nachbarn beschränkt ist. Die angegebene Anordnung ist allerdings im Modell (I.1) dann gar nicht vorausgesetzt. Die in der potentiellen Energie (für $i = n$) auftretende Koordinate q_{n+1} identifizieren wir mit der Koordinate q_1 ("zyklische Randbedingungen"). Indem wir schließlich Längen, Energien und Zeiten in geeigneten Einheiten messen, können wir für die drei Parameter der Toda-Kette ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Annahme $a = m = V_0 = 1$ machen. Die aus (I.1) folgenden Hamiltonschen Gleichungen lauten dann

$$\dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -e^{q_i - q_{i+1}} + e^{q_{i-1} - q_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{I.2})$$

mit den Konventionen für zyklische Randbedingungen

$$q_0 = q_n, \quad q_{n+1} = q_1. \quad (\text{I.3})$$

Die Konstruktion von n Erhaltungsgrößen der Toda-Kette gelingt, indem man aus den Bewegungsgleichungen (I.2) eine Differentialgleichung für eine $(n \times n)$ -Matrix herleitet. Wir definieren zur Abkürzung die Größen

$$a_i = e^{\frac{q_i - q_{i+1}}{2}} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{I.4})$$

und bilden damit die symmetrische Matrix

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ a_1 & p_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & p_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & p_n \end{pmatrix} \quad (\text{I.5})$$

sowie die antisymmetrische Matrix

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ -a_1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.6})$$

Man überprüft nun leicht, daß diese beiden Matrizen aufgrund der Bewegungsgleichungen (I.2) die Differentialgleichung

$$\frac{dL}{dt} = LM - ML \quad (\text{I.7})$$

erfüllen. Ein Paar von Matrizen mit der Eigenschaft (I.7) nennt man auch ein **Lax-Paar**. Tatsächlich impliziert die Gleichung (I.7) für die Diagonalelemente p_i und die Nichtdiagonalelemente a_i der Matrix L die Differentialgleichungen

$$\dot{p}_i = (a_{i-1}^2 - a_i^2), \quad \dot{a}_i = a_i(p_i - p_{i+1})/2 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{I.8})$$

Anhand der Definitionen (I.4) erkennt man sofort die Äquivalenz

$$\dot{p}_i = (a_{i-1}^2 - a_i^2) \iff \dot{p}_i = -e^{q_i - q_{i+1}} + e^{q_{i-1} - q_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{I.9})$$

Die n Gleichungen für \dot{a}_i in (I.8) folgen aus den n Gleichungen $\dot{q}_i = p_i$ in (I.2), sind allerdings linear abhängig voneinander und es gilt die Äquivalenz

$$\left[\dot{a}_i = a_i(p_i - p_{i+1})/2 \quad (i = 1, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n p_i \right] \iff \dot{q}_i = p_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{I.10})$$

Aus der Differentialgleichung (I.7) folgt die Unabhängigkeit aller Eigenwerte der Matrix L von der Zeit t oder, äquivalent dazu, die Zeitunabhängigkeit des charakteristischen Polynoms $\det(L - \lambda I)$ der Matrix L . Die n Koeffizienten des charakteristischen Polynoms ergeben n Erhaltungsgrößen und begründen vorbehaltlich des Nachweises ihrer Kompatibilität und Unabhängigkeit den Beweis für die Integrierbarkeit der Toda-Kette.

Zum Beweis der Zeitunabhängigkeit des charakteristischen Polynoms betrachten wir eine reguläre (als Matrix invertierbare) Lösung $V(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}V(t) = -M(t)V(t). \quad (\text{I.11})$$

Für die Inverse von $V(t)$ gilt dann die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}V^{-1} = -V^{-1}\dot{V}V^{-1} = V^{-1}M(t) \quad (\text{I.12})$$

und wir erhalten damit unter Benutzung von (I.7)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V^{-1}LV) &= V^{-1}(ML + \dot{L} - LM)V = 0 \implies V^{-1}(t)L(t)V(t) = C \\ &\implies \det(L - \lambda I) = \det(C - \lambda I) \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

mit einer zeitunabhängigen Matrix C .

