

10.12.2003

Institut für Theoretische Physik  
Oberseminar zur Kosmologie

**Topologie des Universums**

von Bijan Sahamie

Betreuer: Prof. Claus Kiefer

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Zeitliche Orientierbarkeit . . . . .	3
1.2	Kausalität . . . . .	4
1.3	Existenz von Cauchy-Hyperflächen . . . . .	7
1.4	CPT-Invarianz . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Kosmologische Modelle</b>	<b>9</b>
2.1	Friedmann-Lemaître Universen . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Klassifizierung</b>	<b>10</b>
3.1	Kurzabriß: Algebraische Topologie . . . . .	10
3.1.1	Homotopien . . . . .	10
3.1.2	Die Universelle Überlagerung . . . . .	13
3.1.3	Die Decktransformationsgruppe . . . . .	14
3.1.4	Methode zur Klassifizierung . . . . .	15
3.2	Klassifizierung Riemannscher Räume . . . . .	15
3.2.1	Euklidische Räume . . . . .	16
3.2.2	Sphärische Räume . . . . .	17
3.2.3	Hyperbolische Räume . . . . .	18
3.2.4	”Gemischte” Räume . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Probleme des Modells und der Poincaré-Oktaederraum</b>	<b>19</b>
4.1	Experimentelle Tests . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Literatur</b>	<b>22</b>

# 1 Einführung

Grundlegend für ein Modell der 4-dimensionalen Raumzeit ist zunächst einmal die spezielle Relativitätstheorie. Die Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie liefern als Lösungen 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten zusammen mit einer Lorentzmetrik  $g$ . Diese Bedingung schränkt die Zahl der Möglichkeiten nicht sonderlich ein, da nur schwache Bedingungen an die Mannigfaltigkeit gestellt werden brauchen, um eine Lorentzmetrik zu liefern (im nicht kompakten Fall gibt es sie immer, im kompakten, falls die Euler-Poincaré Charakteristik null ist). Glücklicherweise besitzen die meisten solcher Mannigfaltigkeiten keine physikalische Relevanz, da für ein vernünftiges Modell auf der einen Seite offensichtliche Forderungen wie z.B. Zusammenhang oder Randlosigkeit erfüllt sein müssen, auf der anderen Seite physikalisch zu motivierende Bedingungen gestellt werden können, die nun im folgenden diskutiert werden sollen.

## 1.1 Zeitliche Orientierbarkeit

Physikalische Motivation für den Begriff ist die Tatsache, daß in einer Umgebung der Raumzeit eine zeitliche Orientierung durch diejenige Richtung festgelegt ist, in welcher die Entropie zunimmt.

Fixiert man nun einen Punkt  $p$  auf der Raumzeit  $(M, g)$ , so erhält man durch Klassifizierung zukunfts- bzw. vergangenheitsgerichteter Tangentialvektoren in  $p$  eine lokale zeitliche Orientierung. Die Frage ist, ob sich eine solche lokale Konstruktion in konsistenter Weise globalisieren läßt, denn Nichtorientierbarkeit ist bei Mannigfaltigkeiten sehr wohl möglich. Ein Beispiel für Nichtorientierbarkeit ist das allseits bekannte Möbiusband, für Nichtorientierbarkeit der Zeit der de Sitter Raum.

**Definition:** Sei  $(M, g)$  eine Raumzeit.  $\gamma$  eine Kurve in  $M$ , mit  $\gamma(0) = p$ . Durch stetiges Herumtragen von  $Or_p$  entlang der Kurve erhält man eine Orientierung  $Or_{\gamma(1)}$  am Endpunkt der Kurve. Eine Kurve  $\gamma \in \pi_1(p, M)$  heißt zeiterhaltend, wenn  $Or_p = Or_{\gamma(1)}$ .

**Definition:** Eine Raumzeit  $(M, g)$  heißt zeitlich orientierbar, wenn jede geschlossene Kurve zeiterhaltend ist.

Zu bemerken ist, daß dieses Kriterium die Auswahl der Räume nicht sonderlich einschränkt, denn in dieser Hinsicht inadäquate Gebilde sind reparabel. Jede zeitlich nicht orientierbare Mannigfaltigkeit besitzt eine zweiblättrige Überlagerung, die diese Eigenschaft erfüllt. Betrachte einfach

$$\bar{M} := \{(p, \alpha) \mid p \in M, \alpha \in Or(p)\}, \quad \pi : \bar{M} \longrightarrow M, \quad (p, \alpha) \longmapsto p.$$

## 1.2 Kausalität

Zur besseren Handhabung des Begriffes Kausalität seien ein paar Definitionen vorangestellt:

**Definition:** Sei  $(M, g)$  eine Raumzeit.

- (i.) Seien  $p, q \in M$  zwei Ereignisse, so sagt man  $p$  geschieht vor  $q$ , in Zeichen  $p < q$ , wenn es eine zeitartige, zukunftsgerichtete, nichtkonstante Kurve von  $p$  nach  $q$  gibt.
- (ii.) Im Sinne von (i.) definiert man die Zukunft bzw. Vergangenheit von  $p$  durch

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^+(p) &:= \{q \in M \mid p < q\} \\ \mathcal{I}^-(p) &:= \{q \in M \mid q < p\}.\end{aligned}$$

Die Menge

$$Q := \{\mathcal{I}^+(p) \mid p \in M\} \cup \{\mathcal{I}^-(p) \mid p \in M\}$$

heißt eine Chronologie.

- (iv.) Für  $p \in M$  definiert man die kausale Zukunft  $\mathcal{J}^+(p)$  von  $p$  als die Vereinigung der Menge  $\{p\}$  mit der Menge aller Punkte in  $M$ , die mit  $p$  durch eine zukunftsgerichtete, nicht-raumartige Kurve verbindbar sind. Entsprechend definiert man die kausale Vergangenheit von  $p$  vermittels

$$\mathcal{J}^-(p) := \{q \in M \mid p \in \mathcal{J}^+(q)\}.$$

Die Forderung nach Kausalität, d.h. die Ursache liegt vor der Wirkung, entspricht dem alltäglichen physikalischen Verständnis, und es ist nur natürlich, diese Forderung auch an die Mannigfaltigkeit zu stellen. Dieses Prinzip ist auch in der Relativitätstheorie insofern eingebettet, als daß eine Reise in die Vergangenheit äquivalent ist zur -verbotenen- Bewegung entlang einer raumartigen Kurve.

**Definition:**

- (i.) Die Eigenschaft, daß es zu einem Punkt der Raumzeit keine geschlossene zeitartige Kurve gibt, heißt Chronologiebedingung.
- (ii.) Sei  $(M, g)$  eine Raumzeit. Die Menge aller Punkte der Raumzeit, die die Chronologiebedingung verletzen, heißt anchronologisch.

**Lemma 1:** Die anchronologische Menge einer Raumzeit  $M$  ist die disjunkte Vereinigung von Mengen der Form

$$\mathcal{I}^+(q) \cap \mathcal{I}^-(q), \quad q \in M.$$

**Lemma 2:** Ist  $M$  kompakt, so ist die anchronologische Menge nicht leer.

Für die Beweise der Lemmata siehe [9].

