Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Manuel Krämer

Aktualisierte Version vom 22. Juni 2012

www.thp.uni-koeln.de/gravitation/courses/qm12.html

10. Übungsblatt zur Quantenphysik

Sommersemester 2012

Abgabe: bis Mittwoch, 27. Juni 2012, 12:00 Uhr in der Holzbox vor dem Institut für Theoretische Physik

Übung 25 (12 Punkte – Abgabe bis zum **4. Juli 2012**): *Lenz-Runge-Vektor*

Der hermitesche Vektoroperator A, der dem *Lenz-Runge-Vektor* der klassischen Mechanik entspricht, lautet:

$$\vec{A} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}\times\vec{L} - \vec{L}\times\vec{p}\right) - \frac{Z\,e^2}{r}\,\vec{r}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\vec{A}^\dagger = \vec{A}$ ist und dass $\vec{A}$ wie in der klassischen Theorie eine Konstante der Bewegung und normal zu $\vec{L}$ ist, d. h.:

$$[\vec{A}, H] = 0\,, \qquad \vec{A}\cdot\vec{L} = \vec{L}\cdot\vec{A} = 0\,,$$

wobei H der Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms ist.

Übung 26 (2 + 2 Punkte): *Laguerre-Polynome*

Die *Laguerre-Polynome* $L_r(x)$ werden mit Hilfe der folgenden erzeugenden Funktion $F(x,s)$ definiert:

$$F(x,s) := \frac{1}{1-s}\,\mathrm{e}^{-x\,\frac{s}{1-s}} = \sum_{r=0}^{\infty} L_r(x)\,\frac{s^r}{r!}\,.$$

26.1 Zeigen Sie durch partielles Ableiten der erzeugenden Funktion $F(x,s)$ nach x bzw. s die folgenden Rekursionsformeln:

$$L_r' = r\left(L_{r-1}' - L_{r-1}\right),$$
$$L_{r+1} = (2r+1-x)\,L_r - r^2\,L_{r-1}\,,$$

wobei $'$ eine partielle Ableitung bezüglich x bezeichnet.

26.2 Zeigen Sie, dass aus diesen Rekursionsformeln die *Laguerresche Differentialgleichung* folgt

$$x\,L_r'' + (1-x)\,L_r' + r\,L_r = 0$$

und dass die *zugeordneten Laguerre-Polynome* $L_r^k(x) := \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} L_r(x)$ folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$x\,L_r^{k\prime\prime} + (k+1-x)\,L_r^{k\prime} + (r-k)\,L_r^k = 0\,.$$

Übung 27 (8 Punkte): *Mittelwerte und Unschärfen des Ortes im Coulomb-Potential*

Der mittlere radiale Abstand $\langle r\rangle_{n\ell}$ in den Eigenzuständen $\psi_{n\ell m}$ des Coulomb-Hamilton-Operators lautet

$$\langle r\rangle_{n\ell} = \frac{1}{2}\,\frac{a}{Z}\left(3\,n^2 - \ell(\ell+1)\right).$$

Bestimmen Sie $\langle r\rangle_{n,n-1}$ und nutzen Sie die folgende Rekursionsrelation, um $\langle r^2\rangle_{n\ell}$, $\langle r^2\rangle_{n,n-1}$ sowie die radiale Unschärfe Δr für den Zustand $\psi_{n,n-1,m}$ zu berechnen:

$$\frac{k+1}{n^2}\,\langle r^k\rangle_{n\ell} - (2k+1)\,\frac{a}{Z}\langle r^{k-1}\rangle_{n\ell} + k\left[\ell(\ell+1) + \frac{1-k^2}{4}\right]\frac{a^2}{Z^2}\,\langle r^{k-2}\rangle_{n\ell} = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass die relative Schwankung $\frac{\Delta r}{\langle r\rangle_{n,n-1}}$ für $n\to\infty$ gegen 0 geht.

Bitte wenden.

Übung 28 (4 Bonuspunkte): *Wahrscheinlichkeitsverteilung der Impulswerte*

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die verschiedenen Werte des Impulses $\vec{p}$ im Grundzustand des Wasserstoffatoms.

Historisches Zitat zur Quantenmechanik

In Kopenhagen ist der Stand der Physik jetzt der, daß die Sache mit dem Faktor 2 von Thomas (entgegen meiner ursprünglichen Ansicht) doch ganz einwandfrei ist. Mit der Hypothese des magnetischen Elektrons [gemeint ist der Spin] und der Quantenmechanik kommen also die Dublettspektren (einschließlich Wasserstoffspektrum) samt Feinstruktur und anomalem Zeemaneffekt wirklich in Ordnung. Man muß also doch wohl glauben, daß diese Hypothese viel Wahres enthält. [...]

Was die Verbindung von Schrödinger mit der Quantenmechanik betrifft, so ist sie nunmehr vollständig klargestellt. Um nicht alles noch einmal schreiben zu müssen, lege ich die Abschrift eines Briefes bei, den ich von Kopenhagen aus an Herrn Jordan geschrieben habe. [...] Wie Sie daraus sehen, muß man nur zwei (normierte) Schrödingersche Eigenfunktionen miteinander multiplizieren und über das Volumen integrieren, um die Übergangswahrscheinlichkeiten zu erhalten. Nachdem ich mir dies überlegt hatte, erfuhr ich brieflich von Schrödinger, daß er das alles selbst schon hatte und sogar bereits eine Arbeit von ihm in den Annalen der Physik darüber im Druck ist.

aus: Wolfgang Pauli, *Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u.a.*, Band I,
hrsg. von Armin Hermann, Karl von Meyenn und Victor F. Weisskopf, Springer 1979.
(Brief an Gregor Wentzel vom 8. Mai 1926)