Wir bezeichnen die erhaltenen Koeffizienten von $(-\lambda)^{n-i}$ des charakteristischen Polynoms $\det(L - \lambda I)$ mit $F_i(n)$. Dann sind die ersten drei Erhaltungsgrößen

$$\begin{aligned} F_1(n) &= \sum_{i=1}^n p_i = P, \\ F_2(n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j - \sum_{i=1}^n e^{q_i - q_{i+1}} = \frac{1}{2} P^2 - H, \\ F_3(n) &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} p_i p_j p_k - \sum_{i=1}^n e^{q_i - q_{i+1}} \sum_{j \neq (i, i+1)} p_j + 2\delta_{3n}. \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

Die ersten beiden Erhaltungsgrößen sind durch die offensichtlichen Erhaltungsgrößen Gesamtimpuls P und Gesamtenergie H bestimmt. Die weiteren Erhaltungsgrößen sind ganz neuartig, da $F_i(n)$ ein Polynom vom Grade i in den Impulsen ist.

Zum Nachweis der Unabhängigkeit der n Erhaltungsgrößen $F_i(n)$ muß man die Funktionaldeterminante (13.86) berechnen. Es genügt hier, den Fall verschwindender potentieller Energie ($V_0 = 0$) zu untersuchen, in dem man

$$\det \frac{\partial \mathbf{F}(n)}{\partial \mathbf{p}} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (p_i - p_j) \neq 0 \quad (\text{I.15})$$

erhält. Die potentielle Energie erzeugt hier additive Zusatzterme von geringerer Ordnung in den Impulsen, die nicht ein identisches Verschwinden der Determinante bewirken können.

Der Beweis, daß wie in (13.85) die n Erhaltungsgrößen $F_i(n)$ paarweise in Involution zueinander sind, erfordert einige Anstrengung. Wir beginnen mit der Definition der Erhaltungsgrößen (I.14) im Falle verschwindender potentieller Energie

$$F_i^0(n) = \sum_{\{\nu_j\}_{j=1}^i}^{\nu_j \in [1, n]} p_{\nu_1} \cdots p_{\nu_i}. \quad (\text{I.16})$$

Hier kommt jeder Impuls höchstens einmal in einem Summanden vor, d.h. die Indizes ν_j sind paarweise verschieden. Aus den $F_i^0(n)$ kann man die Erhaltungsgrößen $F_i(n)$ mit Hilfe des Operators

$$O_n = \prod_{i=1}^n \left[1 - a_i^2 \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_{i+1}} \right] \quad (\text{I.17})$$

mittels der Formel

$$F_i(n) = O_n F_i^0(n) - 2(-1)^n \delta_{i,n} \quad (\text{I.18})$$

erzeugen. Der Operator O_n ersetzt jedes Produkt benachbarter Impulse $p_i p_{i+1}$ durch die Subdeterminante $p_i p_{i+1} - a_i^2$. Dies ist genau die Art, in der die Nichtdiagonalelemente a_i der Bandmatrix L in die Adjunkten eingehen, aus denen die $F_i(n)$ gebildet sind. Nur für $i = n$ werden damit nicht die Produkte $a_1 \cdots a_n = 1$ der Nebendiagonalelemente berücksichtigt, die daher durch den Zusatzsummanden ± 2 ergänzt werden.

Zur Berechnung der Poissonklammern (13.35) brauchen wir die Abkürzungen

$$J_{i,i+s-1}^{(k)}(n) = \frac{\partial^s F_k^0(n)}{\partial p_i \cdots \partial p_{i+s-1}} \quad (\text{I.19})$$

und

$$x_{i,i+s-1} = a_i^2 \cdots a_{i+s-1}^2, \quad (\text{I.20})$$

wobei s jede natürliche Zahl aus dem Intervall $[1, n]$ sein kann. (Indizes, die größer als n sind, sind immer modulo n zu verstehen.) Man überzeugt sich nun leicht von den beiden Identitäten

$$\frac{\partial F_m(n)}{\partial q_j} = -O_n(x_{j,j} J_{j,j+1}^{(m)}(n) - x_{j-1,j-1} J_{j-1,j}^{(m)}(n)) \quad (\text{I.21})$$

und

$$\frac{\partial F_m(n)}{\partial p_j} = O_n J_{j,j}^{(m)}(n), \quad (\text{I.22})$$

mit deren Hilfe die Poissonklammern sich zu

$$\begin{aligned} [F_k(n), F_l(n)] &= \sum_{j=1}^n x_{j,j} \left([O_n(J_{j+1,j+1}^{(k)}(n) - J_{j,j}^{(k)}(n))] [O_n J_{j,j+1}^{(l)}(n)] \right. \\ &\quad \left. - [O_n(J_{j+1,j+1}^{(l)}(n) - J_{j,j}^{(l)}(n))] [O_n J_{j,j+1}^{(k)}(n)] \right) \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