Dieses Resultat legt die Forderung an eine nichtkompakte Raumzeit nahe.<sup>1</sup>

**Definition:** Man sagt, daß in einer Raumzeit  $(M, g)$  die Kausalitätsbedingung erfüllt ist, wenn es keine nicht-raumartigen (also zeit- oder lichtartigen) geschlossenen Kurven gibt.

**Lemma 3:** Die Menge der Punkte in einer Raumzeit  $(M, g)$ , die die Kausalitätsbedingung nicht erfüllen, ist disjunkte Vereinigung von Mengen der Form

$$\mathcal{J}^-(q) \cap \mathcal{J}^+(q), \quad q \in M.$$

Genauer ist es sogar so, daß in physikalisch realistischen Modellen die Kausalitäts- und Chronologiebedingung äquivalent sind [9]. Dies ist nur ein kleiner Auszug aus der Diskussion<sup>2</sup> von Kausalität und den Bedingungen, die an die Raumzeiten gestellt werden können, um dieses Prinzip auf ihnen zu etablieren.<sup>3</sup> Das erste Kriterium für Kausalität, welches keine pathologischen Beispiele im klassischen Sinne zuläßt, ist das Kriterium der starken Kausalität.<sup>4</sup>

**Definition:** Sei  $(M, g)$  eine Raumzeit. Man sagt ein Punkt  $p \in M$  ist kausal stark oder erfüllt die starke Kausalitätsbedingung, wenn jede Umgebung  $V \ni p$  von  $p$  eine Umgebung  $U \subset V$  von  $p$  enthält, welche von keiner nicht-raumartigen Kurve mehr als einmal geschnitten wird.

Es gibt Beispiele für Räume, die zwar kausal stark sind, die aber bei noch so kleiner Variation der Metrik  $g$  kausal pathologische Phänomene erzeugen. Bild 1.1 zeigt ein solches Beispiel.

Denkt man nun an eine Quantenversion der Relativitätstheorie, so muß diese beim Übergang auf makroskopische Skalen in die spezielle Relativitätstheorie übergehen. Die auf natürliche Weise erhaltende Unschärferelation würde bedeuten, daß  $g$  keine exakten Werte annehmen kann, was für unser Beispiel zur Folge hat, daß selbst starke Kausalität nicht genügt, um physikalisch realistisch zu sein. Wir benötigen also einen Begriff wie *kausale Stabilität*, der uns garantiert, daß bei kleiner Variation an der Konsistenz unseres Modells nichts verlorengeht.

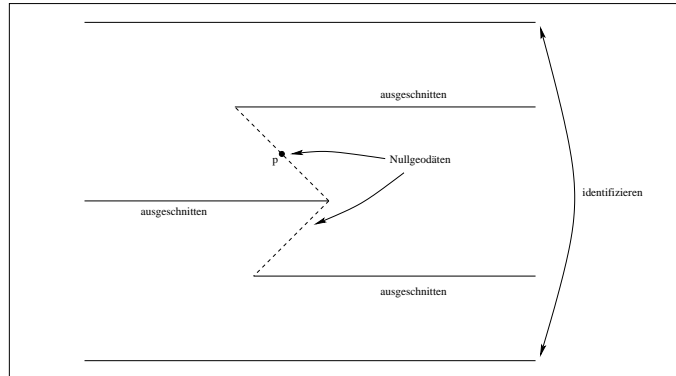
---

<sup>1</sup>Auch diese Forderung schränkt die Raumausswahl nicht ein. Betrachtet man kompakte Mannigfaltigkeiten, so ist es möglich, daß eine Überlagerung die Raumzeit darstellt, oder aber die kompakte Mannigfaltigkeit ein in sich verklebter, nicht kompakter Raum ist, der dann die Raumzeit darstellt.

<sup>2</sup>Eine weiterführende Erörterung findet man in [9]

<sup>3</sup>Es gibt eine ganze Hierarchie weiterer Forderungen, die allerdings allesamt pathologische Beispiele mitbringen, in denen die Kausalitätsbedingung verletzt ist.

<sup>4</sup>„Klassisch“ ist hier zu verstehen, als „nicht quantenmechanisch“. Solange wir an eine quantenmechanische Gravitationstheorie nicht denken ist starke Kausalität ausreichend.



**Bild 1.1:** In der Abbildung ist ein Raum zu sehen, der zwar kausal stark ist, aber geschlossene zeitartige Kurven zuläßt, sobald die Metrik auch nur ein wenig variiert wird.

Zu diesem Zwecke fixieren wir eine Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$  und führen auf dem Raum aller Lorentzmetriken die sogenannte " $C^0$ "-Topologie ein. Sie wird so konstruiert, daß eine kleine Umgebung um eine Metrik  $g$  alle Metriken beinhaltet, deren Funktionswerte nur bis zu einer vorgegebenen Schranke voneinander abweichen. Um konsistent an eine Darstellung zu binden, seien hier die nötigen Begriffe noch einmal definiert. Ich lehne mich hierbei an die Definition von Metriken auf topologischen Vektorraumbündeln an, wie sie in [10] steht.

**Definition:** Ist  $M$  eine  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit, so verstehen wir unter einer Lorentzmetrik für  $M$  einen stetigen Schnitt

$$s : M \mapsto (TM \otimes TM)^*,$$

so daß für jedes  $x \in M$  die dadurch gegebene Bilinearform

$$T_x M \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle_x$$

symmetrisch ist. Die Metrik heißt differenzierbar, wenn  $s$  als Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten differenzierbar ist. ( $\otimes$  bezeichnet die Whitney-Summe der Bündel).

Die Menge aller Lorentzmetriken auf  $M$  bezeichne  $L(M)$ . Sie nun  $U \subset (TM \otimes TM)^*$  eine offene Menge, so definiere:  $O(U) := \{s \in L(M) \mid s(M) \subset U\}$

**Definition:** In obiger Situation heißt diejenige Topologie auf  $L(M)$ , die

$$\mathcal{B} := \{O(U) \mid U \in \text{Top}(M)\}$$

als Basis besitzt,  $C^0$ -Topologie.

**Definition:** Sei  $(M, g)$  eine Raumzeit.  $M$  heißt kausal stabil, wenn es eine offene Umgebung  $U$  von  $g$  in der  $C^0$ -Topologie von  $L(M)$  gibt, s.d. für alle  $\eta \in U$  die resultierende Raumzeit  $(M, \eta)$  streng kausal ist.

**Lemma 4:** Eine Raumzeit  $(M, g)$  ist kausal stabil, wenn es eine Funktion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, deren Gradient überall zeitartig ist.

Für einen Beweis siehe [9].

**Definition:** Sei  $(M, g)$  eine Raumzeit. Diejenige Topologie auf  $M$ , die die Basis

$$\mathcal{B} := \{I^+(p) \cap I^-(q) \mid p, q \in M\}$$

besitzt, heißt Alexandrov Topologie.

Ist nun  $(M, g)$  kausal stabil, so gibt es zu jedem  $p \in M$  eine Kausalitätsumgebung  $U$ , s.d. die von  $M$  auf  $U$  induzierte Teilraumtopologie mit der Alexandrov Topologie auf  $U$  übereinstimmt. Damit sehen wir, daß die Alexandrov-Topologie von  $M$  die gleiche ist, die  $M$  selbst mitbringt, denn  $M$  kann mit solchen Kausalitätsumgebungen vollständig überdeckt werden.<sup>5</sup>

**Korollar:** Erfüllt eine Raumzeit  $(M, g)$  die starke Kausalitätsbedingung, so kann man die topologische Struktur der Raumzeit durch Beobachtung kausaler Zusammenhänge ermitteln.

