Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber, Christian Heinicke

16.11.2004

5. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Wintersemester 2004/2005

Abgabe: 23.11.2004

Aufgabe 12 (6 Punkte): *Zur Zerlegung der Krümmung*

a) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass die in der Vorlesung eingeführten Tensoren E_{ijkl} und S_{ijkl} dieselben Symmetrien wie der Riemannsche Krümmungstensor haben.

b) Rechnen Sie nach, dass $E^{i}{}_{j}{}^{j}{}_{i} = 0$ gilt, und dass daraus und den Symmetrien aus Teil a) folgt, dass $E_{ijkl} = 0$ für $n = 2$ gilt.

c) Rechnen Sie ebenfalls nach, dass $C^{i}{}_{jki} = C^{i}{}_{j}{}^{j}{}_{i} = 0$, und dass analog zu b) das Verschwinden von C_{ijkl} für $n \leq 3$ folgt.

Aufgabe 13 (10 Punkte): *Konforme Transformationen*

Zwei Metriken g und $\bar{g}$ heißen *konform* zueinander, falls es eine nirgends verschwindende, differenzierbare Funktion $\Omega(x)$ gibt, sodass

$$\bar{g}_{ab}(x) = \Omega^2(x)\, g_{ab}\,.$$

a) Beweisen Sie, dass Winkel zwischen zwei Vektoren unter einer konformen Transformation erhalten bleiben.

b) Rechnen Sie nach, dass sich das Christoffel-Symbol unter einer konformen Transformation wie

$$\bar{\Gamma}^{i}{}_{jk} = \Gamma^{i}{}_{jk} + S^{i}{}_{jk}\,, \quad S^{i}{}_{jk} = 2\,\delta^{i}_{(j}\sigma_{k)} - g_{jk}\,\sigma^{i}\,, \quad \sigma_i = \partial_i \log\Omega$$

verhält. Ist $S^{i}{}_{jk}$ ein Tensor?

c) Zeigen Sie, dass lichtartige Geodäten bezüglich einer Metrik g_{ij} ebensolche für eine konform transformierte Metrik sind.

Eine einfache doch längliche Rechnung zeigt, dass

$$\bar{R}^{i}{}_{jkl} = R^{i}{}_{jkl} - 4g^{im}\, g_{[m|[k}S_{l]|j]}\,, \qquad S_{ij} = \sigma_{i;j} - \sigma_i\sigma_j + \frac{1}{2}\, g_{ij}\,\sigma_k\sigma^k$$

gilt. Ein Raum heißt dann konform flach, wenn sich durch eine konforme Transformation $\bar{R}^{i}{}_{jkl} = 0$ erreichen lässt, d. h. falls

$$g_{ij}(x) = \Omega^2(x)\,\eta_{ij}\,.$$

d) Zeigen Sie, dass der Weyl-Tensor konform invariant ist.

e) Beweisen Sie, dass jeder 2-dimensionale Raum konform flach ist.
Tipp: Betrachten Sie die Transformation des Krümmungsskalares!

In 3 Dimensionen finden wir mithilfe der Zerlegung des Krümmungstensors

$$\bar{R}^i{}_{jkl} = \underbrace{R^i{}_{jkl}}_{=-2g^{im}\,g_{[m|[k}L_{l]|j]}} -4\,g^{im}\,g_{[m|[k}S_{l]|j]}\,.$$

Ein 3-dimensionaler Raum ist also konform flach, falls

$$L_{ij} = -2S_{ij} = -2(\sigma_{i;j} - \sigma_i\sigma_j + \frac{1}{2}\,g_{ij}\,\sigma_k\sigma^k)\,,(*)$$

wobei $\sigma_i = \partial_i \log \Omega$. Man kann diese Gleichung als System partieller Differentialgleichungen für die Funktion $\Omega(x)$ lesen. Wann gibt es ein solches Ω? Dazu müssen gewisse *Integrabilitätsbedingungen* erfüllt sein. Zunächst muss offenbar $L_{[ij]} = 0$ gelten, da $S_{[ij]} = 0$ ist. Die nächste Integrabilitätsbedingung erhält man, wenn man (*) differenziert und dann antisymmetrisiert. Es zeigt sich dann, dass

$$C_{ijk} := 2\,\nabla_{[i}L_{j]k} = 0 \qquad \text{Cotton-Tensor}$$

notwendig und hinreichend für die Integrabilität von (*) ist[1]. Übrigens ist der Cotton-Tensor nur in genau 3 Dimensionen konform invariant.
In $n > 3$ kommt der Weyl-Tensor ins Spiel. Da dieser konform invariant ist, lässt er sich nicht durch eine konforme Transformation zu Null transformieren. Ein Notwendiges Kriterium für konforme Flachheit in $n > 3$ ist daher $C_{ijkl} = 0$. Der verbleibende zweistufige, durch L_{ij} gegeben Anteil der Krümmung lässt sich wieder dann zum verschwinden bringen, wenn die oben angegebene Integrabilitätsbedingung

$$C_{ijk} = 0$$

erfüllt ist.

f) Beweisen Sie mit Hilfe der 2. Bianchi-Identität, dass für $n \geq 4$

$$C_{ijkl} = 0 \quad \Rightarrow C_{ijk} = 0$$

folgt. Berechnen Sie ferner die Spur $C_{ij}{}^i$ des Cotton-Tensors.

Deshalb ist also das Verschwinden des Weyl-Tensors notwendig und hinreichend für konforme Flachheit in $n \geq 4$.

Aufgabe 14 (4 Punkte): *Berechnung des Krümmungstensors*
Machen Sie sich damit vetraut, wie man den Krümmungstensor mithilfe eines Computeralgebrasystemes berechnet. Betrachten Sie als Übung

a) die 2-dimensionale Sphäre ("Radius" $R_0 = const.$) mit der Metrik

$$ds^2 = {R_0}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)$$

b) die konform flache Metrik

$$g_{ij} = \psi^p(x,y,z)\,\eta_{ij}\,,$$

für den 3-dimensionalen euklidischen Raum.

[1] Siehe etwa *J. A. Schouten: Ricci calculus*, Springer, Berlin 1954.