ergeben. Wir werden im folgenden induktiv beweisen, dass in Verallgemeinerung von (I.23) für beliebige $s = 1, 2, \dots$ die Formel

$$\begin{aligned} [F_k(n), F_l(n)] &= \sum_{j=1}^n x_{j,j+s-1} \left([O_n(J_{j+1,j+s}^{(k)}(n) - J_{j,j+s-1}^{(k)}(n))] [O_n J_{j,j+s}^{(l)}(n)] \right. \\ &\quad \left. - [O_n(J_{j+1,j+s}^{(l)}(n) - J_{j,j+s-1}^{(l)}(n))] [O_n J_{j,j+s}^{(k)}(n)] \right) \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

gilt, deren Gültigkeit für $s = 1$ mit (I.23) festgestellt wurde. Die rechte Seite von (I.24) verschwindet jedoch für $s \geq \max(k, l)$, weil dann $J_{j,j+s}^{(k)}(n)$ und $J_{j,j+s}^{(l)}(n)$ beide verschwinden. Daher sind alle Erhaltungsgrößen $F_k(n)$ als paarweise involutorisch erkannt, sobald die Gültigkeit der Formel (I.24) für alle s nachgewiesen ist.

Wir nehmen also an, die Gleichung (I.24) gelte für ein $s \geq 1$. Nicht verschwindende Beiträge zu einer Differenz $J_{j+1,j+s}^{(m)}(n) - J_{j,j+s-1}^{(m)}(n)$ leiten sich nach (I.19) nur aus Summanden in $F_m^0(n)$ ab, die den Faktor $p_i \cdots p_{i+s}$ enthalten. Denn der Faktor $p_{i+1} \cdots p_{i+s-1}$ muss mindestens enthalten sein, damit nicht beide Summanden der Differenz verschwinden. Wenn nur einer der beiden zusätzlichen Faktoren p_i und p_{i+s} enthalten ist, heben sich die beiden Beiträge, die von analogen Termen in $F_m^0(n)$ mit $p_i \cdots p_{i+s-1}$ und $p_{i+1} \cdots p_{i+s}$ herrühren, gegenseitig auf. Es folgt daher die Identität

$$J_{j+1,j+s}^{(m)}(n) - J_{j,j+s-1}^{(m)}(n) = (p_j - p_{j+s})J_{j,j+s}^{(m)}(n). \quad (\text{I.25})$$

Indem wir diese in (I.24) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} [F_k(n), F_l(n)] &= \sum_{j=1}^n x_{j,j+s-1} \left([[O_n, p_j - p_{j+s}]J_{j,j+s}^{(k)}(n)][O_n J_{j,j+s}^{(l)}(n)] \right. \\ &\quad \left. - [[O_n, p_j - p_{j+s}]J_{j,j+s}^{(l)}(n)][O_n J_{j,j+s}^{(k)}(n)] \right). \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

Hier haben wir die Produkte $O_n(p_j - p_{j+s})$ durch die Kommutatoren $[O_n, p_j - p_{j+s}]$ ersetzen können, weil die Zusatzterme der ersten und zweiten Zeile in (I.26) einander kompensieren. Da jeder Impuls in $F_m^0(n)$ höchsten in erster Potenz vorkommt, ergeben sich nun die Identitäten

$$\begin{aligned} [O_n, p_j]J_{j,j+s}^{(m)}(n) &= -O_n a_{i-1}^2 J_{j-1,j+s}^{(m)}(n), \\ [O_n, p_{j+s}]J_{j,j+s}^{(m)}(n) &= -O_n a_{i+s}^2 J_{j,j+s+1}^{(m)}(n). \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

Indem man diese in (I.26) einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} [F_k(n), F_l(n)] &= \sum_{j=1}^n x_{j,j+s-1} \\ &\quad \left([O_n a_{j+s}^2 J_{j,j+s+1}^{(k)}(n) - O_n a_{j-1}^2 J_{j-1,j+s}^{(k)}(n)][O_n J_{j,j+s}^{(l)}(n)] \right. \\ &\quad \left. - [O_n a_{j+s}^2 J_{j,j+s+1}^{(l)}(n) - O_n a_{j-1}^2 J_{j-1,j+s}^{(l)}(n)][O_n J_{j,j+s}^{(k)}(n)] \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left([x_{j,j+s} O_n J_{j,j+s+1}^{(k)}(n) - x_{j-1,j+s-1} O_n J_{j-1,j+s}^{(k)}(n)] \right. \\ &\quad \times [O_n J_{j,j+s}^{(l)}(n)] \\ &\quad \left. - [x_{j,j+s} O_n J_{j,j+s+1}^{(l)}(n) - x_{j-1,j+s-1} O_n J_{j-1,j+s}^{(l)}(n)] \right. \\ &\quad \left. \times [O_n J_{j,j+s}^{(k)}(n)] \right). \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