### 1.3 Existenz von Cauchy-Hyperflächen

Schwieriger physikalisch zu motivieren ist die Forderung nach der Existenz von Cauchy-Hyperflächen. Gibt es eine solche, dann ist man in der Lage mit Hilfe der Daten auf einer solchen Fläche die Zukunft und Vergangenheit aller Ereignisse eindeutig zu bestimmen. Glaubt man an strengen Determinismus, so ist diese Forderung natürlich gerechtfertigt, falls nicht, kann man sie dadurch motivieren, daß physikalische Gesetze der klassischen Mechanik und auch Quantenmechanik einen solchen Determinismus gewissermaßen zulassen. Denkt man z.B. an klassische Systeme, so wird deren Dynamik durch gewöhnliche Differentialgleichungen bestimmt. Betrachtet man solche Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten, induzieren diese einen Fluß, dessen Flußlinien sich nicht scheiden dürfen.<sup>6</sup> Auf der Raumzeitmannigfaltigkeit sind solche Flußlinien gerade die Weltlinien von Teilchen, die eindeutig durch die Differentialgleichung

<sup>5</sup>Zu klären wäre hier noch, ob die Alexandrov-Topologie definierende Basis abzählbar ist.

<sup>6</sup>Für eine Einführung in dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten siehe z.B. Warner, "Foundations on differential geometry" oder in [10].

Der Fluß induziert Diffeomorphismen  $\Phi_t : D_t \longrightarrow D_{-t}$ . Diese sind insbesondere bijektiv, weswegen Integralkurven leeren Schnitt haben.

festgelegt sind.

**Definition:** Sei  $(M, g)$  eine Raumzeit und  $\Sigma \subset M$  eine Hyperfläche. Man nennt die Menge

$$D(\Sigma)^+ := \{p \in M \mid \Sigma \cap \mathcal{I}^+(p) \neq \emptyset\}$$

die kausale Zukunft von  $\Sigma$  und entsprechend

$$D(\Sigma)^- := \{q \in M \mid \Sigma \cap \mathcal{I}^-(q) \neq \emptyset\}$$

die kausale Vergangenheit von  $\Sigma$ .

$D(\Sigma)^+$  bezeichnet einfach alle Ereignisse, die von  $\Sigma$  beeinflußbar sind und  $D(\Sigma)^-$  alle Ereignisse, die  $\Sigma$  beeinflussen können. Kennt man nun alle Daten auf  $\Sigma$ , so auch alle auf  $D(\Sigma) := D(\Sigma)^+ \cup \Sigma \cup D(\Sigma)^-$ .

**Definition:** Sei  $(M, g)$  eine Raumzeit. Eine Hyperfläche  $\Sigma$  mit der Eigenschaft, daß

$$D(\Sigma) := D(\Sigma)^+ \cup \Sigma \cup D(\Sigma)^- = M,$$

heißt Cauchy-Hyperfläche.

**Lemma 5:** Sei  $(M, g)$  eine Raumzeit, in der es eine Cauchy Hyperfläche gibt, so gilt:

- (i.)  $(M, g)$  ist kausal stabil,
- (ii.) zeitlich orientierbar
- (iii.) und es existiert eine 3-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit  $N$ , so daß  $M \approx R \times N$ .

## 1.4 CPT-Invarianz

Die Raumzeitmannigfaltigkeit muß vollständig orientierbar sein, d.h. zeitlich und räumlich. Diese Tatsache läßt sich zum einen aus der CPT-Invarianz, zum anderen aus experimentellen Untersuchungen der letzten Jahrzehnte folgern, in denen Symmetrieverletzungen nachgewiesen wurden, aus denen man CT-Nichtinvarianz und CP-Nichtinvarianz folgert. Diese Nichtinvarianzen erlauben nun die Unterscheidung von Orientierungen räumlicher Art (durch CT) und zeitlicher Art (durch CP), wodurch die Raumzeitmannigfaltigkeit eine Orientierung erhält.



## 2 Kosmologische Modelle

Ein möglicher Zugang zur Herleitung kosmologischer Modelle läuft über die relativistische Hydrodynamik,<sup>7</sup> deren Ziel es ist, eine Theorie für die das Universum füllende Materie zu finden. Die Frage ist nun, warum dieser Ansatz ein kosmologisches Modell<sup>8</sup> liefern sollte. Das zugrundeliegende Prinzip ist die enge Kopplung der Geometrie der Raumzeit mit der sich in ihr befindenden Materieverteilung. Eine Differentialgleichung für die ideale Flüssigkeit zusammen mit den einsteinschen Feldgleichungen liefern dann ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem. Als Lösungen erhält man Metriken, die dann die Geometrie des Raumes bestimmen.

Die Bestimmung des Raumes und der Topologie ist der nächste Schritt und keineswegs trivial. Alleine die Einführung sollte gezeigt haben, daß durchaus nicht-triviale Überlegungen angestellt werden müssen zur Entwicklung vernünftiger Bedingungen, die ein Kandidat für die uns umgebende Raumzeit erfüllen muß, um in die engere Auswahl zu kommen. Allein die Frage nach einfachem Zusammenhang ist durchaus nicht eindeutig. Zu jedem mehrfach zusammenhängenden Raum gibt es eine einfach zusammenhängende Entsprechung, in der die gleiche Kinematik und Dynamik gelten. Heute glaubt man, daß unser Universum durch ein Friedmann-Lemaître-Modell korrekt beschrieben wird und die mehrfach zusammenhängenden Räume haben die meisten der Eigenschaften dieser Modelle. Wünschenswert wäre ein solches Modell wegen folgenden Vorteils: Diese Raumzeiten liefern bedingt durch ihre Topologie Informationen und Untersuchungsmöglichkeiten kosmologischer Parameter. Beispielsweise würde die Bestimmung der nichttrivialen Topologie das Vorzeichen der Krümmung eindeutig festlegen.

### 2.1 Friedmann-Lemaître Universen

Zwei Tatsachen motivieren als Modell der Galaxien ein ideales Gas anzunehmen, bei dem die Galaxien die Atome, die Galaxienhaufen die Moleküle sind:

1. Der Größenunterschied zwischen Universum und einer typischen Galaxie läßt es zu, die Galaxienausdehnung zu vernachlässigen.
2. Die einzige auf kosmischen Skalen relevante Kraft<sup>9</sup> ist die Gravitation. Die schwache und starke Kraft sind beide kurzreichweitig und die elektromagnetische spielt auf Skalen, die über eine Galaxis hinausgehen, keine Rolle.<sup>10</sup>

---

<sup>7</sup>Eine ausführliche Behandlung ist in [7] dargestellt. Hier wird nur ein Überblick gegeben

<sup>8</sup>Man muß sich darüber im Klaren sein, daß wir mit kosmologischem Modell nicht die Galaxienverteilung im Universum meinen, sondern ein Modell für die Raumzeit mit Metrik und topologischer Struktur.

