Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

7.7.2009

10. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Sommersemester 2009

Abgabe: 22.7.2009

Aufgabe 26 (10 Punkte): *Effektives Schwarzschild-Potential*
In dieser Aufgabe sollen Sie einige Eigenschaften der Bewegung materieller Probeteilchen in einer Schwarzschild-Raumzeit näher untersuchen. Betrachten Sie hierzu die Bewegungsgleichung auf der Ebene $\theta = \frac{\pi}{2}$ mit effektivem Potential V_{eff}, welche sich aus der Geodätengleichung ergibt:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r) = E, \qquad V_{eff}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3}.$$

Hierbei sind l und E Konstanten der Bewegung. Drücken Sie radiale Abstände in Einheiten des Schwarzschild-Radius $r_S = 2M$ aus.

1. Welche Bedingung muß ein Teilchen, das aus dem Unendlichen kommt, erfüllen, um ins Zentrum des Potentials zu fallen? Unter welchen Umständen fällt ein Teilchen, das im Unendlichen aus der Ruhe startet, ins Zentrum? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Situation in der Newtonschen Gravitation.

2. Wann existieren gebundene Teilchenbahnen? Für welche Werte der Radialkoordinate gibt es stabile Kreisbahnen? Wann gibt es instabile Kreisbahnen und was passiert mit einem Teilchen, das aus so einer Bahn ein wenig ausgelenkt wird? Skizzieren Sie qualitativ das Potential. Zeigen Sie u.a.:

- Für $l/M < 2\sqrt{3}$ fällt jedes einfallende Teilchen auf den Ereignishorizont $r = 2M$ zu.
- Die am stärksten gebundene stabile Kreisbahn befindet sich bei $r = 6M$ mit $l/M = 2\sqrt{3}$ und besitzt eine relative Bindungsenergie von $1 - \sqrt{8/9}$.

3. Ein materielles Probeteilchen werde von der Radialkoordinate $R > r_S$ aus der Ruhe ($l = 0$) radial ins Zentrum fallengelassen. Zeigen Sie, daß die Bahn durch die Parametrisierung (einer Zykloidenbahn)

$$r = \frac{R}{2}(1 + \cos\eta)\ , \quad \tau = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{R}{2M}}(\eta + \sin\eta)$$

gegeben ist, wobei τ die Eigenzeit des Teilchens bezeichne. Bei welcher Eigenzeit wird das Zentrum des Potentials erreicht? Zeigen Sie dann, daß die Zeit, die ein Beobachter im Unendlichen mißt, divergiert, wenn das Teilchen sich dem Schwarzschild-Radius nähert.

Aufgabe 27 (4 Punkte): *Rotverschiebung/Erhaltungsgrößen in der Schwarzschild-Metrik*

1. Betrachten Sie einen stationären Beobachter A bei $r = R, R \geq 2M$ im Schwarzschild-Feld der Masse M und einen Beobachter B im Unendlichen (vgl. Übung 8, Aufgabe 21). Der zeitartige Killing-Vektor sei mit $\xi^i = (1, 0, 0, 0)$ bezeichnet. Beobachter A emittiert Energie der Frequenz ω_R (gemessen in seinem Ruhesystem), welche vom Beobachter B als ω_∞ gemessen wird. Leiten Sie den Zusammenhang zwischen den Frequenzen ω_R und ω_∞ her. Was misst Beobachter B, wenn Beobachter A den Schwarzschild-Radius $r = 2M$ erreicht? Was bedeutet das für die Rotverschiebung?

2. Bei der Diskussion der Bewegung von Teilchen in der Schwarzschild-Metrik wurde gezeigt, daß der Drehimpuls $l := r^2 \sin^2\theta \frac{d\phi}{ds}$ eine Erhaltungsgröße ist. Leiten Sie dieses Ergebnis aus der Existenz eines Killing-Vektors $\eta^i = (0, 0, 0, 1)$ her, wobei die letzte Komponente der ϕ-Komponente entspricht.

Aufgabe 28 (6 Punkte): *Klassische Tests / Reissner-Nordström-Lösung*

Betrachten Sie die oben hergeleitete Reissner-Nordström-Metrik $ds^2 = F dt^2 - F^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$ mit $F = 1 - 2M/r + Q^2/r^2$ und $|Q| < M$. Bestimmen Sie die in der Vorlesung eingeführten Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ für die *isotrope Form dieser Metrik*, und untersuchen Sie, welchen Einfluss eine Ladung Q der Sonne auf die klassischen Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie im Sonnensystem hätte.