Durch Anheben des Summationsindex j um 1 in den jeweils rechten Summanden und durch Vertauschen der unteren und oberen Summanden erhält man schließlich

das Endergebnis

$$\begin{aligned}
[F_k(n), F_l(n)] = & \sum_{j=1}^n x_{j,j+s} \left([O_n(J_{j+1,j+s+1}^{(k)}(n) - J_{j,j+s}^{(k)}(n))] [O_n J_{j,j+s+1}^{(l)}(n)] \right. \\
& \left. - [O_n(J_{j+1,j+s+1}^{(l)}(n) - J_{j,j+s}^{(l)}(n))] [O_n J_{j,j+s+1}^{(k)}(n)] \right),
\end{aligned} \tag{I.29}$$

durch das die Induktion von s auf $s + 1$ durch Vergleich mit (I.24) erwiesen ist.

Eine alternative Möglichkeit zur Definition von n zu den $F_i(n)$ äquivalenten unabhängigen Erhaltungsgrößen erhält man über die n Spuren

$$G_i(n) = \text{Spur } L^i \quad (i = 1, \dots, n). \tag{I.30}$$

Die algebraischen Beziehungen zwischen den beiden Basissystemen hängen nicht von der Zahl n der Freiheitsgrade ab. Man erhält für die ersten Erhaltungsgrößen die Formeln

$$\begin{aligned}
G_1(n) &= F_1(n) \\
G_2(n) &= F_1^2(n) - 2F_2(n) \\
G_3(n) &= F_1^3(n) - 3F_1(n)F_2(n) + 3F_3(n) \\
G_4(n) &= F_1^4(n) - 4F_1^2(n)F_2(n) + 4F_1(n)F_3(n) + 2F_2^2(n) - 4F_4(n)
\end{aligned} \tag{I.31}$$

Die $G_i(n)$ eignen sich besser zur Betrachtung des Grenzfalls $n \rightarrow \infty$ unendlich langer Ketten, weil sie im Gegensatz zu den $F_i(n)$ linear in der Systemgröße sind.

Die Toda-Kette für $n = 3$ steht in enger Beziehung zum Hénon-Heiles-System (12.54). Wir spezifizieren die Parameter der Toda-Kette (I.1) so ($m = 1$, $a = 1/\sqrt{8}$, $V_0 = 1/24$), daß ihre Hamiltonfunktion durch

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{24} \left(e^{\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{8}}} + e^{\frac{q_2 - q_3}{\sqrt{8}}} + e^{\frac{q_3 - q_1}{\sqrt{8}}} \right) \tag{I.32}$$

gegeben ist. Wegen der Translationsinvarianz führen wir Massenmittelpunkt- und Relativkoordinaten

$$Q_1 = \frac{2q_1 - q_2 - q_3}{\sqrt{6}}, \quad Q_2 = \frac{q_3 - q_2}{\sqrt{2}}, \quad Q_3 = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{3} \tag{I.33}$$

ein. Hierbei ist Q_3 die Koordinate des Massenmittelpunktes des Gesamtsystems, Q_1 die Relativkoordinate zwischen dem Massenmittelpunkt der Freiheitsgrade q_2 und q_3 und dem Freiheitsgrad q_1 und Q_2 die Relativkoordinate der Freiheitsgrade q_3 und q_2 . Die alten Koordinaten drücken sich durch die neuen wie

$$q_1 = Q_3 + \frac{\sqrt{2}}{3}Q_1, \quad q_2 = Q_3 - \frac{1}{\sqrt{6}}Q_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_2, \quad q_3 = Q_3 - \frac{1}{\sqrt{6}}Q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}Q_2 \tag{I.24}$$

aus. Damit erhält die kinetische Energie in den zu den neuen Koordinaten Q_i kanonisch konjugierten Impulsen P_i die Gestalt

$$T = \frac{P_1^2 + P_2^2}{2} + \frac{P_3^2}{6}. \quad (\text{I.35})$$

Wenn wir die potentielle Energie in den neuen Koordinaten bis zur dritten Ordnung entwickeln, erhalten wir das Ergebnis

$$V = \frac{1}{8} + \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{2} + Q_1^2 Q_2 - \frac{Q_2^3}{3} + O(Q^4). \quad (\text{I.36})$$

