

1. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Wintersemester 2004/2005

Abgabe: 27.10.2004

Aufgabe 1 (6 Punkte): *Uhren*

Zwei Atomuhren werden in zwei Verkehrsflugzeugen in östlicher bzw. westlicher Richtung einmal um die Erde transportiert. Berechnen Sie die jeweiligen Gangunterschiede, welche die Uhren bezüglich einer auf der Erde zurückgebliebenen Uhr nach der Rückkehr aufweisen. Nehmen Sie dazu der Einfachheit halber an, daß die Flugzeuge über dem Äquator fliegen, wo die Geschwindigkeit der Erdrotation $v_E \approx 1667$ km/h beträgt, und setzen Sie eine durchschnittliche Reisegeschwindigkeit von $v_F \approx 800$ km/h sowie eine mittlere Flughöhe von 10 km an.

Hinweis: Beachten Sie den separaten Beitrag von Gravitationseffekt und Geschwindigkeitseffekt.

Aufgabe 2 (10 Punkte): *Beschleunigte Bezugssysteme*

1. Rechtfertigen Sie, dass die Transformation

$$\begin{aligned}t &= \frac{c}{g} \sinh(gt'/c) + \frac{x'}{c} \sinh(gt'/c), \\x &= \frac{c^2}{g} [\cosh(gt'/c) - 1] + x' \cosh(gt'/c), \\y &= y', \\z &= z',\end{aligned}$$

ein frei fallendes Bezugssystem beschreibt, indem sie den nicht-relativistischen Grenzfal (kleine Fallgeschwindigkeiten, $gt' \ll c$) betrachten. Berechnen Sie die Komponenten der Metrik bezüglich des Systems (t', x', y', z') .

2. Betrachten Sie ein gemäß Teil 1 in x -Richtung frei fallendes Bezugssystem. Darin werde ein Photon in der Höhe x_1 von einer Quelle emittiert und in der Höhe x_2 absorbiert. Berechnen Sie die Frequenzverschiebung gegenüber einem unbeschleunigten Bezugssystem mit $g = 0$. Führen Sie eine Näherung bis zur ersten Ordnung in gx'/c^2 durch.

3. Ein Photon „fällt“ in einem homogenen Gravitationsfeld $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_x$ eine Strecke Δx entlang \mathbf{e}_x hinab. Benutzen Sie nun die Äquivalenz von Masse und Energie (Planck-Einstein-Beziehung) und die aus der Newton'schen Gravitationstheorie bekannte Formel für die potentielle Energie, um die Frequenzverschiebung herzuleiten. Diskutieren

Sie die Ergebnisse im Hinblick auf das Äquivalenzprinzip.

4. Im Jahre 1960 gelang *R. V. Pound* und *G. A. Rebka* der Nachweis der „gravitativen Rotverschiebung“. Machen Sie sich anhand des Artikels 1) mit dem Experiment d. h. Nachweismethode, Versuchsaufbau und Größenordnungen, vertraut.

Literaturvorschläge:

- 1) R. V. Pound, G. A. Rebka, Apparent weight of photons, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 337-341 (1960).
- 2) H. Goenner, *Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie* (Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1996).
- 2) H. Wegener, *Der Mössbauer-Effekt und seine Anwendung in Physik und Chemie* (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1966).

5. Gegeben sei ein Minkowski'sches Koordinatensystem $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$. Betrachten Sie die neuen Koordinaten

$$\begin{aligned}x^{0'} &= x^0, \\x^{1'} &= x^1 \cos\left(\frac{\omega}{c} x^0\right) + x^2 \sin\left(\frac{\omega}{c} x^0\right), \\x^{2'} &= -x^1 \sin\left(\frac{\omega}{c} x^0\right) + x^2 \cos\left(\frac{\omega}{c} x^0\right), \\x^{3'} &= x^3.\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Komponenten $g_{i'j'}$ der Metrik in den neuen Koordinaten.

6. Machen Sie sich anhand des beigegebenen Artikels von Hay et al.¹ mit dem darin beschriebenen Experiment vertraut. Wenden Sie die Ergebnisse aus den vorangegangenen Aufgabenteilen auf die Situation des Experiments an. Leiten Sie die im Artikel erwähnte Frequenzverschiebung ab (Sie können zur Vereinfachung annehmen, dass die Quelle im Ursprung rotiert, also $R_2 = 0$ gilt).

Aufgabe 3 (4 Punkte): *Rindler-Koordinaten*

Zeigen Sie, daß der durch die zweidimensionale Metrik

$$ds^2 = v^2 du^2 - dv^2$$

beschriebene Raum ein Teil des zweidimensionalen Minkowski-Raums ist, der üblicherweise durch $ds^2 = dt^2 - dx^2$ dargestellt wird, und geben Sie eine anschauliche Interpretation dieser Koordinaten.

¹H. J. Hay, J. P. Schiffer, T. E. Cranshaw, P. A. Egelstaff, Measurement of the red shift in an accelerated system using the Mössbauer effect in Fe⁵⁷, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 165-166 (1960).