<sup>9</sup>Kraft im klassischen Sinne. Seit der allgemeinen Relativitätstheorie kann man bei Gravitation nicht mehr von einer Kraft reden. Insofern ist die Bezeichnung "ideales Gas" im Rahmen dieser Theorie exakt, denn wir erhalten ein wechselwirkungsfreies Gas, dessen Bestandteile punktförmig sind.

<sup>10</sup>Wegen Ladungsneutralität

Der Energie-Impuls Tensor entspricht also dem einer idealen Flüssigkeit. Aus dem Energie-Impuls Tensor lassen sich Differentialgleichungen gewinnen, die mit den einsteinschen Feldgleichungen ergänzt werden und so ein gekoppeltes, unter gewissen vereinfachenden Annahmen lösbares Differentialgleichungssystem liefern.

Die etabliertesten Lösungen sind die homogenen und isotropen Friedmann-Lemaître-Universen. Diese fallen in drei Kategorien von Lösungen, nämlich denen mit negativer, keiner und positiver Krümmung. Die Raumzeit wird beschrieben durch die *Robertson-Walker*-Metrik:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) d\sigma^2,$$

wobei

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad S_k(\chi) = \begin{cases} \sinh\chi & \text{falls } k = -1 \\ \chi & \text{falls } k = 0 \\ \sin\chi & \text{falls } k = 1 \end{cases}.$$

$d\sigma^2$  ist Metrik einer dreidimensionalen, homogenen, riemannschen Mannigfaltigkeit<sup>11</sup>.

## 3 Klassifizierung

### 3.1 Kurzabriß: Algebraische Topologie

Hier soll ein kurzer Einblick in die algebraische Topologie gegeben werden, in dem die Methoden eingeführt werden sollen, mit denen Räume klassifiziert werden. Grundbaustein für eine solche Klassifizierung ist die Entwicklung von topologischen Invarianten, d.h. Charakteristika, die unter Homöomorphismen erhalten bleiben und die Geometrie des Raumes widerspiegeln.<sup>1213</sup>

#### 3.1.1 Homotopien

**Definition:** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume.

1. Eine Homotopie von Abbildungen ist eine stetige Abbildung

$$F : X \times I \longrightarrow X,$$

---

<sup>11</sup>Man beachte, daß hier offensichtlich  $M \approx \mathbb{R} \times N$ , wie in Teil (iii) von Lemma 5.

<sup>12</sup>Es würde den Rahmen sprengen, diese Methoden hier mit der Güte zu entwickeln, die für eine verlässliche Klassifizierung nötig sind. Eine mathematisch exakte Einführung in die hier eingeführten Begriffe findet man in [6].

<sup>13</sup>Das Verkleben topologischer Räume und Mannigfaltigkeiten soll gar nicht erörtert werden. Dieser Prozess ist sehr intuitiv und läuft immer über Bildung von Quotienten mittels passender Äquivalenzrelationen. Entweder man überlegt sich dies selbst, oder liest in [6] den Abschnitt über Quotientenräume und topologische Gruppen. Eine nicht besonders tiefgehende Einführung findet man auch in [13].

wobei  $I = [0, 1]$  bezeichnet. Zwei Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  heißen homotop, wenn es eine Homotopie  $F : X \times I \rightarrow Y$  gibt, s.d.  $F(\cdot, 0) = f$  und  $F(\cdot, 1) = g$ .

2. Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversen  $g$ , wenn es eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, s.d.  $g \circ f \approx \text{id}_X$  und  $f \circ g \approx \text{id}_Y$ , in Zeichen:  $X \approx Y$ .
3. Ein topologischer Raum heißt zusammenziehbar, wenn er homotopieäquivalent zu einem einpunktigen Raum ist.
4. Ist  $A \subset X$  eine Teilmenge, so heißt eine Homotopie  $F : X \times I \rightarrow Y$  relativ zu  $A$ , wenn für alle  $a \in A$  die Abbildung  $F(a, \cdot)$  konstant ist, in Zeichen:  $F(\cdot, 0) \approx F(\cdot, 1) \text{ rel } A$ .
5. (Konkatenation) Sind  $F : X \times I \rightarrow Y$  und  $G : X \times I \rightarrow Y$  zwei Homotopien mit der Eigenschaft, daß  $F(\cdot, 1) = G(\cdot, 0)$ , so definiert man mit  $F * G : X \times I \rightarrow Y$  eine Homotopie<sup>14</sup>.

$$(F * G) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{falls } t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{falls } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Lemma:** Homotopie von Abbildungen ist eine Äquivalenzrelation.

**Definition:** Seien  $X, Y$  topologische Räume gegeben.

1. Sind  $A \subset X, B \subset Y$  Teilmengen und betrachtet man Homotopien von Abbildungen  $F$ , s.d.  $F(A, t) \subset B$  für alle  $t \in I$ , so bezeichnet  $[X, A; Y, B]$  die Menge aller Äquivalenzklassen von Homotopien mit dieser Eigenschaft. Falls  $A = \emptyset$ , so schreibt man einfach  $[X, Y]$ .
2.  $[X; Y]_* := [X, \{x_0\}; Y, \{y_0\}]$
3.  $SX := (X \times I) / (\{x_0\} \times I \cup X \times \partial I)$ <sup>151617</sup>

**Definition:** Sei  $(Y, y_0)$  ein punktierter topologischer Raum, so definiert man die  $n$ -te Homotopiegruppe als

$$\pi_n(Y, y_0) := [S^n, \mathbb{R}^n]_*.$$
<sup>18</sup>

<sup>14</sup>Bemerkung: Das Homotopieinverse wird definiert über  $F^{-1} := F \circ \text{id}_X \times (1 - t)$

<sup>15</sup>Man definiert eine Verknüpfung auf  $[SX; Y]$  durch folgende Tatsache: Zwei punktierte Abbildungen  $SX \rightarrow Y$  induzieren Homotopien, deren Konkatenation ebenfalls von einer punktierten Abbildung induziert wird. Diese ist das Produkt  $(*)$  der ursprünglichen Abbildungen.

<sup>16</sup>Auf  $[SX; Y]_*$  entsteht dann in kanonischer Weise vermittle  $[f] \cdot [g] := [f * g]$  eine Multiplikation.

<sup>17</sup> $\epsilon : [X \times I, \{x_0\} \times I \cup X \times \partial I; Y, \{y_0\}] \rightarrow [SX; Y]_*$ ,  $f \mapsto f \circ \pi$  ist eine Bijektion.

<sup>18</sup>Diese Menge trägt tatsächlich eine Gruppenstruktur. Man beachte, daß mit  $S^0 := \{0, 1\}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, daß  $S^n = SS^{n-1}$

Das Konzept der ersten Fundamentalgruppe sollte jedem spätestens seit dem dritten bzw. fünften Semester aus der Vorlesung Funktionentheorie vertraut sein und soll hier zur Veranschaulichung rein heuristisch diskutiert werden:

Im Zentrum der Betrachtungen liegen geschlossene Kurven bezüglich eines Basispunktes, wobei zwei Kurven als homotop zueinander bezeichnet werden, wenn sie stetig ineinander deformierbar sind.<sup>19</sup> Folgt man obigen Konstruktionen, so erhält man auf der Menge der Äquivalenzklassen von geschlossenen Kurven eine Gruppenstruktur. Diese Gruppen werden nun benutzt, um Homöomorphien auszuschließen oder untermauernde Hinweise für sie zu finden.

