Universität zu Köln 14.10.2008
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser, Christian Steinwachs

1. Übungsblatt zur Quantenmechanik II
Wintersemester 2008

1 Aufgabe 1 (Potentialschwelle) 5 Punkte

Diskutieren Sie die Streuung eines von links einlaufenden Teilchens mit der Energie E an der Potenzialschwelle

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 > 0 & \text{für } 0 \le x \le d \\ 0 & \text{für } x > d \,. \end{cases}$$

Behandeln Sie getrennt die Fälle $E < V_0$ und $E > V_0$.
Machen Sie wie gewohnt den folgenden Ansatz für die Wellenfunktion in den verschiedenen Abschnitten:

$$\psi = \begin{cases} A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ A_2 e^{-\kappa x} + B_2 e^{\kappa x} & \text{für } 0 \le x \le d \\ A_3 e^{ikx} & \text{für } x > d \,, \end{cases}$$

wobei

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad \text{und} \qquad \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\,.$$

Drücken Sie A_1, B_1, A_2 und B_2 durch A_3 aus, indem Sie die üblichen Anschlussbedingungen für die Wellenfunktion bei $x = 0$ und $x = d$ fordern.
Berechnen Sie den Transmissionskoeffizienten $T = \left|\frac{A_2}{A_1}\right|^2$ und den Reflexionskoeffizienten $R = \left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2$.
Prüfen Sie nach, dass deren Summe eins ergibt. Geben Sie eine Näherungsformel für T im Limes $\kappa d >> 1$, d.h. kleiner Energien und langer Schwellen an.
Skizzieren Sie T für $E > V_0$ in Abhängigkeit von E/V_0. Wann wird $T = 1$? Diskutieren Sie die Unterschiede zur Streuung eines *klassischen* Teilchens.

2 Aufgabe 2 (Campbell-Hausdorff-Beziehung) 3 Punkte

Es seien zwei Operatoren A und B gegeben mit $[C, A] = [C, B] = 0$ wobei $C = [A, B]$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \ge 0$ gilt

$$[A, B^n] = [A, B]\frac{dB^n}{dB}$$

und dass deshalb

$$[A, F(B)^n] = [A, B]\frac{dF(B)^n}{dB}$$

für alle Funktionen gilt, die sich in eine Reihe entwickeln lassen.

b) Definieren Sie eine Familie von Operatoren $G(t), t \in R$, durch

$$G(t) = e^{At} e^{Bt}$$

und zeigen Sie, dass diese der Differentialgleichung

$$\frac{dG(t)}{dt} = (A + B + t[A, B])G(t)$$

genügt. Beweisen Sie hiermit die Formel von *Campbell und Haussdorff*, die besagt, dass

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \, .$$

Zeigen Sie schliesslich, dass

$$U_\alpha V_\beta = e^{-i\frac{\alpha\beta}{\hbar}} V_\beta U_\alpha$$

mit $U_\alpha = e^{-i\alpha Q/\hbar}$, $V_\beta = e^{-i\beta P/\hbar}$, wobei Q den Ortsoperator und P den Impulsoperator bezeichnet.

3 Aufgabe 3 (Drehimpuls) 2 Punkte

An einem Teilchen werden die Observablen $\vec{L}^2$ und L_3 gemessen und die Werte $\hbar^2 l(l+1)$ bzw. $\hbar m$ gefunden.

a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte und die Varianzen für eine anschliessende Messung von L_1 bzw. L_2. Für welche Werte von m sind die Varianzen minimal?

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle \vec{n} \cdot \vec{L} \rangle$ für die anschliessende Messung der Drehimpulskomponente in einer beliebigen Richtung $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$.