Die aus (I.35) und (I.36) gebildete Hamiltonfunktion ist in den beiden Relativfreiheitsgraden 1 und 2 identisch mit der Hamiltonfunktion (12.54). Die Toda-Kette mit drei Freiheitsgraden ist also eine integrable Erweiterung des chaotischen Hénon–Heiles–Systems auf große Anharmonizitäten.

Stichwortverzeichnis

abgeschlossene Systeme	47
Aeromechanik	164
aktive Transformation	133
Allgemeine Relativitätstheorie	13,143
Anfangsbedingungen	16
Anfangswertproblem	88
anisotrope Flüssigkeiten	186
Antisymmetrie	114,137
Äquipotentialflächen	21
Arbeitsbegriff	20
Arbeitshypothese	6
Aristoteles	4
Arnold	126
astronomische Präzession	160
atomistisches Modell	164
Atwoodsche Fallmaschine	73,77
Aufpunkt	6,54
äußere Einfüsse	13
äußere Kräfte	46,54
Azimuthalwinkel	163
Bahn	7,32
Basis	9
Bernoulli, Johann	84
Beschleunigung	8,37,38,170,171
beschleunigte Bezugssysteme	140
Bewegung	5,6,32,34,59
Bewegungsgleichung	14,16,35,100,116,154,187
Bezugssystem	5,6,127,140
Brachistochronenproblem	84
Brane-Mechanik	46
Bruno, Giordano	4
Bücher	3
Corioliskraft	142
Coulombpotential	64
d'Alembert, Jean-Baptiste de Rond	44

d'Alembertsches Prinzip	44,72
Deformationsellipsoid	169
Deformationsgeschwindigkeit	170,186
Deformationstensor	167
deformierbare Medien	5,46,164
Dehnungen	168
Dehnungsfläche	169
Derivation	114
Determiniertheit	16
deterministisches Chaos	108
Deviationsmomente	146
Differentialprinzip	84
differentieller Streuquerschnitt	64
Dilatationsgeschwindigkeit	170
Dissipation	186
Doppelpendel	xii,xvii
Drehgruppe	127,135,136
Drehimpuls	27,53
Drehimpulserhaltungssatz	28,53,56
Drehimpulssatz	53,174
Drehmatrix	133
Drehmoment	27
Drehungen	57
dreidimensionaler Euklidischer Raum	5
Druckspannungen	174
Dualität	98
Dynamik starrer Körper	144ff
dynamische Massendefinition	15
dynamische Zähigkeit	186
ebenes Pendel	41
echte Tensoren	135
effektives Potential	29
Eichtransformation	92
eigentlich orthogonal	129
einfach zusammenhängend	24
eingeprägte Kraft	34
eingeschränkte Bewegungen	34ff,71ff

Einheits-Tensor	135
Einsteinsches Relativitätsprinzip	143
elastische Federkraft	32
elastische Festkörper	176ff
elastisches Potential	176
Elastizitätsmoduln	176,181
Elastomechanik	164
Elektrodynamik	3
Elektrostatik	190
Ellipsen	30
Ellipsenbahnen	32
elliptisches Integral	42
Energie	19,25
Energieerhaltungssatz	25,49,52,56
Energiesatz	49
Erhaltungsgröße	93,102,120
Erhaltungssätze	48ff,56,95
erste Variation	87
erstes Integral der Bewegung	25,49
erzeugende Funktion	111
Euklidischer Raum	5
Euler, Leonhard	87,88,97,130,137,152,189
Euler-Lagrange-Gleichungen	88
Eulersche Bewegungsgleichungen	154
Eulersche Differentialgleichungen	87
Eulersche Geschwindigkeitsformel	137
Eulersche Gleichungen der Hydrodynamik	189
Eulersche Indizierung	170
Eulerscher Kreisel	152
Eulerscher Satz über orthogonale Matrizen	130
Eulerscher Satz über homogene Funktion	97
Eulersche Winkel	133
externe Kräfte	46
Exzentrizität	30
Felder	13
festgehaltene Energie	iii
festgehaltener Drehimpuls	iii