Die topologische Struktur zweier Räume hat nichts mit dem Aussehen im strengen Sinne zu tun:

Nehme ich ein großes, kugelförmiges Stück Knetgummi und forme einen Elefanten, ohne dabei Teilstücke auseinanderzureißen, dann ist plausibel, daß das Endergebnis zu meiner anfänglichen Kugel homöomorph ist<sup>20</sup>. Stellt man sich nun mit einem Edding vor einen solchen Vierbeiner und zeichnet geschlossene Kurven bezüglich eines festen Punktes auf seine Haut, dann ist man in der Lage, diese Kurven stetig auf einen Punkt zusammenzuziehen. Man mag es mit dem Auge nicht fassen, daß sie homöomorph sind, aber aus Sicht der Fundamentalgruppe gibt es keinen Hinderungsgrund. Nehme ich allerdings einen Finger und bohre ein Loch durch meine Kugel oder den Elefanten, dann sind die Fundamentalgruppen offensichtlich nicht gleich. Ich male eine Kurve um das Loch herum und verzweifle bei dem Versuch des Zusammenziehens.<sup>21</sup> An diesem Beispiel werden folgende Eigenschaften klar:

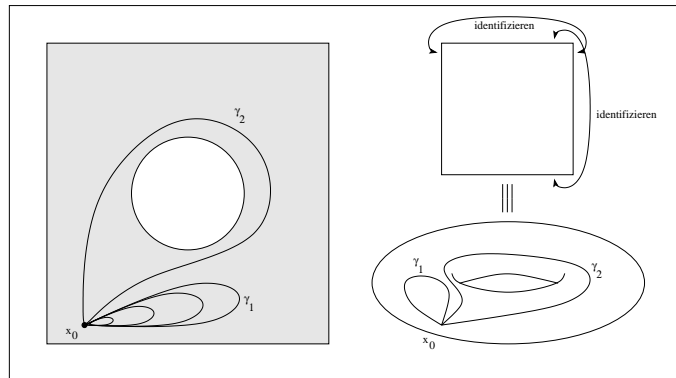
1. Die Fundamentalgruppe ist eine topologische Invariante, denn ein Homöomorphismus zwischen zwei topologischen Räumen induziert einen Gruppenisomorphismus der Fundamentalgruppen.<sup>22</sup>
2. Die Isomorphie der Gruppen ist eine notwendige Bedingung.

<sup>19</sup>Im linken Bild von Bild 3.1.1.1 ist bei  $\gamma_1$  so etwas angedeutet. Sie ist homotop zum konstanten Weg in  $x_0$ .

<sup>20</sup>Man stelle sich die formenden Finger als Wirkung meines Homöomorphismus vor. Das Verbot herumzureißen garantiert stetige Deformationen und die Aktionen sind stetig umkehrbar.

<sup>21</sup>Bild 3.1.1.1 zeigt eine solche Situation. Die Kurve  $\gamma_2$  kann man nicht zusammenziehen, ohne über das Loch zu laufen.

<sup>22</sup> $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  Homöomorphismus, so ist  $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ,  $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$  ein Gruppenisomorphismus.



**Abb. 3.1.1.1:** (links) Die Kurve  $\gamma_1$  ist -wie angedeutet- zusammenziehbar.  $\gamma_2$  hingegen nicht, denn das Loch stört.

### 3.1.2 Die Universelle Überlagerung

**Definition:** Eine Abbildung  $p : X \rightarrow Y$  heißt eine Überlagerungsabbildung ( $X$  heißt eine Überlagerung von  $Y$ ), wenn  $X$  und  $Y$  hausdorffsch, wegweise zusammenhängend, lokal wegweise zusammenhängend sind und jeder Punkt  $y \in Y$  eine wegweise zusammenhängende Umgebung  $U$  besitzt, so daß  $p^{-1}(U)$  nichtleere, disjunkte Vereinigung von Mengen  $U_\alpha$  ist, die folgende Eigenschaft besitzen:  $p|_{U_\alpha}$  ist ein Homöomorphismus  $U_\alpha \xrightarrow{\cong} U$ .

An dieser Stelle sollen die für uns relevanten Eigenschaften einer Überlagerung festgehalten werden:

1.  $p : X \rightarrow Y$  eine Überlagerung, so existiert ein Monomorphismus

$$p_\# : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Im( $p_\#$ ) besteht aus allen Äquivalenzklassen von Kurven mit Basispunkt  $y_0$ , die einen Lift nach  $X$  mit Basispunkt  $x_0$  besitzen.

2. Seien  $p_i : W_i \rightarrow Y$ ,  $i=1,2$ , Überlagerungsabbildungen, s.d.  $W_1$  und  $W_2$  einfach zusammenhängend sind. Gibt es  $w_i \in W_i$ , so daß  $p_1(w_1) = p_2(w_2)$ , dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homöomorphismus  $g : W_1 \rightarrow W_2$ , so daß  $p_2 \circ g = p_1$  und  $g(w_1) = w_2$ .

Aufgrund letzter Eigenschaft definiert man:

**Definition:** Ist  $p : X \rightarrow Y$  eine Überlagerungsabbildung und  $X$  einfach zusammenhängend, dann heißt die Überlagerung universell.

**Definition:** Ein Raum  $X$  heißt semilokal 1-zusammenhängend bzw. lokal relativ einfach zusammenhängend, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  besitzt, so daß jede geschlossene Kurve in  $U$  homotop trivial in  $X$  ist.

1.  $p : X \rightarrow Y$  eine Überlagerungsabbildung, so ist die Blätterzahl der Überlagerung gleich dem Index  $[\pi_1(Y, y_0) : p_*\pi_1(X, x_0)]$ .
2.  $p : X \rightarrow Y$  eine Überlagerungsabbildung. Die Blätterzahl der Überlagerung stimmt mit der Gruppenordnung der Fundamentalgruppe überein.<sup>23</sup>
3. Ist  $Y$  wegweise zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend, so gilt:  
 $Y$  besitzt eine einfach zusammenhängende Überlagerung  $\Leftrightarrow Y$  ist lokal relativ einfach zusammenhängend.

**Satz:** Jede vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  mit konstanter Krümmung ist global isometrisch zu  $\mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$  oder  $\mathbb{H}^n$ .<sup>24</sup>

Eine Überlagerung kann man sich vorstellen als topologischen Split des Basisraumes in Wegzusammenhangskomponenten. Kurven im Basisraum kann man in die Überlagerung hochziehen<sup>25</sup>

### 3.1.3 Die Decktransformationsgruppe

**Definition:** Sei  $p : X \rightarrow Y$  eine Überlagerungsabbildung. Ein Homöomorphismus  $D : X \rightarrow X$ , welcher die Identität überlagert, d.h.  $p \circ D = p$ , heißt Decktransformation (oder auch Automorphismus der Überlagerung).

Natürlich formen die Decktransformationen eine Gruppe, die mit  $\Delta$  bezeichnet wird.

