

6. Übungsblatt zur Quantenphysik Sommersemester 2012

Abgabe: bis Mittwoch, 23. Mai 2012, 12:00 Uhr in der Holzbox vor dem Institut für Theoretische Physik

Übung 15 (2 + 3 Punkte): *Unendlich hoher Potentialtopf*

In der Vorlesung wurde der Potentialtopf $V(x) = -V_0 \theta(a - |x|)$, $V_0 > 0$, behandelt. Es wurde gezeigt, dass es mindestens einen gebundenen Zustand mit $E_0 < 0$ gibt. Betrachten Sie nun ein anderes Potential $U(x) < 0$ mit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = 0$, für welches ein geeigneter Potentialtopf mit $V(x) \geq U(x)$ für alle x existiert. Es sei

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad \text{und} \quad H = \frac{p^2}{2m} + U(x).$$

- 15.1** Es sei $\psi_0(x)$ der Grundzustand von H_0 . Zeigen Sie, dass der Mittelwert von H in diesem Zustand negativ ist.
- 15.2** Zeigen Sie, dass H mindestens einen Bindungszustand hat, dessen Energie kleiner oder gleich der Grundzustandsenergie E_0 von H_0 ist.

Übung 16 (3 + 5 + 2 + 2 + 3 Punkte): *Potentialschwelle*

Betrachten Sie den folgenden Potentialverlauf:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } 0 < x < a \text{ (Bereich I)} \\ U & \text{für } a \leq x \leq b \text{ (Bereich II)} \\ 0 & \text{für } x > b \text{ (Bereich III)} \end{cases} \quad \text{wobei } U, a, b > 0.$$

Wir setzen

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \quad \text{sowie} \quad \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (U - E),$$

wobei m die Masse und E die Energie bezeichnet.

- 16.1** Zeigen Sie, dass die Lösungen der Schrödinger-Gleichung für die einzelnen Bereiche gegeben sind durch

$$\begin{aligned} u_{\text{I}} &= A \sin(kx), \\ u_{\text{II}} &= B_1 e^{\kappa(x-a)} + B_2 e^{-\kappa(x-a)}, \\ u_{\text{III}} &= e^{ik(x-b)} + C e^{-ik(x-b)}, \end{aligned}$$

wobei A , B_1 , B_2 und C die noch zu bestimmenden Amplitudenfaktoren sind.

- 16.2** Formulieren Sie die zu erfüllenden Anschlussbedingungen bei $x = a$ und $x = b$ und berechnen Sie hieraus die Amplitudenfaktoren A und C . Was gilt für $|C|^2$?
- 16.3** Bestimmen Sie den ausschlaggebenden Faktor für die Größenordnung von $|A|^2$ für den Fall $E < U$.
- 16.4** Diskutieren Sie den Grenzfall $U \rightarrow \infty$, d.h. den Fall einer undurchlässigen Schwelle.
- 16.5** Betrachten Sie den Fall $\kappa(b - a) \gg 1$, d.h. den Fall einer schwach durchlässigen Schwelle. Bestimmen Sie diejenigen Werte k_0 und κ_0 , für die B_1 verschwindet, und berechnen Sie A und C explizit für diese Werte. Vergleichen Sie $|A|^2$ mit dem Wert aus **16.3**.

Historische Zitate zur Quantenmechanik

Das Jahr 1925 brachte die Auflösung. Ein Ansatz von HEISENBERG konnte von BORN, HEISENBERG, JORDAN, und kurz nachher von DIRAC zu einem neuen System der Quantentheorie ausgebaut werden, dem ersten geschlossenen System der Quantentheorie, das die Physik besessen hat. Um wenig später fand SCHRÖDINGER von einem ganz anderen Ausgangspunkte her die „Wellenmechanik“, die das gleiche leistete und sich bald als mit dem Heisenberg-Born-Jordanschen und Diracschen System gleichwertig (wenigstens im mathematischen Sinne [...]) herausstellte. Die beiden Theorien konnten auf Grund der Bornschen statistischen Deutung der quantentheoretischen Naturbeschreibung von DIRAC und JORDAN zu einer Theorie, der „Transformationstheorie“, verschmolzen werden, in der sich beide ergänzend vereinigen und eine mathematisch besonders einfache Beherrschung der physikalischen Fragen ermöglichen.

aus: Johann von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer 1932.

Leiden, 19. Mai 1926

[Postkarte]

Lieber Herr Schrödinger!

Ich bin einfach ganz fasziniert von der

$$\Delta\varphi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - eV) \varphi = 0 - \text{Theorie}$$

und von den sonderbaren neuen Gesichtspunkten, die sie bringt.

Unsere kleine Gruppe hier steht jeden Tag seit zwei Wochen stundenlang vor der Tafel, um sich in all den herrlichen Zusammenhängen einzuüben. *Jetzt* ist die Matrizen-Rechnung sehr hübsch, weil mit einer faszinierenden Interpretation versehen. [...]

Wir erwarten mit Ungeduld Ihre weiteren Publikationen. Wenn es nicht unbescheiden ist, möchte ich sagen, daß ich Ihren großen Fund sehr bewundere – selbstverständlich liege ich nun auch vor L. de Broglie platt auf dem Bauch.

Beste Grüße Ihr

P. Ehrenfest

aus: Erwin Schrödinger, *Eine Entdeckung von ganz außerordentlicher Tragweite*, Band 1, hrsg. von Karl von Meyenn, Springer 2011.