Figurenachse	158
Flächengeschwindigkeit	28
Flächenkräfte	172
Flächensatz	28
flüssige Kristalle	186
Flüssigkeiten	164,186ff
Foucault, Jean	142
Freiheitsgrade	37,127
Freiheitsgrade im Großen	82
Freiheitsgrade im Kleinen	82
f -Torus	124
Fubini	144
Führungsbeschleunigung	141
Führungsgeschwindigkeit	141
Führungskraft	142
Galilei, Galileo	4
Galilei-Invarianz	57,96
Galileisches Relativitätsprinzip	142
Galilei-Transformationen	57,143
Gase	164,186ff
gebundene Bewegungen	i
gekoppelte Pendel	xi,xvii
geschlossene Bahnen	i
generalisierte Beschleunigung	38
generalisierte Geschwindigkeiten	38,76
generalisierter Impuls	93,98
generalisierte Koordinaten	37,75
generalisierte Kraft	38
geometrische Bedeutung	133
geradlinige Koordinatensysteme	10
Gesamtdrehimpuls	52
Gesamtenergie	97
Gesamtimpuls	48
Gesamtmasse	48
Geschwindigkeit	7,38,103,137
Geschwindigkeitsfeld	104
Gleichgewichtssituation	72

Gradientenfeld	21
Gramsche Matrix	35
Gravitationsfelder	13,16,95
Gravitationspotential	30
Grundlagen der Naturbeschreibung	3
Hamilton, William Rowan	87
Hamiltonformalismus	98ff
Hamiltonfunktion	97,100
Hamilton–Jacobi–Gleichung	119
Hamiltonsche Bewegungsgleichungen	100
Hamiltonsches Prinzip	84ff,87,109
Hantel	77
harmonische Näherung	xiii
harmonischer Oszillator	32,113
harmonisches Potential	32,iii
Hauptachsen	147
Hauptdehnungskoeffizienten	167
Hauptdilataationen	167
Hauptgleichungen der Elastizitätstheorie	182
Hauptspannungen	175
Hauptspannungsachsen	175
Hauptträgheitsmomente	147
Hausaufgaben	3
Hebelgesetze	72
Heisenbergsche Unschärferelation	126
Helmholtzsche Wirbelsätze	190
Hénon–Heiles–System	108
Herpolhodie	157
Hilbertraum	126
hinreichendes Kriterium	23
historisch erste physikalische Disziplin	3
holonome Zwangsbedingung	34,73
Homogene Flüssigkeit	188
homogene Funktionen	97
homogener Strom	63
homogenes Gravitationsfeld	95
homogenes Polynom	97

Hooke, Robert	176
Hookesches Gesetz	176
Hydromechanik	164
hydrostatischer Druck	184
Hyperbelbahnen	32
ideale Flüssigkeit	188
Impuls	27,48
Impulserhaltung	56
Impulssatz	48,174
Indizierung	165,170
inelastischer Stoß	17
Inertialsystem	13,14
infinitesimale Erzeugende	94
inhomogene Galilei-Gruppe	57
Inklinationswinkel	162
inkompressible Flüssigkeit	104,188
innere Kräfte	46,54
innerer Drehimpuls	54
innere Schwingungen	xviii
innere Zentralkräfte	54,56
integrabel	124
Integrale der Bewegungsgleichungen	56
Integralprinzip	84
invariable Ebene	157
invarianter Pseudotensor dritter Stufe	135
Inversion	112
Involution	123
Irreversibilität	106
isotrope Festkörper	180
isotrope Flüssigkeiten	186
Jacobi-Matrix	99
Jacobische Identität	114
KAM-Theorem	126
kanonische Bewegungsgleichungen	116
kanonische Phasenraumvariable	116
kanonische Transformation	109ff
kanonische Vertauschungsrelationen	126

kanonisch konjugiert	116
kartesisches Koordinatensystem	9
kausales Naturverständnis	4,88
Kepler, Johannes	4
Keplerpotential	iv
Keplerproblem	30
Keplersche Gesetze	30ff
Kettenlinienproblem	85
Kinematik starrer Körper	127
kinematische Massendefinition	16,17
kinetische Energie	19,76
kleine Schwingungen	xi
Knotenlinie	132
Kolmogorov	126
Kommutator	126
Kompressibilität	184,186
Konfigurationsvektor	71
konservative Kraftfelder	20,25,56
Kontinuitätsgleichung	188
Kontinuumsmechanik	164
Kontinuumsmodell	164
Kontraktion	136
Konvektionsbeschleunigung	171
konvexe Funktion	98
konvexe Hülle	48
Koordinate	93,xvi
Koordinatensystem	9,10,11
Körper	5
körperfestes Bezugssystem	127,145
Kraft	13,14,27,34,38,46
Kraftdichte	172
kräftefreier starrer Körper	152
Kraftfeld	19
Kraftlinie	22
Kraftvektor	71
Kraftzentrum	28
Kreisel	160