1. Die Abbildung

$$\Theta : N(J_{x_0}) \rightarrow \Delta$$

ist ein Epimorphismus mit Kern  $J_{x_0}$ . Damit folgt

$$\Delta \approx N(p_*\pi_1(X, x_0))/p_*\pi_1(X, x_0)^{26}.$$

---

<sup>23</sup>Seien  $G := \pi_1(Y, y_0)$ ,  $F := p^{-1}(y_0)$ , so definiere eine Gruppenwirkung  $F \times G \rightarrow F$  durch folgende Konstruktion: Für  $x \in F$ ,  $\alpha \in G$  betrachte einen Repräsentanten  $f : I \rightarrow Y$  und lifte sie zu einer Kurve in  $X$  mit  $g(0) = x$ , dann ist  $x \cdot \alpha := g(1)$ .

So erhält man eine Bijektion

$$p_*\pi_1(X, x_0) \backslash \pi_1(Y, p(x_0)) \rightarrow p^{-1}(y_0)$$

(siehe hierzu [6], Kapitel 5).

<sup>24</sup>Dies sind die Standardräume konstanter Krümmung, d.h. (in Reihenfolge) flach, sphärisch, hyperbolisch.

<sup>25</sup>Das ist nicht schwer einzusehen. Man zieht mit der Abbildung  $p$  hoch in die Überlagerung, wobei man nur Teilstücke hochziehen kann. Diese Teilstücke müssen ganz in einem der  $U_\alpha$  liegen. Das man das so tun kann liefert dann das Lemma von Lesbegue (Lesbeguezahl der Überdeckung).

<sup>26</sup>Sei  $H \subset G$  eine Untergruppe, so definiert man

$$N(H) := \{n \in G \mid nHn^{-1} = H\}$$

2. Ist die Überlagerungsabbildung  $p : X \rightarrow Y$  regulär, dann

$$\Delta \approx \pi_1(Y, y_0) / p_* \pi_1(X, x_0)$$

3. Ist  $p : X \rightarrow Y$  eine Überlagerungsabbildung und  $X$  einfach zusammenhängend, so gilt

$$\Delta \approx \pi_1(X, x_0).$$

**Definition:** Die Aktion einer Gruppe  $G$  auf einem Raum  $X$  nennt man eigentlich unstetig, wenn zu jedem  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  existiert, so daß gilt:  $gU \cap U \neq \emptyset \Rightarrow g = e$ .

Die Gruppe der Decktransformationen operiert auf diese Weise auf  $X$ .

1. Operiert  $G$  eigentlich unstetig auf einem wegweise zusammenhängenden und lokal wegweise zusammenhängenden Hausdorffraum  $X$ , so ist  $p : X \rightarrow X/G$  eine reguläre Überlagerungsabbildung mit Transformationsgruppe  $\Delta = G$ .
2. Ist  $X$  einfach zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend und  $G$  eine auf  $X$  eigentlich unstetig operierende Gruppe, dann gilt  $\pi_1(X/G) \approx G$ .

### 3.1.4 Methode zur Klassifizierung

Das Verfahren zur Bestimmung der Klasse einer Mannigfaltigkeit ist das Folgende:

1. Bestimme die universelle Überlagerung  $\tilde{M}$ .
2. Bestimme die Decktransmutationsgruppe.

Wir wissen nun, daß sich die Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung als Quotient von universeller Überlagerung modulo einer Untergruppe der jeweiligen Symmetriegruppe ergibt, wobei zusätzlich jede vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit einen der Standardräume  $\mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$  oder  $\mathbb{H}^n$  als universelle Überlagerung besitzt. Die Mannigfaltigkeiten ergeben sich dann als Quotient der Überlagerung  $\tilde{M}$  mit der Decktransmutationsgruppe  $\Gamma$ .

## 3.2 Klassifizierung Riemannscher Räume

Nach der etwas genaueren Einführung in die relevanten Termini der algebraischen Topologie, nach denen wir nun dreidimensionale riemannsche Mannigfaltigkeiten klassifizieren wollen<sup>27</sup>, sollen hier die Ergebnisse dieser Prozedur aufgelistet werden. Eine ausführlichere Erörterung findet man in den Kapiteln 6, 7, 8 von [5] oder in den dort angegebenen Referenzen.

<sup>27</sup>Zweidimensionale riemannsche Mannigfaltigkeiten sind in [5] behandelt.

Ein vierdimensionaler Raum besitzt eine Isometriegruppe der Dimension  $\dim(G) \leq 10$ . In einem physikalischen Modell sind die Fälle  $6 < \dim(G) \leq 10$  allerdings nicht realistisch. Die Betrachtungen reduzieren sich also auf vierdimensionale Isometriegruppen. Der Fall, daß  $G$  auf der gesamten Mannigfaltigkeit einfach transitiv operiert, ist ebenfalls nicht realistisch, denn solche Modelle sind statisch, widersprechen also der kosmischen Expansion.

Übrig bleibt nur noch der Fall, in dem  $G$  auf raumartigen Hyperflächen einfach transitiv operiert. Das ist genau unsere Situation. Wegen der Forderung nach Existenz von Cauchy-Hyperflächen genügt es  $N$  (siehe Lemma 5) mit der Gruppe  $G$  zu bestimmen<sup>28</sup>.

**Situation:** Betrachtet werden dreidimensionale riemannsche Mannigfaltigkeiten mit einer zumindest dreidimensionalen, auf  $M$  einfach transitiv operierenden Isometriegruppe  $G$ . Im folgenden bezeichnet  $\widetilde{M}$  die universelle Überlagerung von  $M$ <sup>29</sup>.

### 3.2.1 Euklidische Räume

$\widetilde{M} = \mathbb{R}^3$ , Isometriegruppe  $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ <sup>30</sup>.

Das Linienelement der universellen Überlagerung  $\mathbb{R}^3$  lautet:

$$d\sigma^2 = R^2 [d\chi^2 + \chi^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2)]$$

Die Isometriegruppe enthält -wie man sich leicht überlegt- Drehungen, Translationen und Drehtranslationen. Es gibt 18 verschiedene Mannigfaltigkeiten, die von Untergruppen der Isometriegruppe erzeugt werden. Relevant sind dabei nicht alle, denn solche, deren Decktransformationsgruppe eine Drehspiegelung enthält, sind nicht orientierbar.

- Nicht kompakte Räume:

1. Typ  $\varepsilon$ :  $\Gamma = \{1\}$ , d.h.  $M \equiv \mathbb{R}^3$ .
2. Typ  $\mathcal{J}_\Theta$ :  $\Gamma$  wird von einer Drehtranslation erzeugt.
3. Typ  $\mathcal{T}_1$ :  $\Gamma$  wird von zwei unabhängigen Translationen erzeugt.
4. Typ  $\mathcal{K}_1$ :  $\Gamma$  beinhaltet eine Translation und eine Drehtranslation, wobei die Drehung orthogonal zur Bewegungsrichtung der Translation mit Drehwinkel  $\pi$  erfolgt.

