

13. Übungsblatt zur Vorlesung  
**Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II**  
im Wintersemester 2007/08

Aufgabe 32: **Differentialformen** (12 Punkte)

- a) Gegeben sei eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Metrik. Sei  $\{\omega^i\}$  eine Orthonormalbasis von 1-Formen, und sei  $\omega$  die bevorzugte Volumenform  $\omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^n$ . Zeigen Sie, daß in einem beliebigen Koordinatensystem  $\{x^k\}$  gilt:  $\omega = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$ , wobei  $g$  die Determinante der Metrik bezeichne, deren Komponenten  $g_{ij}$  in diesen Koordinaten gegeben sind.
- b) Die Kontraktion einer  $p$ -Form  $\omega$  (mit Komponenten  $\omega_{ij\dots k}$ ) mit einem Vektor  $v$  (mit Komponenten  $v^i$ ) ist durch  $[\omega(v)]_{j\dots k} = \omega_{ij\dots k} v^i$  gegeben. Betrachten Sie die  $n$ -Form  $\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$ . Zeigen Sie, daß mit einem Vektorfeld  $v$  gilt:

$$d[\omega(v)] = v^i{}_{,i} \omega . \quad (1)$$

- c) Wir definieren  $(\operatorname{div}_\omega v)\omega := d[\omega(v)]$ . Zeigen Sie, daß in Koordinaten, in denen  $\omega$  die Form hat:  $\omega = f dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$ , gilt:

$$\operatorname{div}_\omega v = \frac{1}{f} (f v^i)_{,i} . \quad (2)$$

- d) Im dreidimensionalen Euklidischen Raum lautet die bevorzugte Volumenform  $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ . Zeigen Sie, daß diese in Kugelkoordinaten  $\omega = r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\phi$  lautet. Benutzen Sie das Ergebnis in c), um zu zeigen, daß die Divergenz eines Vektorfeldes

$$v = v^r \frac{\partial}{\partial r} + v^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + v^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3)$$

durch

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v^r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v^\theta) + \frac{\partial v^\phi}{\partial \phi} \quad (4)$$

gegeben ist.

### Aufgabe 33: **Maxwell-Gleichungen** (8 Punkte)

Durch die elektromagnetische Feldstärke  $F_{ij}$  und die Viererstromdichte  $j^i = (\rho, \mathbf{j})$  seien die 2-Form

$$F = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j = E^1 dx^0 \wedge dx^1 + E^2 dx^0 \wedge dx^2 + E^3 dx^0 \wedge dx^3 \\ - B^3 dx^1 \wedge dx^2 + B^2 dx^1 \wedge dx^3 - B^1 dx^2 \wedge dx^3 \quad (5)$$

sowie die 1-Form  $j = j_i dx^i$  definiert. Formulieren Sie die Maxwell-Gleichungen in der Sprache der Differentialformen und leiten Sie aus diesen die Gleichung für die Stromerhaltung her. Zeigen Sie weiter, daß die Feldstärke lokal durch eine Potentialform ausgedrückt werden kann. Wie lauten dann die Maxwell-Gleichungen?

Abgabe: Mi, 6.02.2008