Kristalle	179,186
Kristallschwingungen	xiii,xx
Kriterien für kanonische Transformationen	116
Kronecker-Symbol	135
kubische Symmetrie	180
Kugelkoordinaten	11,37
kürzeste Kurve	85
labil	44
Laborsystem	67
Lagrange, Joseh Louis	35
Lagrangeformalismus	91
Lagrangefunktion	40,77,97
Lagrangeparameter	74
Lagrangesche Bewegungsgleichungen erster Art	35,74
Lagrangesche Bewegungsgleichungen zweiter Art	40,76
Lagrangesche Indizierung	165
Lagrangesche Multiplikatoren	35
Lagrangescher Kreisel	160
Lamésche Elastizitätsmoduln	181
Legendretransformation	98
Legendretransformierte	112
Leistung	19
Levi-Civita-Symbol	135
lineare Kette	xix
lineare Unabhängigkeit	34
Linearität	114
Liouville-Theorem	104
lokale Beschleunigung	170
longitudinale Schallwellen	185,192
Lorentzkraft	19,91
Lorentz-Transformation	143
lösbare Grenzfälle	i
Masse	13,14,16
Massenerhaltung	187
Massenmatrix	71
Massenmittelpunkt	48,59
Massenmittelpunktsystem	67

Massenpunkte	5,6
Massenpunktsysteme	46
Maßstäbe	5
maximales Potentialgefälle	22
Mechanik	3
metastabil	44
Minkowskiraum	143
modifiziertes Hamiltonsches Prinzip	109
modifiziertes Wirkungsintegral	109
Molekülschwingungen	xiii,xviii
Moment	27
momentane Winkelgeschwindigkeit	151
Momentangeschwindigkeit	8
monokline Kristalle	179
Moser	126
Nabla	23
Näherung	xiii
Näherungskonzept	6
nahezu kreisförmige Bahnen	i
Naturbeschreibung	3
natürliches Koordinatensystem	12
Naturverständnis	4
Navier, Claude	187
Navier–Stokessche Bewegungsgleichung	187
Newton, Isaac	4
Newtonsche Axiome	13ff
Newtonsche Bewegungsgleichung	14
nicht–holonome Zwangsbedingungen	45,80
Niveauflächen	21
Noether, Emmy	57
Noethersches Theorem	57,93ff
Normalbereich	144
Normalfrequenz	xvi
Normalkoordinate	xvi
Normalschwingung	xvi
Notation	38
notwendige Bedingung	22

Nutation	162
Oktaedergruppe	180
orthogonal	129,134
orthonormierte Basis	9
Parabelbahnen	32
Paradigmenwechsel	4
passive Transformation	133
Pendel	36,41,43
Pendelversuch	142
Periheldrehung	33
phänomenologisch	164
Phasenraum	98ff,103
Phasenraumgeschwindigkeit	103
Phasenraumvolumen	117
Platonische Körper	150
Poincaré–Abbildung	107
Poincarésches Wiederkehrtheorem	105
Poinsotsche Konstruktion	157
Poinsotsches Trägheitsellipsoid	147,157
Poissonklammer	114
Poissonsche Zahl	184
Polarisation	185
Polarkoordinaten	11,29
Polhodie	157
positiv definit	99
Potentialfeld	21
Potentialgefälle	22
Potentialströmungen	190
potentielle Energie	21
Präzession	158,163
primitive Translationen	xiv
Prinzip der virtuellen Arbeit	44,72
Produktregel	114
Pseudotensoren	135
Punktgruppen	179
Punktmechanik	46ff,120
Punktsysteme	5