- Kompakte Räume:

Die kompakten Fälle entstehen dadurch, daß man Flächen von Polyedern

---

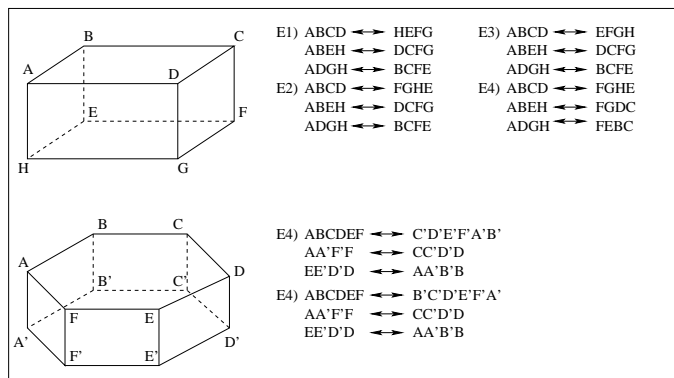
<sup>28</sup>Man kann hier noch nach den möglichen Dimensionen von  $G$  aufteilen.  $\dim(G) = 3$  wurden von Bianchi klassifiziert,  $\dim(G) = 4$  von Kantowski und Sachs,  $\dim(G) = 6$  sind die Friedmann-Modelle.

<sup>29</sup>Man beachte dabei  $M = \widetilde{M}/\Gamma$ .

<sup>30</sup>Räume ohne irgendwelche Krümmung



miteinander verklebt.



**Abb. 3.2.1.1:** Sechs euklidische, geschlossene, orientierte, dreidimensionale Räume.

- $E_1$  : Identifiziere gegenüberliegende Seiten mittels einer Translation.
- $E_2$  : Identifiziere gegenüberliegende Seiten. Ein paar um Winkel  $\pi$  verdreht.
- $E_3$  : Identifiziere gegenüberliegende Seiten. Ein paar um Winkel  $\frac{\pi}{2}$  verdreht.
- $E_4$  : Identifiziere gegenüberliegende Seiten. Alle Paare um den Winkel  $\pi$  verdreht.
- $E_5$  : Identifiziere gegenüberliegende Seiten. Die Deckfläche wird um den Winkel  $\frac{2\pi}{3}$  verdreht.
- $E_6$  : Identifiziere gegenüberliegende Seiten. Die Deckfläche wird um den Winkel  $\frac{\pi}{3}$  verdreht.

### 3.2.2 Sphärische Räume

$\widetilde{M} = \mathbb{S}^3$ , Isometriegruppe  $SO(4)$ <sup>31</sup>.

Das Linienelement der universellen Überlagerung  $\mathbb{S}^3$  lautet:

$$d\sigma^2 = R^2 [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2)]$$

<sup>31</sup>Räume mit konstant positiver Krümmung.

Dabei bezeichnet  $R$  den Radius der Sphäre und  $(\chi, \Theta, \phi)$  die drei Winkel mit deren Hilfe auf der  $\mathbb{S}^3$  Koordinaten eingeführt werden. Das Volumen beträgt

$$\text{vol}(\mathbb{S}^3) = \int_0^\pi 4\pi R^2 \sin^2 \chi R d\chi = 2\pi^2 R^3.^{32}$$

Homogene sphärische Räume entstehen durch Identifikation folgender Untergruppen in der Isometriegruppe:

- Die freie zyklische Gruppe
- Die Diedergruppe
- Die Polyedergruppen des Tetra-, Okta- und Ikosaeders<sup>3334</sup>

### 3.2.3 Hyperbolische Räume

$\widetilde{M} = \mathbb{H}^3$ , Isometriegruppe  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ <sup>35</sup>.

Das Linienelement des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes lautet:

$$d\sigma^2 = R^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\phi^2)]^{36},$$

dabei wurden folgende Koordinaten  $(\chi, \Theta, \phi)$  eingeführt:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cosh \chi \\ x_2 &= R \sinh \chi \cos \Theta \\ x_3 &= R \sinh \chi \sin \Theta \cos \phi \\ x_4 &= R \sinh \chi \sin \Theta \sin \phi \end{aligned}$$

Der  $\mathbb{H}^3$  ist nicht einfach zu handhaben, da er nicht in den  $\mathbb{R}^4$  eingebettet werden kann. Man verwendet häufig Einbettungen in andere Räume, um einen Zugang zu finden, hierfür siehe [5]. Endliche Untergruppen der Isometriegruppe werden in [12] behandelt.

---

<sup>32</sup>Mittels der Koordinatentransformation  $r := \sin \chi$  verändert sich die Metrik in eine Robertson-Walker-Form:

$$d\sigma^2 = R^2 \left( \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\phi^2) \right)$$

<sup>33</sup>Die Gruppen findet man beschrieben in [11]

<sup>34</sup>Für Interessierte soll hier noch bemerkt werden, daß das Volumen der Mannigfaltigkeiten folgendes ist:

$$\text{vol}(M/\Gamma) = 2\pi^2 \cdot \frac{R^3}{\#\Gamma}.$$

In [5] sind als Beispiele für sphärische 3-Mannigfaltigkeiten der projektive Raum, Linsenräume und ein Diederraum behandelt.

<sup>35</sup>Räume mit konstant negativer Krümmung.

<sup>36</sup>Die Robertson-Walker Form der Metrik wird erzeugt durch eine Koordinatentransformation  $r = \sinh \chi$ , sie lautet

$$d\sigma^2 = R^2 \left( \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right)$$

### 3.2.4 "Gemischte" Räume

37

1.  $\widetilde{M} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , mit Isometriegruppe  $SO(3) \times \mathbb{R}$ .

Metrik:

$$d\sigma^2 = dr^2 + \sin^2 r d\phi^2 + dz^2$$

2.  $\widetilde{M} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , mit Isometriegruppe  $PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ .

Metrik:

$$d\sigma^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\phi^2 + dz^2$$

3.  $\widetilde{M} = \widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ , mit Isometriegruppe  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Metrik:

$$d\sigma^2 = dx^2 + \cosh^2 x dy^2 + (dz + \sinh x dy)^2$$

## 4 Probleme des Modells und der Poincaré-Oktaederraum

Unser Augenmerk wollen wir an dieser Stelle einem besonderen Problem des etablierten Modells richten. Das etablierte Modell für die Raumzeit ist ein flacher unendlich großer Raum. Beobachtungen der kosmischen Hintergrundstrahlung zeigen einen Energieeinbruch ab einem Beobachtungswinkel von etwa 60 Grad. Dies impliziert die Existenz einer oberen Grenze für Wellenlängen der Hintergrundstrahlung, was insofern zu Schwierigkeiten führt, als daß damit eine charakteristische Länge in einem sonst skalierungsinvarianten Raum ermittelt ist. Die Idee von Lachièze und Luminet ist, nun eine nicht einfache, sondern mehrfach zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeit anzunehmen.

