

4. Übungsblatt zur Vorlesung  
**Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II**  
im Wintersemester 2007/08

**Aufgabe 9: Akkretionsscheiben** (4 Punkte)

Schätzen Sie die charakteristische Energie ab, die von einer Akkretionsscheibe mit Radius  $R$  um ein kompaktes kugelsymmetrisches Objekt abgestrahlt wird. Nehmen Sie dazu der Einfachheit halber an (was nicht ganz realistisch ist), dass die Leuchtkraft die eines Schwarzen Körpers der Größe  $R$  und Temperatur  $T$  ist und einen gegebenen Bruchteil  $\epsilon$  der Eddington-Leuchtkraft beträgt. (Setzen Sie am Ende  $\epsilon \approx 0,5$  ein.)

**Aufgabe 10: Rotverschiebung beim Gravitationskollaps** (4 Punkte)

Ein Beobachter auf der Oberfläche eines kollabierenden kugelförmigen Sterns sende in kurzen Eigenzeitintervallen  $\Delta s$  radiale Lichtsignale ab, d.h. mit einer konstanten Frequenz  $\omega_* = 2\pi/\Delta s$ . Diese Signale werden von einem stationären Beobachter in großer Entfernung  $r = r_E$  empfangen, also mit einer Frequenz  $\omega_E = 2\pi/\Delta t_E$ , wobei sich  $\Delta t_E$  auf die Schwarzschild-Zeit bezieht. Berechnen Sie die Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses  $\omega_E/\omega_*$  von  $t_E$ . Geben Sie die Zeitskala der Rotverschiebung in Sekunden an, wenn Sie  $M$  in Sonnenmassen messen.

**Hinweis:** Benutzen Sie die in der Vorlesung diskutierten Eddington-Finkelstein-Koordinaten und nehmen Sie an, dass sich der aussendende Beobachter bereits in der Nähe des Schwarzschildradius befindet.

Aufgabe 11: **Newtonsche Kosmologie** (12 Punkte)

- a) Wie groß ist in der Newtonschen Gravitationstheorie die Gesamtkraft einer unendlich ausgedehnten Massenverteilung mit Massendichte  $\rho(\vec{x})$  auf eine Masse  $m$ , die sich im Ursprung befindet? Welches Problem tritt bei einer unendlichen großen, homogenen Massenverteilung auf?
- b) Betrachten Sie ein „Universum“ mit einer homogenen Massendichte  $\rho(t)$ . Formulieren Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung für eine beliebige Galaxie der Masse  $m$ , deren Radiusvektor auf die Erde bezogen  $\vec{x}(t)$  sei. Nach dem Hubble-Gesetz gilt  $\vec{x}(t) = a(t)\vec{x}_0$  mit  $\dot{a}/a = H(t)$  ( $\vec{x}_0$  bezeichne den Ort zu einer beliebigen gegebenen Zeit). Formulieren Sie die Bewegungsgleichung für  $a(t)$ . Benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung, um  $\rho(t)$  zu eliminieren. Ist ein statisches Universum ( $a = \text{const.}$ ) möglich? Zeigen Sie, dass sich durch Integration der „Energiesatz“

$$\dot{a}^2 - \frac{C}{a} + k = 0 \quad (1)$$

ergibt, wobei  $C > 0$  und  $k$  Konstanten sind. Welche Interpretation hat  $k$ ? Skizzieren Sie grob  $a(t)$  für die drei Fälle  $k < 0$ ,  $k = 0$  und  $k > 0$ .

- c) Fügen Sie zur Newtonschen Gravitationskraft ad hoc eine abstoßende Kraft  $m\Lambda\vec{x}/3$  mit der „Kosmologischen Konstante“  $\Lambda > 0$  hinzu. Formulieren Sie die abgeänderte Bewegungsgleichung für  $a(t)$  und den abgeänderten „Energiesatz“. Ist jetzt ein statisches Universum möglich?
- d) Fassen Sie kurz in eigenen Worten zusammen, was Sie für die wichtigsten Unterschiede der Newtonschen Kosmologie zur allgemeinrelativistischen Kosmologie halten. Wo liegen die Grenzen der Newtonschen Kosmologie?

Abgabe: Mi, 21.11.2007