Punkttransformation	109,113
Quadrupolpotential	160
Quantenmechanik	3
Querkontraktionskoeffizient	183
Randwertproblem	88
raumfestes Bezugssystem	127,145
Raumtranslation	57
Raumwinkel	64
Reaktionsprinzip	17
Rechte-Hand-Regel	23
rechtshändige orthonormierte Basis	9
reduzierte Masse	59
Referenzzustand	165
Relativbewegung	59
relative Volumenänderung	169
Resonanz	62
Resultierende der äußeren Kräfte	48
Resultierende der Drehmomente	53
Reynoldsche Zahl	189
rheonom	34
Richtungsableitung	21
Richtungskosinus	128
Rotationsgeschwindigkeit	170
Rotationsinvarianz	58,95
rotationssymmetrische Körper	150
Rutherford'scher Streuquerschnitt	65
Satz von Jacobi	120
Schallwellen	185,192
Scherspannungen	174
Scherungen	168
Schmiegungebene	9
schwere Masse	16
Schwerpunkt	49
selbstverständliche Tätigkeiten	3
selbständige Beschäftigung	3
Skalar	136
Skalarfeld	21

Skalarpotential	91
Skalentransformation	112
skleronom	34,41
Spannungstensor	174,175
Spannungs–Dehnungs–Beziehungen	175
Spannungsvektor	172
sphärische Polarkoordinaten	11
sphärisches Pendel	43
Spiegelung	134
stabil	44
Stabilitätsbedingung	182
starre Körper	5,46,55,80,127ff,144ff
stationär	87
Statistische Physik	3
Steinerscher Satz	148
Stokes, Georges	187
Stokesscher Integralsatz	23,123
störungstheoretische Methoden	126
Stoßparameter	63
Streuquerschnitt	64,65
Streuung	61
Streuwinkel	62
Streuzentrum	63
Stringmechanik	46
Stromdichte	63
substantielle Beschleunigung	170
substantielle Zeitableitung	188
Superpositionsprinzip der Kräfte	18
Symmetrie	180
symmetrischer Kreisel	160
symplektisch	117
Tangentenvektoren	37
teleologisches Naturverständnis	4,88
Tensor	134ff,147,174
Tensoralgebra	135
Tensor nullter Stufe	136
Tensorprodukt	135

Tetraedergruppe	180
topologische Struktur der Drehgruppe	136
Torus	124
total antisymmetrischer Einheitstensor	135
totale Beschleunigung	170
totaler Streuquerschnitt	65
totales Differential	87
totale Zeitableitung	188
total inelastischer Stoß	17
träge Masse	16
Trägheitsellipsoid	147
Trägheitsgesetz	14
Trägheitskraft	45,142
Trägheitsmoment	55,146
Trägheitstensor	147
Trajektorie	103
Transformation	57,109,116,133
Transformationsatz für mehrdimensionale Integrale	144
Translation	112,xiii
Translationsgeschwindigkeit	170
Translationsinvarianz	51,58,xiv
transversale Schallwellen	185
Trennung der Variablen	29
trikline Kristalle	179
Übungen	3
Uhren	5
Umlaufzeit	31
ungebundene Bewegungen	32
uneigentlich orthogonal	134
Untergruppe	135
Variationsrechnung	84
Vektordivergenz	174
Vektorfeld	165
Vektorpotential	91
Verformungen fester Körper	164
Verjüngung	136
Verschiebungsfeld	165

Verschiebungstensor	165
Verzerrungstensor	167
virtuelle Arbeit	43,45,72
virtuelle Verrückung	43,71,72
Viskosität	186
Volumenänderung	169
volumenerhaltend	104
Volumenkräfte	172
Vorlesung	3
Wellengleichung	191
Wellenmechanik	120
Wiederkehrtheorem	105
Wiegen	17
Winkelgeschwindigkeit	55
Winkelvariable	121,125
Wirbelstärke	23
Wirbelvektor	170,190
Wirkungsintegral	87,109,120
Wirkungsquerschnitt	65
Wirkungsvariable	121,125
Würfel	149
Youngscher Modul	183
Zähigkeit	186
Zeit	5
Zeittranslation	57
Zentralkraft	27,53
Zentralkräfte im engeren Sinne	28
Zentralpotentiale	i
Zentrifugalpotential	29
Zentripetalbeschleunigung	37
Zirkulation	23
Zugspannungen	174
Zustandsgleichung	187
Zwangsbedingung	34,41,45,71
Zwangskräfte	34,44,72
Zweikörperkräfte	47
Zweikörperproblem	59ff

Zweikörperstreuung	59ff
zyklische Koordinate	93,95,103
Zylinderkoordinaten	10