In einem mehrfach zusammenhängenden Raum ist "der Raum des Beobachters" die universelle Überlagerung der Mannigfaltigkeit (genauer gesagt ein Blatt der Überlagerung). Ein solches Blatt besitzt einen endlichen Durchmesser, weswegen die Wellenlängen der Hintergrundstrahlung eine obere Grenze besitzen, nämlich den Raumdurchmesser. Die Frage ist nun, ob ein den sonstigen Anforderungen wie z.B. Unendlichkeit oder Homogenität gerecht werdendes Objekt obiger Art auffindbar ist. Der Vorschlag von Lachièze und Luminet ist nun die sog. Poincarésche-Dodekaedermannigfaltigkeit anzunehmen. Sie entsteht durch Verkleben gegenüberliegender Seiten eines Dodekaeders nach Drehen der zu verklebenden Fläche um einen Winkel  $\frac{\pi}{5}$  im Uhrzeigersinn<sup>38</sup>. Die Motivation dazu, ein mehrfach zusammenhängendes Modell für die Raumzeit anzunehmen,

<sup>37</sup>Es bleiben noch übrig  $\widetilde{M} = Nil$ , oder  $\widetilde{M} = Sol$ , siehe hierfür [5]. Eine ausführliche Behandlung von 2. findet man in

Scott, P. 1983, Bull. London Math. Soc. 15,401,

wo auch Informationen zu den Isometriegruppen von *Sol* und *Nil* stehen.

<sup>38</sup>Dieses Dodekaeder stellt ein Blatt der universellen Überlagerung dar. Der Beobachter lebt also "im Dodekaeder" (genauso, wie alle anderen kosmischen Objekte), wobei dieser wegen der

begründen sie neben den Vorteilen<sup>39</sup> vor allem mit aktuellen Bemühungen und Entwicklungen in der Quantengravitation und Quantenkosmologie, wo mehrfach zusammenhängende Räume bevorzugt werden und die topologischen Fragestellungen eine wesentliche höhere Bedeutung gewinnen.<sup>40</sup> Im Speziellen fiel die Wahl gerade auf diese Mannigfaltigkeit, weil sie homogen, isotrop ist und das Energieloch in der Hintergrundstrahlung füllt<sup>41</sup>.

## 4.1 Experimentelle Tests

Experimentelle Tests ergeben sich aus mehreren Richtungen. Wenn es im allgemeinen um die Frage nach dem Zusammenhang geht, ist die Suche nach "ghosts" ein guter Ansatz. Findet man solche Bilder nicht, dann ist dies kein zwingender Beweis gegen mehrfachen Zusammenhang, allerdings wäre das Auffinden solcher Geister ein zwingendes Indiz dafür.

Aufgrund einer Arbeit von Cornish<sup>42</sup>, ergibt sich ein weiterer experimenteller Test. Er fand heraus, daß unabhängig von der Komplexität der Topologie in einem solchen Raum, stets Ringe gleicher Temperaturschwankungen in der Hintergrundstrahlung zu finden sind. Nach diesen zu suchen -deren Entdeckung liegt innerhalb der Empfindlichkeit moderner Geräte- bietet ein vernünftiges Verifikationsmittel.

Geht es im Speziellen um die Frage nach der Wahl der Mannigfaltigkeit werden zukünftige Beobachtungen automatisch Hinweise für die Richtigkeit oder Falschheit liefern. Bei Annahme des oben genannten Raumes ergibt sich für  $\Omega_0$  ein Wert von etwa

$$\Omega_0 \approx 1.013.^{43}$$

Dieser vorhergesagte Wert liegt innerhalb des aktuell bestimmten Wertes von  $(1.02 \pm 0.02)$ . Sollten genauere Messungen in Zukunft einen Wert oberhalb von 1.01 liefern, wäre dies ein starker Hinweis für die Raumwahl, wohingegen eine

---

Verklebung keine Ecken oder Kanten sieht. Vielmehr wird die Möglichkeit von "ghost images" wahrscheinlich. Dies sind zusätzliche Bilder eines Ereignisses, die ein Beobachter wahrnehmen kann. Diese entstehen dadurch, daß ein Lichtstrahl entlang einer Nullgeodäten einmal das Universum umläuft und dann erst zum Beobachter gelangt (siehe dazu [5]). Auf diese Weise entstünden Mehrfachbilder ein und desselben Ereignisses mit unterschiedlichen Rotverschiebungen. Daraus könnte sich ein experimenteller Test für mehrfach zusammenhängende Räume ergeben. Allerdings ist ein Mißerfolg in der Suche nach "Geistern" kein zwingender Hinweis gegen diese Modelle. Es kann einfach sein, daß das Licht bisher nicht genug Zeit hatte, das Universum einmal komplett zu umlaufen (was für Geister notwendig ist).

<sup>39</sup>Ein paar davon habe ich erwähnt. Die Topologie kann zusätzliche Informationen über kosmologische Parameter liefern

<sup>40</sup>Außerdem verfällt in solchen Modellen das Randwertproblem im Unendlichen.

<sup>41</sup>In [2] wird ein Berechnungsverfahren für die Harmonischen eines mehrfach zusammenhängenden Raumes entwickelt. Diese werden dann berechnet. Das Energieloch im Quasidrupolmoment schließt sich den Berechnungen zur Folge sehr gut (siehe dafür [2],[3]).

<sup>42</sup>Cornish,N.;Spiegel,D.;Starkman,G.: G.Class.Quant.Grav.15, 2657-2670 (1998)

<sup>43</sup>Dieser Wert ergab sich aus Berechnungen der Harmonischen dieses Raumes. Bei einem Wert von  $1.012 < \Omega < 1.013$  füllen die Harmonischen des Raumes die Lücken der Hintergrundstrahlung am besten.

Bestimmung unterhalb von 1.01 stark gegen die Raumwahl spräche.<sup>44</sup>

---

<sup>44</sup>Ein alternativer Erklärungsversuch -auf den nicht eingegangen wurde- bezieht sich auf die frühe Entwicklungsphase des Universums. Mit Hilfe einer Raumzeit-Unschärferelation und Prinzipien aus der Stringtheorie wird hier der Begriff der "nicht-kommutativen Expansion" entwickelt.

## 5 Literatur

[1]	Tsuyikawa, S.; Maartens, R.; Brandenberger: <a href="http://arxiv.org/astro-ph/0308169">http://arxiv.org/astro-ph/0308169</a>
[2]	Riazuelo, A.; Uzan, J.P.; Lehencq, R.; Weeks,J.: <a href="http://arxiv.org/astro-ph/0303580">http://arxiv.org/astro-ph/0303580</a>
[3]	Riazuelo, A.; Uzan, J.P.; Lehencq, R.; Weeks,J.: <a href="http://arxiv.org/astro-ph/0212223">http://arxiv.org/astro-ph/0212223</a>
[4]	Luminet, J.P.; Weeks, J.R.; Riazuelo,A.; Lehoucq, R.; Uzan, J.P.: Nature <b>425</b> , 593-595
[5]	Lachieze-Rey, M.; Luminet, J.P.: "Cosmic Topology" Phys. Rev. ...
[6]	Bredon, G.E.; "Topology and Geometry", Springer-Verlag
[7]	Sexl, Urbantke; "Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie", Springer-Verlag
[8]	Goenner,H.; "Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie", Springer-Verlag
[9]	Hawking, S.W., Ellis, G.F.R.: "The large scale structure of spacetime", Cambridge University Press
[10]	Bröcker, Jänich: "Einführung in die Differentialtopologie", Springer-Verlag
[11]	Bosch, S.: "Algebra", Springer-Verlag
[12]	Beardon, A.F.: "The Geometry of Discrete Groups", Springer-Verlag
[13]	Jänich, K.: "Topologie", Springer-Verlag