

## 11. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I Sommersemester 2009

**Abgabe:** 22.7.2009

**Aufgabe 29** (5 Punkte): *Zeitdilatation in der Schwarzschildmetrik*

Zeigen Sie, daß für die Eigenzeit  $ds$  auf einer kreisförmigen Geodätischen im Schwarzschild-Feld der Masse  $M$

$$ds = \sqrt{1 - \frac{3M}{r}} dt$$

gilt. Schätzen Sie den Effekt für einen die Erde in engem Orbit umkreisenden Satelliten ab.

**Aufgabe 30** (15 Punkte): *Gravitoelektromagnetismus*

In der Vorlesung wurde die „Maxwellsche“ Struktur der linearen Einstein-Gleichungen vorgestellt:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_g &= -4\pi G\rho & \nabla \times (\tfrac{1}{2}\mathbf{B}_g) &= \tfrac{1}{c}\partial_t \mathbf{E}_g - \tfrac{4\pi G}{c}\mathbf{j} \\ \nabla \times \mathbf{E}_g &= -\tfrac{1}{c}\partial_t (\tfrac{1}{2}\mathbf{B}_g) & \nabla \cdot (\tfrac{1}{2}\mathbf{B}_g) &= 0, \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{E}_g := -\nabla\Phi_g - \frac{1}{c}\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{A}_g)$  das gravitoelektrische und  $\mathbf{B}_g := \nabla \times \mathbf{A}_g$  das gravitomagnetische Feld bezeichnen.

1. Leiten Sie diese Gleichungen aus der linearen Näherung der Einstein-Gleichungen her. Betrachten Sie als Quelle den Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit, mit Geschwindigkeiten klein im Vergleich zu  $c$ :  $T^{00} = \rho$ ,  $T^{0\alpha} = c^{-1}j^\alpha$ , and  $T^{\alpha\beta} = \mathcal{O}(c^{-2})$ , wobei  $\rho$  die Massendichte und  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$  die Massenstromdichte bezeichnen. Berücksichtigen Sie Terme bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(c^{-4})$ . Führen Sie außerdem das gravitoelektrische Potential  $\Phi_g := \frac{c^2}{2}\bar{\Psi}_{00}$  und das gravitomagnetische Potential  $(A_g)_\alpha := -c^2\bar{\Psi}_{0\alpha}$  ein. Sie benötigen u.a. die Lorenz-Eichung  $\frac{1}{c}\partial_t\Phi_g + \nabla \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{A}_g) = 0$  (Herleitung!). Vergleichen Sie mit der Elektrodynamik.<sup>1</sup>

2. Betrachten Sie nun eine Massenverteilung, welche um den räumlichen Ursprung beschränkt ist. Berechnen Sie die Potentiale  $\Phi_g$  und  $\mathbf{A}_g$  und erläutern Sie deren Bedeutung.

3. Leiten Sie mit obigen Definitionen die „Lorentzkraft“ auf ein Teilchen der Masse  $m$  her. Stellen Sie dazu erst die Metrik auf. Betrachten Sie dann die Lagrangefunktion eines Teilchens der Masse  $m$ ,  $L = -mc\frac{ds}{dt}$ , in linearer Ordnung in  $\Phi_g$  und  $\mathbf{A}_g$ . (Lösung:  $L = -\frac{mc^2}{\gamma} - m\gamma(1 + v^2/c^2)\Psi_g + \frac{2m\gamma}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ ). Berücksichtigen Sie bei der Ableitung der Kraft nur Terme bis inklusive der Ordnung  $\mathcal{O}(c^{-1})$  und nehmen Sie an, daß  $\mathbf{A}_g$  zeitunabhängig ist. Führen Sie die gravitoelektromagnetischen „Ladungen“  $q_E = m$  und  $q_B = 2m$  ein, und vergleichen Sie mit der Elektrodynamik.

---

<sup>1</sup>Für einen aktuellen Übersichtsartikel siehe: B. Mashhoon, Gravitoelectromagnetism: A brief review. gr-qc/0311030.